A. ZABALZA *

# Una regla lineal de decisión para el control de un modelo dinámico uniecuacional

## 1. INTRODUCCION

La estimación de relaciones económicas tiene una finalidad doble. Por una parte, ganar un nivel de conocimiento mayor acerca de cómo el mundo real funciona. Por la otra, proporcionar la posibilidad de un control más efectivo de aquellas variables que se consideran importantes a efectos de política económica. Esta segunda tarea se hace particularmente difícil cuando las relaciones económicas en cuestión obedecen estructuras dinámicas. Cambios actuales en los instrumentos económicos pueden afectar no sólo el nivel presente de las variables de interés, sino también su evolución futura. O, desde otro punto de vista, los niveles actuales de tales variables pueden deberse no sólo a decisiones presentes, sino ser también el resultado de decisiones pasadas. La complejidad del problema se agudiza cuando no todas las variables que afectan una determinada magnitud se hallan bajo el control de la autoridad económica. En tal caso, al problema existente para establecer correctamente la influencia temporal de los instrumentos controlables, se el añaden las dificultades de prever la evolución futura de aquellas variables sobre las que la autoridad económica no posee control.

En un trabajo previo (Zabalza, 1977) el autor considera este tipo de problema referido a una estructura dinámica uniecuacional en la que una determinada variable depende de un instrumento sobre el que se posee control y de otra variable incontrolable. La finalidad del ejercicio es la derivación de una regla óptima de decisión para el control del sistema. Por razones de espacio, dicho trabajo no presenta la derivación formal de la regla y sólo utiliza un caso para ilustrar su operacionali-

* Agradezco a M. Blaug, R. Layard y G. Williams, sus comentarios acerca del presente artículo, y a P. Turnbull el diseño del programa utilizado para calcular las simulaciones numéricas presentadas en este trabajo.

dad. El propósito del presente artículo es la derivación de la regla en cuestión y la presentación de varios ejemplos numéricos en donde sus propiedades quedan ilustradas.

Dado el modelo estructural disponible, el problema se plantea en términos de una ecuación de oferta de trabajo. Sin embargo, la metodología utilizada es aplicable a cualquier otro tipo de relación económica. Dicha metodología puede también generalizarse para modelos multiecuacionales. En el presente trabajo la regla de decisión se deriva con base a un modelo simple para resaltar los rasgos esenciales del problema y para poder relacionar la regla en cuestión con los parámetros estructurales del modelo. En principio el problema puede plantearse con varias variables dependientes y con varios instrumentos, aunque en tal caso es prácticamente imposible llegar a una expresión paramétrica de la regla de decisión como la que se presenta en este trabajo.

La segunda sección plantea el problema, la tercera presenta la derivación de la regla de decisión, la cuarta ilustra la operacionalidad de la misma con base a una serie de simulaciones numéricas y la quinta resume los resultados.

## 2. EL PROBLEMA

Dado que en la ilustración numérica de la regla de decisión vamos a emplear una curva de oferta de trabajo, es conveniente plantear el problema en dichos términos, aunque como se ha señalado más arriba la metodología es perfectamente generalizable. En particular, consideraremos un mercado laboral de profesores de enseñanza media.

Supongamos que la autoridad económica quiere obtener una determinada proporción de graduados universitarios para la profesión docente. La forma en que la autoridad económica determina tal proporción es una cuestión que queda fuera del ámbito del presente ejercicio. El instrumento utilizado en orden a obtener dicho objetivo es el salario medio (relativo al salario medio pagado en ocupaciones alternativas). Se supone que la autoridad económica puede operar este instrumento sujeta a ciertas limitaciones presupuestarias y que, en principio, preferiría obtener los objetivos fijados sin desviarse sustancialmente de tales limitaciones. Estas limitaciones pueden ser expresadas en términos de una serie de salarios medios deseados a lo largo del período cubierto por el plan.

Evidentemente, los dos objetivos acabados de señalar son conflictivos. El logro de una oferta cercana a la deseada puede requerir salarios medios sustancialmente distintos a los niveles planificados. Por otra parte, una adherencia rígida al presupuesto fijado puede resultar en niveles de oferta totalmente deficientes. Las ponderaciones que se asignan a cada objetivo reflejan la preferencia relativa de la autoridad económica por cada uno de ellos.

En principio, la ordenación de estas preferencias podría ser expresada con base a una amplia gama de funciones reales. En aras a conveniencia matemática, sin embargo, supondremos que esta ordenación puede representarse por medio de una función cuadrática, cuyos argumentos son las desviaciones de la variable objetivo y de la variable instrumento con respecto a sus niveles deseados.[1] Además, por razones que se discuten más adelante, la función se especifica en términos temporales. La especificación particular que usaremos en el presente ejercicio es

$$C = \sum_{t=1}^{N} [(S_t - S_t^*)^2 + g(W_t - W_t^*)^2] \quad (1)$$

en donde C es el valor (criterio) a minimizar; t indica el período en que una variable es considerada; N, es el número de períodos sobre los que el plan se extiende; S, la oferta (relativa); W, el salario medio (relativo); $S^*$ y $W^*$ indican respectivamente los niveles deseados (o planificados) de oferta y salarios y, finalmente, g es la ponderación relativa asociada con la variable $W^*$.

La finalidad del ejercicio es encontrar, a lo largo del período de planificación, los valores de W que minimizan la función C. Sin embargo, antes debemos establecer en qué forma las variables S y W se hallan relacionadas y qué otras variables influencian el nivel de la oferta. Para ello postulamos la siguiente función de oferta

$$S_t = a + bW_t + cW_{t-1} + eU_{t-2} \quad (2)$$

en donde a, b, c, d y e son parámetros, y U representa el nivel (proporcional) de desempleo en mercados relacionados. Dos cuestiones merecen ser destacadas acerca de esta relación: su estructura dinámica y la existencia de una nueva variable cuya evolución no es controlada por la autoridad económica. Cambios actuales en salarios no sólo afectan el nivel actual de la oferta sino también su nivel futuro; ésta es la razón por la cual la función a minimizar se especifica en términos dinámicos. La política de salarios óptima deberá minimizar la función C no sólo en un momento determinado, sino a lo largo de todo el período de planificación. Por lo que respecta a la segunda cuestión, la presencia de la

1. La razón principal para la elección de esta forma funcional es el hecho de que su optimización, cuando sujeta a un sistema lineal, resulta en una regla de decisión que también es lineal.

variable U plantea problemas dado que a pesar de no poder ser controlada, también afecta el nivel de la oferta. La política de salarios óptima también deberá tener en cuenta previsiones acerca de la evolución temporal de esta variable.

Para recapitular. El problema a resolver consiste en la minimización de (1) con respecto a W, sujeta a (2). Es decir,

$$\underset{W}{\text{Min}} \quad C = \sum_{t=1}^{N} [(S_t - S_t^*)^2 + g(W_t - W_t^*)^2]$$

$$\text{sa} \quad S_t = a + bW_t + cW_{t-1} + dU_{t-1} + eU_{t-2}$$

El problema queda completamente definido si además se suministra una condición inicial; es decir, un valor exógeno para $S_0$. También puede imponerse una condición terminal, en el sentido de que el valor $S_N$ esté sujeto a un nivel determinado. En la ausencia de tal condición terminal, el problema es equivalente a la minimización de C a lo largo de un período infinito. Dado que estamos más interesados en mantener el nivel de oferta cercano a una trajectoria especificada que en obtener un objetivo particular en un determinado momento, no impondremos condición terminal alguna en el presente ejercicio.

## 3. UNA EXPRESION PARAMETRICA PARA LA POLITICA DE SALARIOS OPTIMA

La primera cuestión a elucidar es la planteada por la presencia de la variable exógena U en la función de oferta. Si la tratamos como una variable estocástica, el ejercicio debe replantearse en términos de la minimización de la *esperanza matemática* de la función C sujeta a la función (2). Se puede demostrar, sin embargo, que cuando la función a minimizar es cuadrática y las funciones a que se halla sujeta lineales, la regla de decisión es la misma que la que resultaría de un ejercicio en el que los valores futuros de la variable exógena fueran perfectamente conocidos. Es decir, la existencia de una variable no controlable deja inalterada la regla de decisión; la única diferencia es que en lugar de trabajar con valores ciertos de dicha variable, deberemos trabajar con valores predichos.[2]

Por 'política de salarios óptima' entendemos un algoritmo que mues-

2. Este resultado, conocido como la propiedad de *certidumbre equivalente*, es esencial para la derivación de la regla en condiciones de incertidumbre. Una prueba simple de tal propiedad para un caso estático la proporciona Holt (1962). La prueba para un sistema dinámico puede encontrarse en Simon (1956).

tre cómo, en cada momento, la autoridad económica puede determinar el salario medio en orden a mantener el valor de C en su valor mínimo durante el período de planificación. Este es un problema típico de teoría de control y podría ser resuelto a partir de la aplicación del 'principio mínimo' de Pontriagyn.[3] En el presente ejercicio, sin embargo, la simplicidad del problema nos permite el uso directo del método de Lagrange generalizado a un sistema dinámico.[4] En nuestro caso la función de Lagrange es

$$F = -\sum_{t=1}^{N} [(S_t - S_t^*)^2 + g(W_t - W_t)^2] +$$

$$\sum_{t=1}^{N} v_t [a + bW_{t+1} + cW_t + dU_t + eU_{t-1} - S_{t+1}]$$

en donde $v_t$ es el multiplicador dinámico, y $U_t$ es el nivel de desempleo previsto. Las condiciones necesarias de Euler-Lagrange son

$\delta F/\delta S_t = 0$, $\delta F/W_t = 0$ y $\delta F/\delta v_t = 0$, en donde $S_t$, $W_t$ y $v_t$ son

respectivamente los valores óptimos de las variables objetivo, instrumento y multiplicador. Tales condiciones resultan en

$$-2(S_t - S_t^*) - v_{t-1} = O$$
$$-2g(W_t - W_t^*) + bv_{t-1} + cv_t = O$$
$$S_{t+1} = a + bW_{t+1} + cW_t + d\hat{U}_t + e\hat{U}_{t-1}$$

que, previa manipulación, pueden ser reducidas a la siguiente ecuación de diferencias de segundo orden[5]

3. Véase Athans and Falb (1966) o Vegara (1975).
4. Véase, por ejemplo, Sengupta (1970).
5. Un método alternativo, y posiblemente más intuitivo, para la solución de este problema es el siguiente. La derivada de la negativa de la función (1), con respecto a $W_r$ (en donde r representa tiempo) es

$$\frac{\delta C}{\delta W_r} = -2(S_t - S^*_t)\frac{\delta S_t}{\delta W_r} - 2g(W_r - W^*_r)$$

Dado que S y W están relacionados de acuerdo con (2),

$$\frac{\delta S_t}{\delta W_r} = b\frac{\delta W_t}{\delta W_r} + c\frac{\delta W_{t-1}}{\delta W_r} \quad \begin{array}{l} = b \text{ si } t = r \\ = c \text{ si } t = r+1 \\ = o \text{ en cualquier otro caso} \end{array}$$

De donde obtenemos

$$\frac{\delta C}{\delta W_r} = -2b(S_r - S^*_r) - 2c(S_{r+1} - S^*_{r+1}) - 2g(W_r - W^*_r)$$

Igualando esta derivativa a cero y sustituyendo S por (2), obtenemos una expresión idéntica a (3).

$$\begin{aligned} & bcW_{t+1} + (g + b^2 + c^2)\, W_t + bcW_{t-1} = gW_t{}^* + bS_t{}^* + cS_{t+1}{}^* - \\ & - be\hat{U}_{t-2} - (bd + ce)\, \hat{U}_{t-1} - cd\hat{U}_t - a\,(b + c) \end{aligned} \tag{3}$$

La expresión (3) nos muestra la estructura dinámica que el salario óptimo obedecerá cuando minimice (1). Esta relación, aunque interesante en sí misma, no es todavía la regla de decisión que queremos encontrar. Lo que perseguimos es una expresión para $W_t$ dependiente de los niveles deseados de las variables objetivo e instrumento y de los niveles previstos de la variable exógena, que satisfaga (3). Es decir, queremos obtener la solución de la ecuación de diferencias (3). A pesar de que se trata solamente de una ecuación no homogénea de segundo orden, la solución es bastante complicada debido a que el término que convierte la ecuación en no-homogénea (la parte a la derecha del signo de igualdad) no es constante. Para su solución seguimos un método aplicado previamente a problemas de organización empresarial.[6]

La expansión de la ecuación (3) (es decir, la evaluación de (3) para diferentes valores de t) resulta en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{llcccl}
\text{si } t = 1; & (g + b^2 + c^2)W_1 + & bcW_2 & & & = \alpha_1 \\
\text{si } t = 2; & & bcW_1 + (g + b^2 + c^2)W_2 + & bcW_3 & & = \alpha_2 \\
\text{si } t = 3; & & & bcW_2 + (g + b^2 + c^2)W_3 + & bcW_4 & = \alpha_3 \\
\text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

en donde,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= gW_1{}^* + bS_1{}^* + cS_2{}^* - be\hat{U}_{-1} - (bd + e)\hat{U}_0 - cd\hat{U}_1 - a(b + c) - bcW_0 \\
\alpha_2 &= gW_2{}^* + bS_2{}^* + cS_3{}^* - be\hat{U}_0 - (bd + e)\hat{U}_1 - cd\hat{U}_2 - a(b + c) \\
\alpha_3 &= gW_3{}^* + bS_3{}^* + cS_4{}^* - be\hat{U}_1 - (bd + e)\hat{U}_2 - cd\hat{U}_3 - a(b + c)
\end{aligned}$$

etc.

Multiplicando cada ecuación por $\lambda^{i-1}$, en donde $\lambda$ es una variable e i corresponde al número de la ecuación, y sumando los términos resultantes, obtenemos

$$(g + b^2 + c^2)\, W_1 + bcW_2 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{i-1}\, [bcW_{i-1} + (g + b^2 + c^2)\; W_i + bcW_{i+1}]$$

6. Véase Holt *et al* (1963).

$$= g[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} W_i^*] + b[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} S_i^*] + c[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} S_{i+1}^*]$$

$$- be[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \hat{U}_{i-2}] + [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \hat{U}_{i-1}] - cd[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \hat{U}_i]$$

$$- bc W_0 - a(b + c)[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}] - (bd + ce)$$

Manipulando los términos sumatorios, la expresión se puede reducir a

$$- bc \lambda^{-1} W_1 + [bc \lambda + (g + b^2 + c^2) + bc \lambda^{-1}][\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} W_i]$$

$$= - bc W_0 + g[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} W_i^*] + (b + c\lambda^{-1})[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} S_i^*]$$

$$- [cd + (bd + ce)\lambda + be \lambda^2][\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \hat{U}_i] - c \lambda^{-1} S_1^*$$

$$- be U_{-1} - [(bd + ce) + be \lambda] U_0 - \frac{a(b + c)}{1 - \lambda} \tag{4}$$

Si el valor absoluto de $\lambda$ es menor que la unidad, los términos sumatorios son finitos. Si, además, obtenemos un valor de $\lambda$ tal que la expresión

$$[bc \lambda + (g + b^2 + c^2) + bc \lambda^{-1}]$$

sea igual a cero, entonces podremos eliminar el sumatorio infinito de salarios

$$[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} W_i]$$

Es fácil apercibirse de que las raíces de la expresión

$$[bc \lambda + (g + b^2 + c^2) + bc \lambda^{-1}]$$

corresponden precisamente a las raíces de la ecuación característica de (3). Tales raíces pueden expresarse en la siguiente forma

$$\lambda = \frac{1}{2}[- h \pm \sqrt{h^2 - 4}]$$

en donde $h = \dfrac{(g + b^2 + c^2)}{bc}$.

Si $h^2 > 4$, ambas raíces son reales y —dada la simetría de la ecuación— una de ellas,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} [-h + \sqrt{h^2 - 4}]$$

será menor que la unidad en términos absolutos.

Sustituyendo $\lambda_1$ en lugar de $\lambda$, y dado que

$$[bc\,\lambda_1 + (g + b^2 + c^2) + bc\,\lambda_1^{-1}] = 0$$

la expresión (4) se convierte en

$$\begin{aligned}
-bc\,\lambda_1^{-1} W_1 = & -bc\,W_0 + g\,[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} W_1^*] + \\
& + (b + c\,\lambda_1^{i-1})\,[\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} S_i^*] \\
& - [cd + (bd + ce)\,\lambda_1 + be\,\lambda_1^2]\ [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} \hat{U}_i] \\
& - c\,\lambda_1^{-1} S_1^* - be\,U_{-1} \\
& - [(bd + ce) + be\,\lambda_1]\,U_0 - \frac{a(b + c)}{1 - \lambda_1}
\end{aligned}$$

de donde la regla de decisión para el primer período puede derivarse immediatamente

$$\begin{aligned}
W_1 = & \lambda_1 W_0 - \frac{g\,\lambda_1}{bc} [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} W_i^*] - \frac{b\,\lambda_1 + c}{bc} [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} S_i^*] \\
& + \frac{cd\lambda_1 + (bd + ce)\lambda_1^2 + be\lambda_1^3}{bc} [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{i-1} \hat{U}_i] + \frac{1}{b} S_1^* \\
& + \frac{e\,\lambda_1}{c} \hat{U}_{-1} + \frac{(bd + ce)\lambda_1 + be\lambda_1^2}{bc} U_0 + \frac{a(b + c)\,\lambda_1}{bc(1 - \lambda_1)}
\end{aligned}$$

o, en términos generales

$$W_t = m_0 W_{t-1} + m_1 [\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i W_{t+i}^*] + m_2 S_t^* + m_3 [\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^i S_{t+i}^*]$$
$$+ m_4 U_{t-2} + m_5 U_{t-1} + m_6 [\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_1^i \hat{U}_{t+i}] + m_7 \qquad (5)$$

en donde

$$\begin{aligned} m_0 &= \lambda_1 \\ m_1 &= -(g\lambda_1 / bc) \\ m_2 &= -(\lambda_1 / c) \\ m_3 &= -[(b\lambda_1 + c) / bc] \\ m_4 &= e\lambda_1 / c \\ m_5 &= [(bd + ce)\lambda_1 + be\lambda_1^2] / bc \\ m_6 &= [cd\lambda_1 + (bd + ce)\lambda_1^2 + be\lambda_1^3] / bc \\ m_7 &= a(b + c)\lambda_1 / bc(1 - \lambda_1) \end{aligned}$$

La expresión (5) es la regla de decisión que resulta del presente ejercicio. Constituye un algoritmo para calcular —en cualquier momento— el nivel del salario medio óptimo ($W_t$) en términos de el valor pasado de dicha variable ($W_{t-1}$), de los valores deseados de las variables objetivo e instrumento ($S^*$ y $W^*$), de valores conocidos de la variable exógena ($U_{t-2}$ y $U_{t-1}$) y de valores previstos para dicha variable ($\hat{U}$).

En principio se podría calcular una trayectoria entera de valores para W, resolviendo iterativamente la expresión (5). Sin embargo, dada la presencia de variables previstas en la regla, es más eficiente calcular W sólo para un primer período. Es decir, el cálculo de W para el primer período se hace de acuerdo con el pronóstico para niveles futuros de U disponibles en dicho momento; el cálculo para el segundo período se hace al cabo de un año,[7] incorporando en la expresión toda la información que se ha ganado durante el intervalo. De esta forma, no sólo se mantienen las propiedades óptimas, sino que además la regla de decisión se hace más precisa a partir de la modificación sucesiva de la serie prevista para la variable exógena.

A pesar de la simplicidad del modelo inicial, la forma en que los parámetros estructurales entran en la regla de decisión es bastante compleja. Ello dificulta el análisis cualitativo de la expresión en cuestión y por tal razón en la cuarta sección sus propiedades son investigadas con la ayuda de simulaciones numéricas. Es interesante, sin embargo, mencionar algunas de sus características más importantes.

Como resulta claro de la presencia de los términos sumatorios, la

7. Un año, o la dimensión correspondiente al período que se utilice.

regla toma en cuenta todos los valores futuros de los niveles deseados de oferta y salarios, así como los valores previstos de la variable desempleo. Este hecho, especialmente por lo que respecta a la variable prevista, podría parecer un inconveniente considerable en orden a diseñar una regla operativa. El problema, sin embargo, es menor de lo que parece. Cada uno de los términos en corchetes es una media geométrica ponderada de una serie infinita. Dado que, por definición, $\lambda_1$ es menor que la unidad en términos absolutos, es de esperar que sólo un número muy reducido de valores en cada sumatorio tengan una influencia significativa en la determinación del salario óptimo. En particular, cuanto menor sea $\lambda_1$ (en términos absolutos), menor será la influencia de valores futuros deseados o previstos de las variables correspondientes. Es interesante, al respecto de esta cuestión, señalar que $\lambda_1$ depende del valor del parámetro h y que h, dada una determinada función de oferta, depende de la ponderación g. Cuanto mayor sea el valor de g, mayor será h y, consecuentemente, menor será el valor absoluto de $\lambda_1$. En otras palabras, cuanto más la autoridad económica quiera ajustarse a un determinado presupuesto, menor será la importancia del futuro. En el caso extremo en que la autoridad económica quisiera seguir exactamente el presupuesto planificado, $\lambda_1$ tomaría el valor cero y la expresión (5) dejaría de existir. De hecho, si este fuera el caso, sería superfluo hablar de un problema de optimización, dado que desde el principio la autoridad económica habría suministrado la solución.

Dado que, excepto a, todos los parámetros del sistema son positivos, el valor algebraico de $\lambda_1$ será negativo, abriendo pues la posibilidad de oscilaciones en la trayectoria del salario óptimo. El signo negativo de $\lambda_1$ hace que $m_1$ sea positivo; por tanto, un incremento uniforme de la serie deseada de salarios incrementará, *ceteris paribus,* el nivel de la serie de salarios óptimos. El efecto de la serie deseada de oferta es algo más complicado. Un incremento uniforme de la serie deseada de oferta incrementará, *ceteris paribus,* el nivel de la serie óptima de salarios a través de la influencia del tercer término en la expresión (5), dado que $m_2$ es positivo. Podría, sin embargo, reducir el nivel de la serie óptima a través de la influencia de valores subsiguientes de $S^*$, si $m_3$ es positivo.[8] Incrementos en $U_{t-2}$ reducirán el salario óptimo, dado que $m_4$ siempre es negativo. Los coeficientes $m_5$ y $m_6$ serán normalmente negativos, con lo cual el efecto de un incremento en $U_{t-1}$ y en los niveles previstos de desempleo será una disminución del nivel óptimo del salario medio.

8. Nótese que, como $\lambda^1$ negativo y con una serie constante o creciente de $S^*$, el segundo término sumatorio de la expresión (5) será siempre negativo.

## 4. SIMULACIONES NUMERICAS

Dado que se poseen estimaciones numéricas de los parámetros de la función de oferta (2) para el mercado laboral de profesores de enseñanza media en Inglaterra y Gales, es interesante investigar las propiedades de la regla con base a ejemplos numéricos. Los parámetros estimados (todos estadísticamente significativos) son

$$\begin{aligned}\hat{a} &= -0.3728\\ \hat{b} &= 0.2187\\ \hat{c} &= 0.1278\\ \hat{d} &= 1.4509\\ \hat{e} &= 1.6754\end{aligned}$$

Si, por ejemplo, penalizamos las desviaciones absolutas del nivel deseado de salarios en la misma medida que las desviaciones del nivel deseado de oferta ($g = 1$), la regla que resulta es

$$\begin{aligned}W_t = &-0.0263\, W_{t-1} + 0.9404 \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-0.0263)^i\, W_{t+i}\right] + 0.2057\, S_t^*\\ &-3.4261 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (-0.0263)^i\, S_{t+i}^*\right] - 0.3446\, U_{t-2} - 0.4907\, U_{t-1}\\ &-0.1614 \left[ \sum_{i=0}^{\infty} (-0.0263)^i\, \hat{U}_{t+i}\right] + 0.1184 \qquad (6)\end{aligned}$$

El signo negativo de todos los términos que, junto con $W_t$, determinan el estado actual de la oferta ($W_{t-1}$, $U_{t-2}$ y $U_{t-1}$), es fácilmente justificable. Cuando el nivel actual de la oferta es alto, el nivel del salario óptimo no tiene porque elevarlo todavía más, y viceversa. Como era de esperar, el coeficiente del sumatorio de la serie deseada de salarios es positivo. Los coeficientes correspondientes al nivel deseado de oferta tienen signo positivo para $S_t^*$ y signo negativo para el sumatorio, indicando que incrementos en la serie $S^*$ aumentarán, *ceteris paribus*, el nivel de lsalario óptimo en el período t.[9] También, de acuerdo con la discusión previa, el coeficiente del sumatorio para la serie prevista de desempleo es negativo, indicando la relación inversa señalada anteriormente.

Aunque la expresión (5) es una regla de decisión para el primer período (en el sentido de que su utilización más eficiente se consigue cuando en cada período se incorpora toda la información disponible en la pre-

9. Recuérdese que el valor del segundo sumatorio de la expresión (5) es negativo.

dicción de la variable no controlable), es interesante, en orden a investigar sus propiedades básicas, aplicarla para un determinado período de años bajo distintos supuestos acerca de las series deseadas ($S^*$ y $W^*$) y de la serie prevista (U). La combinación de supuestos es innumerable; nos restringiremos a tres cuestiones principales. Primero, investigaremos el efecto de la ponderación en la función criterio; segundo, examinaremos la operatividad de la regla bajo supuestos alternativos acerca de la serie prevista de desempleo; finalmente, consideraremos con más detalle las propiedades dinámicas de la regla, estudiando la reacción inducida por una alteración aislada en la serie prevista de desempleo.

### 4.1. *Objetivos financieros versus objetivos educativos*

Las más de las veces, el planificador deberá enfrentarse a un dilema perfectamente definido: el logro de un determinado objetivo de oferta podrá conseguirse sólo a costa de un aumento sustancial en el presupuesto educativo; por otra parte, una política de ortodoxia financiera podrá resultar en desviaciones de los objetivos educativos potencialmente peligrosas desde un punto de vista social.

Podría aducirse que tal dilema sólo se presenta en aquellos casos en que el plan no es realista. Es decir, por ejemplo, cuando un plan educativo muy ambicioso se halla respaldado por una base financiera muy débil. Este, sin embargo, no es el problema. Incluso para un plan realísticamente formulado, la existencia de factores no controlables puede introducir alteraciones no previstas. En tal caso, no se trata tanto de juzgar si las expectativas del planificador eran o no razonables, como de evaluar su capacidad (y disposición) para reaccionar ante las nuevas circunstancias. En otros términos, dados nuestros dos objetivos básicos, la cuestión reside en la decisión de asignar las consecuencias de alteraciones imprevistas a un objetivo específico en orden a beneficiar al otro. La medida en que la regla reaccione de una forma u otra será siempre el resultado de los juicios de valor incorporados en la función C. Es pues importante investigar cómo la operatividad de la regla cambia a consecuencia de cambios en el parámetro g. Antes de entrar en el análisis de los resultados es conveniente elucidar un pequeño problema técnico planteado por dicho parámetro.

En la presente formulación —véase la expresión (1)— g representa la penalización que el planificador impone a las desviaciones *absolutas* de salarios en relación a la penalización impuesta a las desviaciones *absolutas* de oferta. Ahora bien, el criterio a minimizar debería ser formulado en términos de desviaciones relativas; de otra forma, diferencias en las unidades de medida podrían distorsionar la ponderación asignada a cada uno de los dos objetivos. Para resolver el problema necesitamos redefinir el parámetro g. La función criterio (1) puede ser reformulada en la siguiente forma

$$S = \sum_{t=1}^{N} \left[ \overline{S^*}^2 \left( \frac{S_t - S_t^*}{S^*} \right)^2 + \overline{W^*}^2 g \left( \frac{W_t - W_t^*}{W^*} \right)^2 \right] \tag{7}$$

en donde $\overline{S^*}$ y $\overline{W^*}$ son las medias de las series $S_t^*$ y $W_t^*$. Al hacer esto, estandarizamos las desviaciones absolutas con respecto a sus unidades respectivas y modificamos, por tanto, las ponderaciones de la función. Es fácil notar que si fijáramos $g = 1$, aunque las desviaciones absolutas resultarían igualmente penalizadas, las relativas soportarían penalizaciones en proporción directa a las unidades de cada una de las variables. En términos de nuestros datos, si $g = 1$, las desviaciones relativas de salarios soportarían una penalización efectiva veinte veces mayor que las desviaciones relativas de oferta. Una penalización igual de ambas desviaciones relativas requiere

$$\overline{S^*}^2 = \overline{W^*}^2 g$$

o

$$g = (\overline{S^*} / \overline{W^*})^2$$

En general pues, podemos redefinir el parámetro g, de la siguiente forma

$$g = g' (\overline{S^*} / \overline{W^*})^2 \tag{8}$$

en donde g' es el parámetro que indica la ponderación impuesta a las desviaciones *proporcionales* de salarios en relación a las ponderaciones impuestas a las desviaciones *proporcionales* de oferta.

Para analizar los efectos de g (o de g') utilizaremos supuestos muy simples acerca de las variables deseadas y previstas, y observaremos las distintas trayectorias geenradas por la expresión (5). En orden a utilizar datos reales, supondremos que el año inicial es 1971 y que el plan se extiende durante una década. El objetivo consiste en obtener para 1981 un incremento del 50 por ciento en el nivel de la oferta, distribuido en incrementos anuales constantes. La autoridad económica está dispuesta a aceptar un incremento anual del 1 por ciento en salarios relativos hasta 1981. Se supone que el nivel de desempleo permanece constante durante la década y, finalmente, que después de 1981 los nive-

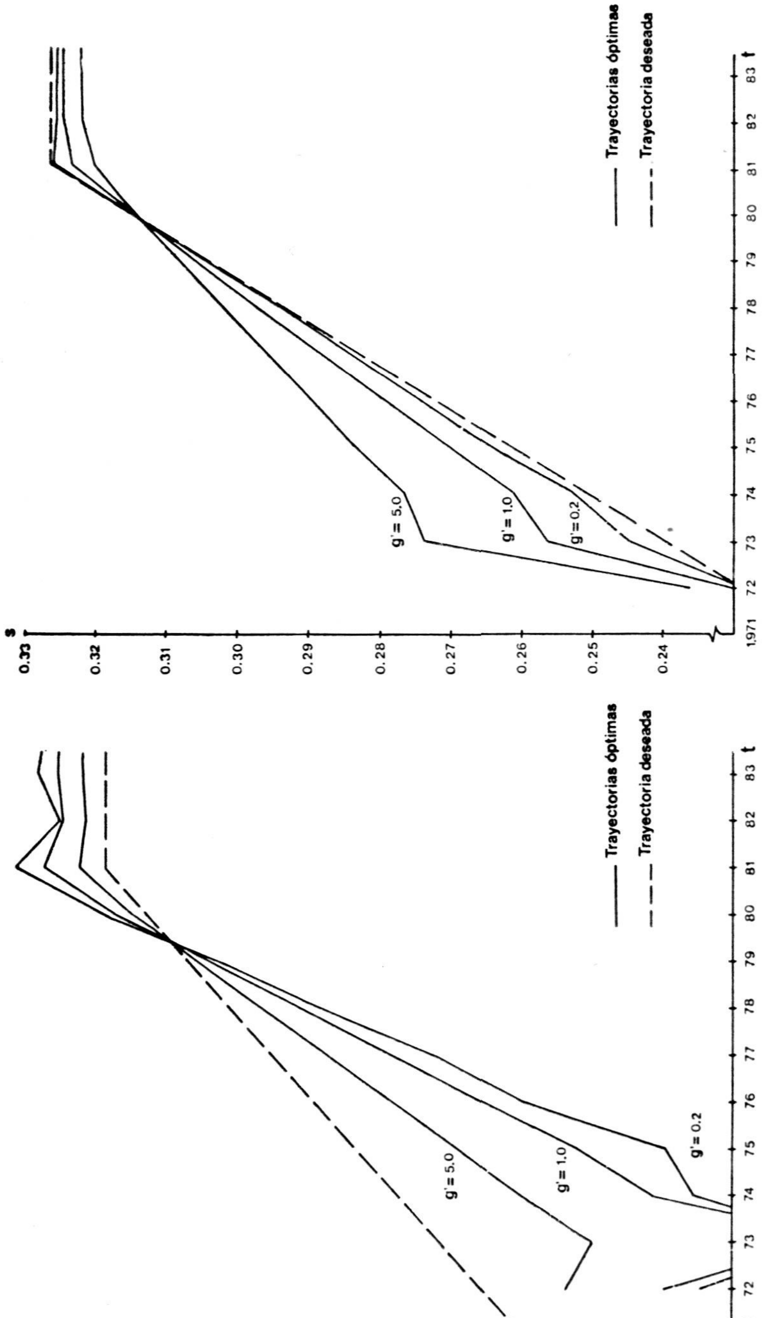


FIG. 1: TRAYECTORIAS OPTIMAS DE SALARIOS Y OFERTA (INFLUENCIA DE g')
Incremento de S*: 50 %. Incremento de W*: 10 %. Incremento de U: 0 %
A. Trayectorias de salarios
B. Trayectorias de oferta

les de las variables deseadas y previstas se estabilizan en los valores alcanzados en dicho año.

La figura 1 [10] presenta las trayectorias para oferta y salarios generadas por la regla de decisión bajo tres supuestos alternativos acerca del parámetro g. El primer supuesto es $g' = 1$. Como puede verse en la parte A de la figura, el salario óptimo disminuye después del primer período (hasta 1.10) y luego aumenta monotónicamente hasta 1981. Las características principales de la trayectoria óptima son su comportamiento oscilatorio al principio y al final del período, y su casi constante aumento en el intervalo. El tramo de aumento constante es debido al supuesto de que tanto la serie deseada de oferta como la de salarios crecen también a un ritmo constante y a que no existe ninguna otra distorsión exógena (recuérdese que el nivel previsto de desempleo se supone constante). Las dos porciones oscilatorias, por otra parte, presentan el comportamiento óptimo del nivel de salarios en respuesta a dos tipos de alteraciones. En el primer caso, el repentino descenso del salario medio en 1973 compensa el efecto sobre la oferta del sustancial aumento en el nivel de desempleo en 1971 (un aumento del 45 por ciento de 1970 a 1971).[11] Por medio del descenso del salario medio, y a pesar del supuesto crecimiento de la trayectoria deseada, la regla controla el sistema procurando que la oferta se desvíe de su trayectoria deseada menos de lo que lo hubiera hecho en ausencia de esta acción compensadora. La segunda porción oscilatoria refleja la respuesta óptima del nivel de salarios a la estabilización del sistema a un determinado nivel deseado; después del crecimiento casi constante, la trayectoria óptima desacelera el aumento en 1980 (un año antes que la trayectoria deseada) y se aproxima a su posición de equilibrio por medio de oscilaciones rápidamente amortiguadas. Tal posición la alcanza en 1986 al nivel 1.3102; sólo un 1.06 por ciento por encima de la trayectoria deseada.

La correspondiente trayectoria para la oferta se muestra en la parte B de la misma figura. El rápido incremento en la oferta de 1972 a 1973, que resulta del aumento previo en el nivel de desempleo, es controlado en 1974 a consecuencia del repentino descenso del salario óptimo en 1973. De ahí en adelante la trayectoria óptima se acerca a la trayectoria deseada a un ritmo menor de crecimiento. En 1980 cruza la trayectoria deseada y alcanza el equilibrio en 1986 al nivel 0.3245 después de oscilaciones muy pequeñas; se estabiliza a sólo un 0.03 por ciento por debajo de la trayectoria deseada.

En general, las características acabadas de señalar se mantienen

10. Los valores numéricos en los que esta figura se basa pueden encontrarse en el apéndice, Cuadro 1.

11. El nivel de desempleo en 1970 era igual a 0,0536. Dicho nivel, aunque no indicado en el Cuadro 1, es tomado en cuenta por la regla para la determinación del salario óptimo en 1972 como puede comprobarse por la presencia de $U_{t-2}$ en la expresión (5).

cuando el valor de g' cambia. Como era de esperar, sin embargo, cuando las desviaciones del nivel de salarios son más severamente penalizadas que las desviaciones del nivel de oferta, la trayectoria óptima de salarios se aproxima mucho más a la trayectoria deseada que cuando la penalización es la misma para ambas desviaciones. De forma contraria, si el énfasis se pone en la oferta, la trayectoria de salarios se desvía de la trayectoria deseada lo necesario para que los niveles deseados de oferta se puedan obtener. Por razones de simetría, la figura 1 presenta las trayectorias generadas cuando g' = 5.0 y cuando g' = 0.2. Es decir, cuando, respectivamente, la penalización a las desviaciones de salarios es cinco veces mayor que la penalización a las desviaciones de oferta, y cuando la penalización a las desviaciones de oferta es cinco veces mayor que la penalización a las desviaciones de salarios.[12] Los resultados son obvios y no necesitan comentario adicional.

Aunque este primer ejemplo muestra claramente los rasgos básicos la regla de decisión, no permite apreciar de forma aislada las consecuencias resultantes de adherirse rígidamente a un plan financiero inadecuado. Dado el alto nivel de desempleo que se ha supuesto, dada su constancia durante todo el período y dado el incremento en salarios permitido, la trayectoria óptima de salarios no ha de desviarse mucho de la deseada en orden a obtener los objetivos planificados.

El ejemplo considerado en la figura 2[13] trata de mostrar estos efectos de forma más dramática; para ello suponemos que el nivel deseado de salarios es constante durante todo el período. En tal caso, la oferta deseada sólo puede obtenerse a costa de desviaciones severas del nivel de salarios. Incluso cuando la ponderación de ambos objetivos es la misma (g' = 1.0), los salarios óptimos deben crecer considerablemente para tratar de obtener niveles de oferta cercanos a los deseados. Cambios en g' producen efectos similares a los analizados previamente. Es interesante observar que cuando la ponderación mayor se pone en la oferta, y dado que la trayectoria deseada de la oferta no ha cambiado, la trayectoria óptima de salarios es muy similar a la obtenida anteriormente. Ello era de esperar, ya que cuando g' = 0.2 el criterio principal para determinar salarios es casi el mismo que en el caso anterior. De hecho, si la penalización de las desviaciones de la oferta se aumentara suficientemente, la trayectoria de salarios resultante sería prácticamente la misma, independientemente de los niveles deseados de salarios. Si tal fuera el caso, el presupuesto previsto importaría poco para la obtención del nivel deseado de oferta.

Podemos pues concluir que la efectividad de la regla dependerá

12. La elección de estos valores, aparte de las razones de simetría aducidas, es completamente arbitraria. La expresión (5) acepta prácticamente cualquier elección de ponderaciones; en otras palabras, una trayectoria óptima puede aproximarse a la deseada tan cercanamente como se quiera.

13. Véase el apéndice, Cuadro 2, para los valores numéricos en los que la figura está basada.

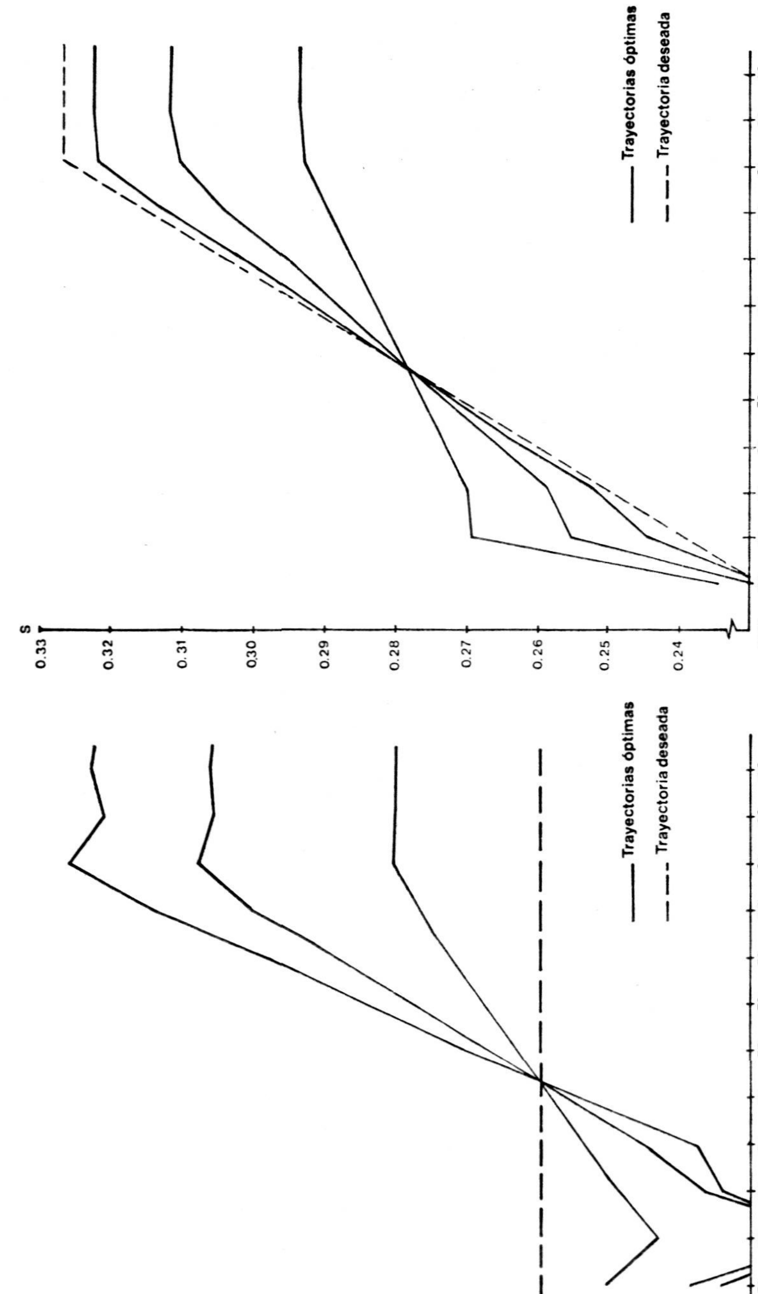


FIG. 2: TRAYECTORIAS OPTIMAS DE SALARIOS Y OFERTA (INFLUENCIA DE g')
Incremento de S*: 50 %. Incremento de W*: 10 %. Incremento de U: 0 %
A. Trayectorias de salarios
B. Trayectorias de oferta

crucialmente de las prioridades especificadas en la función criterio. Si el nivel de salarios constituye la mayor preocupación, la regla indicará el mejor plan dadas las limitaciones financieras existentes; si la obtención de la oferta es el objetivo principal, la regla indicará la forma más económica de obtener tal objetivo.

## 4.2. *Expectativas acerca del nivel de desempleo*

Cuanto mejor sean las predicciones acerca del nivel futuro de desempleo, mayor será la efectividad de la regla de decisión. Ello no quiere decir que la regla se haga inoperante con predicciones pobres; la respuesta indicada será siempre útil en tanto que muestra la reacción óptima a, por lo menos, cambios previos del nivel de desempleo. Como hemos visto en los dos ejemplos previos, todas las trayectorias generadas toman en cuenta el gran incremento en el nivel de desempleo entre 1970 y 1971. Ahora bien, si se puede disponer de predicciones acertadas, la regla operará eficientemente no sólo en lo que respecta a su respuesta al estado previo del sistema, sino también en lo que respecta a su evolución futura. Esta es la razón principal que nos induce a recomendar la expresión (5) como una regla para aplicar de período en período, más que para generar de una vez toda una serie de salarios óptimos con base a una predicción a largo plazo del nivel de desempleo. Dada la estructura dinámica de la función de oferta aquí utilizada, el valor de $\lambda$ es pequeño y por tanto sólo unos cuantos valores futuros importan en la determinación del salario óptimo. En tales circunstancias, a base de incorporar toda la información disponible, predicciones a corto plazo pueden mejorarse constantemente a lo largo del período de planificación. Además, dado el carácter oscilatorio de esta variable, es difícil realizar proyecciones precisas más allá de unos pocos períodos.

A pesar de ello, es interesante ver cómo la regla opera bajo varios supuestos concernientes a la evolución a largo plazo de la variable desempleo. El tercer ejemplo a presentar considera las trayectorias generadas por la expresión (5), cuando además de los supuestos hechos en el ejemplo previo suponemos dos trayectorias previstas para el nivel de desempleo; una que aumenta constantemente al ritmo anual del 5 por ciento hasta 1981, y otra que disminuye constantemente al ritmo anual del 5 por ciento hasta 1981. En ambos casos, las desviaciones proporcionales de salarios se penalizan en la misma medida que las desviaciones proporcionales de oferta.

Como puede verse en la figura 3,[14] cuando se prevee un descenso

14. Véase el apéndice, Cuadro 3, para los valores numéricos correspondientes.

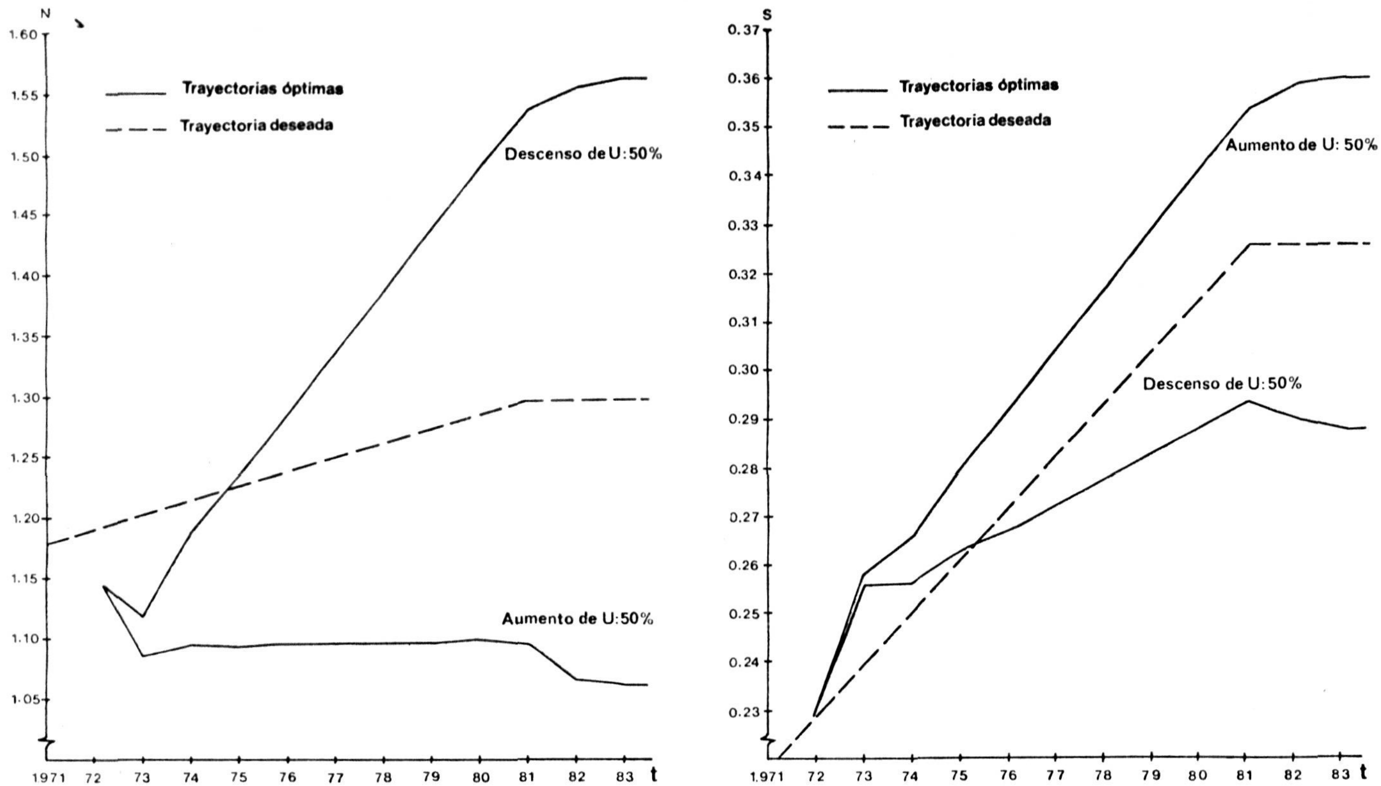


FIG. 3: TRAYECTORIAS OPTIMAS DE SALARIOS Y OFERTA (INFLUENCIA DE U)
Incremento de S*: 50 %. Incremento de W*: 10 %. Parámetro **g'** = 1.0
A. Trayectorias de salarios
B. Trayectorias de oferta

del 50 por ciento en el nivel de desempleo entre 1971 y 1981, el incremento planificado del 10 por ciento para salarios no es suficiente para obtener un aumento del 50 por ciento en la oferta. La trayectoria óptima de salarios, a pesar de la penalización idéntica con la que trabajamos en este ejemplo, aumenta mucho más rápidamente que la trayectoria deseada, alcanzando el equilibrio a un nivel del 20 por ciento por encima del salario máximo deseado. Este incremento considerable en salarios, sin embargo, no es suficiente para llevar la oferta a sus niveles deseados; el nivel de la oferta, aunque aumenta durante casi todo el período, se queda a un nivel del 12 por ciento por debajo de la cuota deseada. Es curioso observar que a pesar de los nuevos supuestos, las trayectorias siguen acusando la influencia del aumento en el nivel de desempleo durante los dos primeros años: la trayectoria de salarios decrece entre 1972 y 1973, y la de oferta muestra el ritmo más alto de crecimiento entre estos dos años. Esta característica, sin embargo, se halla menos acentuada que en los ejemplos previos, ya que el descenso previsto para el nivel de desempleo compensa en cierta medida el efecto de su aumento previo. Una última característica a resaltar es el comportamiento de la trayectoria de la oferta en los dos últimos años del período. Como puede apreciarse en la parte B de la figura, la oferta disminuye entre 1981 y 1983 a pesar de la gran desviación existente entre las trayectorias óptima y deseada. La explicación de este comportamiento reside en los supuestos incorporados en las trayectorias deseadas. Ambas detienen su crecimiento en 1981 y ello fuerza una desaceleración en el ritmo de crecimiento de salarios, para que la desviación entre sus trayectorias óptima y deseada no se agrande todavía más. Consecuentemente, dado que el nivel de desempleo afecta a la oferta con un retraso mayor que el de los salarios, la desaceleración de salarios coincide con el efecto negativo del nivel de desempleo y ello origina el descenso acusado por la trayectoria de la oferta.

Bajo el supuesto de un nivel decreciente de desempleo, el nivel de salarios actúa como una inyección extra en el sistema, que evita el descenso de la oferta a niveles demasiado bajos. De forma correspondiente, bajo el supuesto de un nivel creciente de desempleo, el nivel de salarios actúa como una pérdida extra en el sistema, que fuerza el nivel de la oferta hacia abajo. La figura 3 muestra también este caso. La trayectoria de salarios, aunque desciende en el primer período, debido principalmente al incremento en 1971 del nivel de desempleo, se mantiene luego a un nivel más o menos constante hasta 1981. Uno podría esperar que en orden a disminuir la oferta cuando el desempleo aumenta, la respuesta óptima debería ser un descenso en los salarios; esta reacción, sin embargo, aunque ciertamente acercaría la trayectoria de la oferta a su nivel óptimo, también aumentaría la desviación entre las trayectorias deseada y óptima del nivel de salarios. El nivel constante de la trayectoria óptima de salarios es el resultado del compromiso del planificador de no dejar que las desviaciones proporcionales de salario sean mayores que las desviaciones proporcionales de la oferta.

### 4.3. *La estructura dinámica de la respuesta óptima del nivel de salarios*

Es difícil que en la práctica el nivel de desempleo se comporte en la forma uniforme que hemos supuesto en los ejemplos previos. Incluso en términos de pronósticos, es de esperar que las series previstas de desempleo, por lo menos en los primeros períodos, suministren más detalle que la simple tendencia de la variable. Si éste es el caso, los ejemplos numéricos considerados previamente no muestran de forma adecuada todo el potencial de la regla de decisión.

La regla de decisión no está solamente diseñada para generar una trayectoria de salarios que obtenga ciertos objetivos de oferta. Su propósito principal es ejecutar esta tarea de la forma más eficiente; esto es, minimizando las desviaciones de oferta y salarios de sus niveles deseados. Este aspecto es particularmente importante cuando, como en el caso que consideramos aquí, el sistema se halla sujeto a fluctuaciones incontrolables de alguna variable. En tales circunstancias la función de la regla de decisión no es solamente llevar el sistema a un objetivo determinado, sino también procurar que tal objetivo sea alcanzado siguiendo una trayectoria lo más estable posible. En otras palabras: la función estratégica de alcanzar un objetivo en un plazo determinado se complementa con la función táctica de estabilizar el sistema durante el proceso hacia el estado deseado.

Un ejemplo ideal para mostrar este segundo aspecto de la operatividad de la regla consistiría en introducir una serie estocástica de cambios en el nivel de desempleo, y en comparar las trayectorias generadas por la regla de decisión con las trayectorias que el sistema seguiría en la ausencia de cualquier intervención. En el presente ejemplo procedemos en dicha dirección, pero en lugar de considerar una serie entera de cambios estocásticos en el nivel de desempleo, estudiamos solamente el efecto de un cambio aislado en dicha variable.

En el presente ejercicio suponemos que el sistema se halla en equilibrio dinámico; es decir, dado el nivel actual de desempleo, un nivel constante de salarios mantiene la oferta a un nivel constante que coincide con el nivel deseado. En dichas circunstancias, el nivel de desempleo acusa un incremento repentino en un año determinado, volviendo a su nivel inicial en el año siguiente. Para mostrar el proceso de ajuste de forma más dramática, se supone que el incremento en el nivel de desempleo es del 90 por ciento. Finalmente, seguimos suponiendo que la penalización para los dos tipos de desviaciones es la misma (g' = 1.0).

La figura 4[15] muestra las trayectorias seguidas por los niveels de desempleo, salarios y oferta. En la parte A el nivel de desempleo sigue una trayectoria constante hasta el período 8, aumenta un 90 por ciento en el período 9 y retorna a su nivel anterior en el 10, manteniendo subsiguientemente dicho nivel.

Si la regla de decisión no entrara en operación, el sistema seguiría las trayectorias de trazado discontinuo dibujadas en las partes B y C de la figura. El salario medio mantendría su nivel constante, indicando así la ausencia de respuesta al incremento en desempleo. La oferta permanecería constante hasta el período 9; en el período 10, el primer efecto del cambio en el desempleo aparecería, incrementando la oferta hasta el nivel 0.4221; en el período 11, $U_9$ mostraría su efecto mayor, elevando la oferta a 0.4378; la trayectoria volvería finalmente a la posición de equilibrio en el período 12. Este ajuste dinámico es fácilmente explicable con referencia a la curva de oferta estimada. El cambio de un período en el nivel de desempleo implica un cambio de dos períodos en el nivel de oferta debido a la presencia de $U_{t-1}$ y $U_{t-2}$ en la ecuación; el efecto mayor aparece dos períodos después del cambio original debido a que el coeficiente de $U_{t-2}$ es mayor que el de $U_{t-1}$, y el retraso medio con el que la oferta responde es de 1.54 períodos.

Cuando la regla entra en operación, el salario sigue la trayectoria de trazado continuo en la parte B de la figura. Como puede verse, la trayectoria se desvía de su posición de equilibrio, y luego vuelve a ella, no de forma monotónica sino siguiendo movimientos oscilatorios. Aunque empieza a oscilar en el período 2,[16] la primera desviación significativa no ocurre hasta el período 8 (un período antes que el cambio en el nivel de desempleo); en dicho período, el salario crece un 0.9 por ciento. En el período 9, el salario decrece y se sitúa por debajo de la posición de equilibrio a un 3.9 por ciento. Es interesante notar que aunque en el período 9 el nivel de desempleo todavía no ha afectado a la oferta, el salario óptimo empieza a bajar. La justificación de este comportamiento hay que buscarla en la estructura dinámica del modelo: el salario afecta a la oferta no sólo en el período corriente sino también en el subsiguiente. Bajando el salario en el período 9, la regla se asegura de que cuando el efecto del cambio en el nivel de desempleo se empiece a notar (período 10), no sólo $W_{10}$ sino también $W_9$ actuarán de forma compensadora. En el período 10 el salario disminuye todavía más, de forma que cuando el efecto del desempleo sobre la oferta empiece a

15. Véase el apéndice, Cuadro 4, para los correspondientes valores numéricos.
16. Recuérdese que la regla toma en cuenta los valores futuros de desempleo, y que se supone que el incremento en el período 9 es perfectamente anticipado.

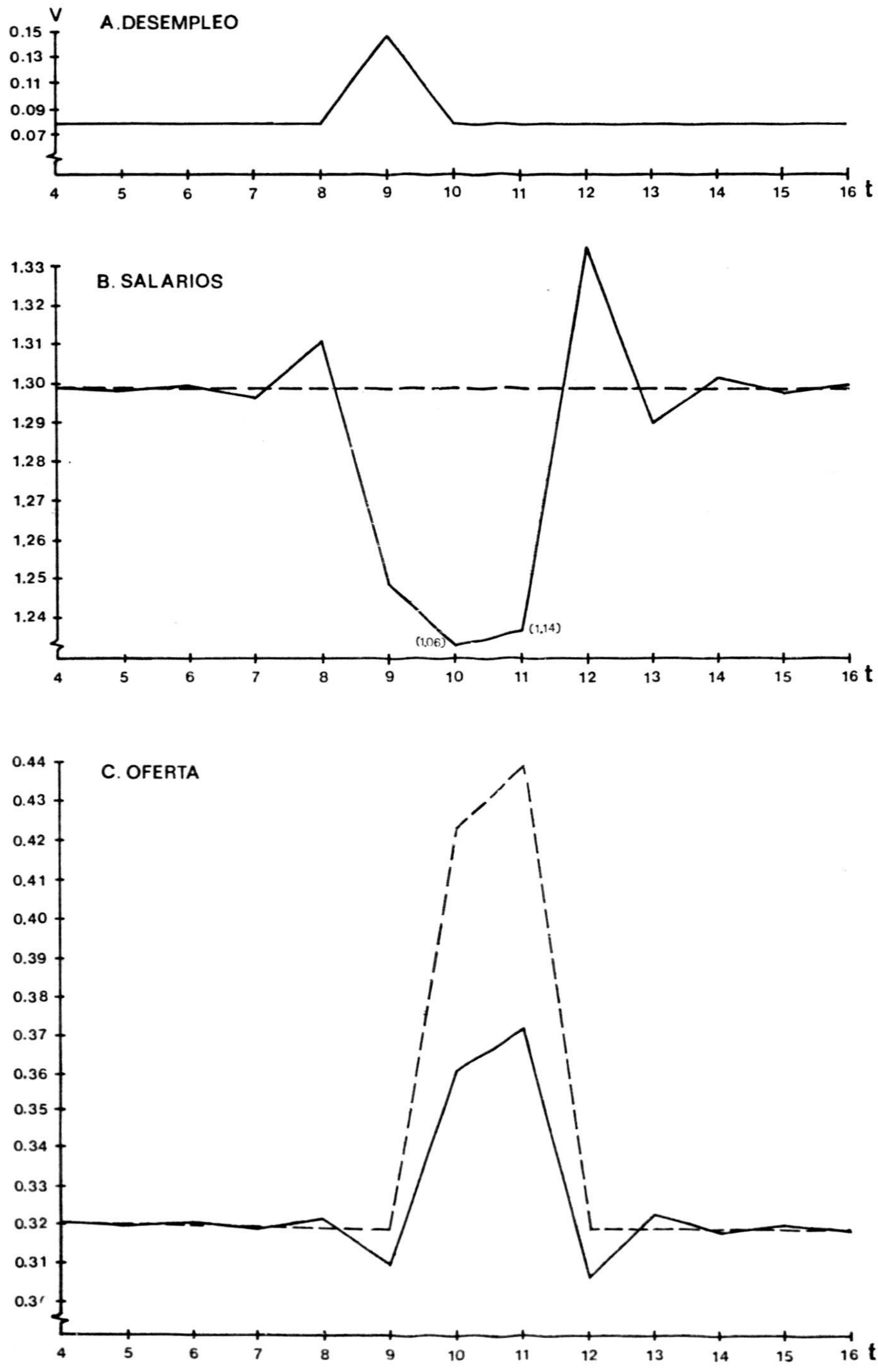


FIG. 4: RESPUESTA OPTIMA A UN INCREMENTO AISLADO EN EL NIVEL DE DESEMPLEO

trayectoria sin respuesta

trayectoria con respuesta óptima (g' = 1.0) afectar a la oferta, el salario corriente ($W_{10}$) sea la fuerza compensadora principal. En el período 11, a pesar de que el efecto del desempleo es todavía mayor que en el período 10, el salario óptimo empieza a crecer. Una vez más la explicación reside en la estructura dinámica del modelo: $W_{11}$ afectará no sólo $S_{11}$ sino también $S_{12}$; si $W_{11}$ hubiera continuado disminuyendo, $S_{11}$ alcanzaría probablemente un nivel menor que con la respuesta en cuestión, ahora bien el nivel de $S_{12}$ se vería deprimido por salarios muy bajos en un momento en que la influencia de la alteración original ya no tiene ninguna fuerza. Por las mismas razones, $W_{12}$ aumenta a un nivel de 2.8 por ciento por encima del de equilibrio, para que el efecto de $W_{11}$ se vea compensado en cierta medida cuando la influencia del nivel de desempleo ya haya desaparecido. De esta forma, y siguiendo una trayectoria oscilatoria, el salario recobra su nivel de equilibrio en el período 19.

La parte C de la figura muestra el efecto de todos estos cambios Wen la trayectoria de la oferta y cómo dicha trayectoria difiere de la que la oferta hubiera seguido en ausencia de la regla de decisión. En el período 9, antes de que el cambio en desempleo se haga efectivo, la oferta disminuye a un nivel inferior al de equilibrio en un 3 por ciento. Cuando el aumento del desempleo se hace efectivo, la oferta sólo aumenta un 12.5 por ciento, un aumento que es 19.2 por ciento más pequeño que el que la oferta hubiera experimentado sin el control óptimo. Esta diferencia es todavía más acusada en el período 11; mientras el nivel de no respuesta es un 36.6 por ciento mayor que el de equilibrio, la oferta óptima sólo alcanza un nivel del 15.9 por ciento por encima del de equilibrio.

La parte C de la figura da una idea gráfica de las propiedades estabilizadoras de la regla. Las características aquí señaladas aparecerían también si, en lugar de un incremento, hubiéramos supuesto una disminución en el nivel de desempleo. Obtendríamos también resultados similares si, en lugar de en una trayectoria de equilibrio constante, hubiéramos introducido la alteración en una trayectoria de equilibrio creciente o decreciente.

Una disminución en g', indicativa de una mayor preferencia por estabilidad en la trayectoria de la oferta, habría acentuado el comportamiento oscilatorio del sistema. Las oscilaciones aparecerían antes y su magnitud sería mayor. De esta forma la oferta óptima comenzaría a absorber la alteración mucho antes y mostraría en término medio desviaciones menores que las observadas en la figura 4. Parece razonable concluir que, en general, el sistema es altamente estable y que las oscilaciones son amortiguadas rápidamente.

## 5. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El propósito de este trabajo ha sido la derivación de una regla lineal de decisión para el control de un modelo dinámico uniecuacional. Siempre y cuando el modelo estructural pueda ser estimado, las preferencias relativas con respecto a los objetivos puedan hacerse explícitas, y los objetivos puedan formularse para un horizonte temporal determinado, la técnica desarrollada en este artículo ofrece un método con la ayuda del cual el planificador puede tomar decisiones temporales consistentes con respecto a los objetivos en cuestión.

El análisis, aunque aplicable a otros contextos y generalizable a modelos multiecuacionales, se ha planteado en términos del control de una función de oferta en un mercado laboral. Bajo el supuesto de que la oferta responde al salario relativo y al nivel de desempleo en mercados relacionados, el trabajo desarrolla un algoritmo para la determinación óptima de salarios. Los salarios determinados de acuerdo con dicho algoritmo son óptimos en el sentido de minimizar las desviaciones de oferta y salarios de sus niveles deseados.

La regla de decisión incorpora en la determinación óptima de salarios, el estado actual de la oferta, los valores deseados de la variable instrumental y de la variable objetivo, y los valores futuros previstos de la variable exógena. Ahora bien, dada la estructura dinámica del sistema, es fácil comprobar que, de los valores futuros, sólo unos pocos importan en la formulación de decisiones presentes. En particular, cuanto mayor sea el interés del planificador en no violar las restricciones presupuestarias, menor será la importancia del futuro. Contrariamente, cuanto mayor sea el interés del planificador en obtener los objetivos fijados para la oferta, mayor será también la importancia del futuro.

Dada la estructura de retrasos con que la variable instrumental afecta al objetivo, la regla de decisión muestra que, en orden a obtener un determinado objetivo para la oferta, el salario óptimo puede tomar una trayectoria oscilatoria aún y cuando la trayectoria deseada para la oferta sea monotónica. De hecho, después de una alteración, el sistema siempre recobra su equilibrio de forma oscilatoria. Bajo supuestos normales acerca de las preferencias relativas por uno u otro objetivo, el sistema muestra una gran estabilidad con oscilaciones fuertemente amortiguadas.

*Escuela de Economía*
*Universidad de Londres*

CUADRO 1

*Trayectorias óptimas de salarios y oferta: influencia de g'*

| Año | Incremento 1971-1981 50% | Incremento 1971-1981 10% | Incremento 1971-1981 0% | g'=1.0 | | g'=5.0 | | g'=0.2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | S * | W * | U | W | S | W | S | W | S |
| 1971 | 0.21760** | 1.17893** | 0.07780** | — | — | — | — | — | — |
| 1972 | 0.22848 | 1.19072 | 0.07780 | 1.13942 | 0.23010 | 1.16672 | 0.23607 | 1.12970 | 0.22797 |
| 1973 | 0.23936 | 1.20251 | 0.07780 | 1.09965 | 0.25656 | 1.15930 | 0.27310 | 1.05236 | 0.24498 |
| 1974 | 0.25024 | 1.21430 | 0.07780 | 1.14246 | 0.26085 | 1.17977 | 0.27663 | 1.13109 | 0.25232 |
| 1975 | 0.26112 | 1.22609 | 0.07780 | 1.16362 | 0.27094 | 1.19774 | 0.28317 | 1.13874 | 0.26405 |
| 1976 | 0.27200 | 1.23788 | 0.07780 | 1.19046 | 0.27952 | 1.21593 | 0.28945 | 1.17882 | 0.27379 |
| 1977 | 0.28288 | 1.24967 | 0.07780 | 1.21578 | 0.28848 | 1.23410 | 0.29575 | 1.20396 | 0.28441 |
| 1978 | 0.29376 | 1.26146 | 0.07780 | 1.24160 | 0.29737 | 1.25228 | 0.30204 | 1.23630 | 0.29470 |
| 1979 | 0.30464 | 1.27324 | 0.07780 | 1.26690 | 0.30620 | 1.27043 | 0.30833 | 1.26450 | 0.30500 |
| 1980 | 0.31552 | 1.28503 | 0.07780 | 1.29384 | 0.31532 | 1.28884 | 0.31468 | 1.29646 | 0.31559 |
| 1981 | 0.32640 | 1.29682 | 0.07780 | 1.31461 | 0.32331 | 1.30430 | 0.32041 | 1.32259 | 0.32539 |
| 1982 | 0.32640 | 1.29682 | 0.07780 | 1.30916 | 0.32477 | 1.30291 | 0.32209 | 1.31070 | 0.32613 |
| 1983 | 0.32640 | 1.29682 | 0.07780 | 1.31059 | 0.32439 | 1.30303 | 0.32194 | 1.31611 | 0.32579 |

Notas: * Los valores correspondientes de g son g'=1.0, g=0.04976
g'=5.0, g=0.24879
g'=0.2, g=0.00995

** Valores históricos.

CUADRO 2

*Trayectorias óptimas de salarios y oferta: influencia de g'*

| Año | Incremento 1971-1981 50% | Incremento 1971-1981 10% | Incremento 1971-1981 0% | g'=1.0 | | g'=5.0 | | g'=0.2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | S * | W * | U | W | S | W | S | W | S |
| 1971 | 0.21760** | 1.17893** | 0.07780** | — | — | — | — | — | — |
| 1972 | 0.22848 | 1.17893 | 0.07780 | 1.13717 | 0.22961 | 1.16021 | 0.23465 | 1.12879 | 0.22777 |
| 1973 | 0.23936 | 1.17893 | 0.07780 | 1.09625 | 0.25553 | 1.14607 | 0.26937 | 1.05260 | 0.24491 |
| 1974 | 0.25024 | 1.17893 | 0.07780 | 1.13323 | 0.25839 | 1.15752 | 0.27007 | 1.12806 | 0.25168 |
| 1975 | 0.26112 | 1.17893 | 0.07780 | 1.15087 | 0.26697 | 1.16686 | 0.27357 | 1.13599 | 0.26306 |
| 1976 | 0.27200 | 1.17893 | 0.07780 | 1.17332 | 0.27414 | 1.17637 | 0.27685 | 1.17407 | 0.27240 |
| 1977 | 0.28288 | 1.17893 | 0.07780 | 1.19455 | 0.28165 | 1.18586 | 0.28014 | 1.19852 | 0.28261 |
| 1978 | 0.29376 | 1.17893 | 0.07780 | 1.21619 | 0.28910 | 1.19536 | 0.28343 | 1.22950 | 0.29252 |
| 1979 | 0.30464 | 1.17893 | 0.07780 | 1.23729 | 0.29648 | 1.20483 | 0.28672 | 0.25654 | 0.30239 |
| 1980 | 0.31552 | 1.17893 | 0.07780 | 1.26029 | 0.30420 | 1.21460 | 0.29006 | 1.28767 | 0.31265 |
| 1981 | 0.32640 | 1.17893 | 0.07780 | 1.27571 | 0.31051 | 1.22082 | 0.29267 | 1.31171 | 0.32189 |
| 1982 | 0.32640 | 1.17893 | 0.07780 | 1.27188 | 0.31165 | 1.22031 | 0.29335 | 1.30101 | 0.32262 |
| 1983 | 0.32640 | 1.17893 | 0.07780 | 1.27283 | 0.31137 | 1.22035 | 0.29330 | 1.30577 | 0.32229 |

Notas: * Los valores correspondientes de g son g'=1.0, g=0.04976
g'=5.0, g=0.24879
g'=0.2, g=0.00995

** Valores históricos.

## CUADRO 3

| Año | Incremento 1971-1981 50% | Incremento 1971-1981 10% | Decremento 1971-1981 50% | | | Incremento 1971-1981 50% | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | S * | W * | U | W | S | U | W | S |
| 1971 | 0.21760** | 1.17893** | 0.07780** | — | — | 0.07780** | — | — |
| 1972 | 0.22848 | 1.19072 | 0.07391 | 1.14106 | 0.23046 | 0.08169 | 1.13779 | 0.22974 |
| 1973 | 0.23936 | 1.20251 | 0.07002 | 1.11881 | 0.25532 | 0.08558 | 1.08050 | 0.25781 |
| 1974 | 0.25024 | 1.21430 | 0.06613 | 1.18834 | 0.25552 | 0.08947 | 1.09658 | 0.26617 |
| 1975 | 0.26112 | 1.22609 | 0.06224 | 1.23381 | 0.26219 | 0.09336 | 1.09342 | 0.27969 |
| 1976 | 0.27200 | 1.23788 | 0.05835 | 1.28560 | 0.26716 | 0.09725 | 1.09532 | 0.29187 |
| 1977 | 0.28288 | 1.24967 | 0.05446 | 1.33570 | 0.27258 | 0.10114 | 1.09586 | 0.30439 |
| 1978 | 0.29376 | 1.26146 | 0.05057 | 1.38634 | 0.27789 | 0.10503 | 1.09687 | 0.31684 |
| 1979 | 0.30464 | 1.27324 | 0.04668 | 1.43649 | 0.28317 | 0.10892 | 1.09731 | 0.32923 |
| 1980 | 0.31552 | 1.28503 | 0.04279 | 1.48809 | 0.28870 | 0.11281 | 1.09959 | 0.34194 |
| 1981 | 0.32640 | 1.29682 | 0.03890 | 1.53425 | 0.29323 | 0.11670 | 1.09496 | 0.35338 |
| 1982 | 0.32640 | 1.29682 | 0.03890 | 1.55141 | 0.29072 | 0.11670 | 1.06691 | 0.35882 |
| 1983 | 0.32640 | 1.29682 | 0.03890 | 1.56029 | 0.28833 | 0.11670 | 1.06089 | 0.35044 |

Notas: * Cuando g'=1.0, g=0.04976
** Valores históricos.

CUADRO 4

*Respuesta óptima a un incremento aislado en el nivel de desempleo*
(S* y W* se hallan fijos en sus valores de equilibrio; g' = 1.0)

| Año | S* | W* | U | Respuesta óptima W | Respuesta óptima S | Sin respuesta S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | — | — | 0,32051 |
| 2 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29888 | 0.32051 | 0.32051 |
| 3 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29886 | 0.32051 | 0.32051 |
| 4 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29891 | 0.32052 | 0.32051 |
| 5 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29872 | 0.32048 | 0.32051 |
| 6 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29953 | 0.32063 | 0.32051 |
| 7 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29607 | 0.31998 | 0.32051 |
| 8 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.31075 | 0.32275 | 0.32051 |
| 9 | 0.32051 | 1.29887 | 0.14782 | 1.24854 | 0.31102 | 0.32051 |
| 10 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.04773 | 0.36075 | 0.42210 |
| 11 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.14152 | 0.37132 | 0.43782 |
| 12 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.33599 | 0.30852 | 0.32051 |
| 13 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29012 | 0.32334 | 0.32051 |
| 14 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.30094 | 0.31984 | 0.32051 |
| 15 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29839 | 0.32067 | 0.32051 |
| 16 | 0.32051 | 1.29887 | 0.07780 | 1.29899 | 0.32047 | 0.32051 |

Nota: Cuando g' = 1.0, g = 0.06089.

## BIBLIOGRAFIA


ATHANS, M. y FALB, P.: *Optimal Control - an introduction to the theory and its applications,* McGraw-Hill, Nueva York, 1966.

HOLT, C. C.: «Linear decision rules for economic stabilization and growth.» *Quarterly Journal of Economics,* vol. 76, 1962.

HOLT, C. C.; MODIGLIANI, F.; MUTH, J. F. y SIMON, H. A.: *Planning Production, Inventories and Work Force,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

SENGUPTA, J. K.: «Optimal stabilization policy with a quadratic criterion function.» *Review of Economic Studies,* vol. 37, 1970.

SIMON, H. A.: «Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function.» *Econometrica,* vol. 24, 1956.

VEGARA, J. M.: *Programación Matemática y Cálculo Económico.* Vicens Vives, Barcelona, 1975.

ZABALZA, A.: «An Optimal Wage Policy Rule for the Labour Market of Teachers in England and Wales.» *Operational Research Quarterly,* vol. 28, 1977.