J. S. MARTINEZ VICENTE

Algunas sugerencias acerca de la deducción formal de la demanda de factores productivos.

Lo que aquí se presenta no contiene ninguna novedad teórica. Se trata simplemente de obtener los sistemas teóricos de las ecuaciones de demanda de factores en competencia perfecta y demostrar algunas propiedades teóricas de los mismos.

El interés radica, a mi entender, en que se pone de manifiesto lo fecundo que resulta el tratamiento axiomático de la demanda en la versión de la "Escuela de Rotterdam". Por lo demás, para la redacción de este trabajo han sido unas guias inestimables los trabajos de C. Lluch (1) y de A. Vazquez (2).

El plan de este artículo es el siguiente: en primer lugar, la derivación teórica de una ecuación matricial formalmente semejante a la obtenida en 1964 por Barten (3), en la teoría del consumidor; a continuación la obtención de tres sistemas de ecuaciones de demanda de factores "Tipo Cournot"; en tercer lugar, la obtención de tres sistemas de ecuaciones "Tipo Slutsky"; finalmente la derivación de algunas propiedades adicionales sobre la demanda de factores.

I. Obtención de la ecuación matricial básica de la demanda de factores productivos.

Sea $y = y(x)$ la función de producción empresarial; en donde, y es la cantidad producida; y, $x = [x_1, x_2, \dots x_n]'$ es el vector de las cantidades de factores utilizados.

Sobre los conjuntos de producción se admiten los siguientes axiomas:

1.° Axioma de aditividad: si y^1 e y^2 son posibles, entonces $y^1 + y^2$ es posible.
2.° Axioma de divisibilidad: si y^1 es posible, y α real, entonces αy^1 es posible.
3.° Hipótesis de convexidad: si y^1 e y^2 son posibles, y $0 < \alpha < 1$, entonces, $\alpha y^1 + (1-\alpha) y^2$ es posible; y además, si $y^1 \leqslant y^2$ sucederá que

$$\alpha y^1 + (1-\alpha) y^2 > y^1$$

Estos axiomas sobre los conjuntos de producción se traducen en que la función de producción definida en R_+^n debe ser: continua, monótona creciente, homogénea de algún grado, y tener algún tramo estrictamente concavo.

Denotaremos por $p = [\, p_1, p_2, ..., p_n]'$ el vector de precios de los factores productivos. Por, $y_x = [\, y_1, y_2, ..., y_n\,]'$, o algebraicamente, $y_i = \delta y / \delta x_i$, $(i = 1, 2, ... n)$ se designará el vector de productividades marginales, que de acuerdo con las propiedades de la función de producción ha de ser definido-positivo. Con

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \qquad [1]$$

Se *denotará* la *matriz* de segundas *derivadas*. El *elemento típico* de la *misma* viene dado, algebraicamente, por

$$y_{ij} = \frac{\delta y_i}{\delta x_j} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_i\, \delta x_j} \ ; \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Si llamamos π al precio del producto, el ingreso total es, por definición $I = \pi y$. El coste total es, por definición, $C = p' x$, o algebraicamente,

$$C = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i$$

El beneficio empresarial es, por definición,

$$B = I - C = \pi y - p' x; \text{ obviamente, B es una escalar.}$$

El planteamiento dual del problema de actuación del empresario consiste en suponer que el equilibrio de la producción se alcanza cuando se maximiza el ingreso (I), para un coste $(\bar{C})$ o que se minimiza el coste (C), cuando el ingreso está dado $(\bar{I})$

El segundo caso es por tanto minimizar C, con $I = \bar{I}$.

Es decir, se trata de encontrar el mínimo de $C = p'x$ con la condición $\bar{y} = y(x)$.

Las condiciones de extremo son

$$\frac{\delta\ \emptyset}{\delta\ x_i} = p_i - \lambda y_i = 0, \ (i = 1, 2, ..., n) \ ; \ \frac{\delta\ \emptyset}{\delta\ \lambda} = y\,(x) = 0$$

que implican: $p = \lambda y_x$

Las condiciones de 2.° orden, para que sea mínimo el extremo, son:

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 \cdots\cdots & y_n \\ y_1 & -\lambda y_{11} & -\lambda y_{22} \cdots\cdots \rightarrow & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_k & -\lambda y_{k1} & -\lambda y_{k2} \cdots\cdots & \lambda\, y_{kn} \end{vmatrix} < 0 \qquad (k = 2, 3, ..., n)$$

Lo cual implica que sean, alternativamente, mayores y menores que cero, los menores principales del hessiano orlado F.

$$F = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & y_2 \cdots\cdots & y_n \\ y_1 & y_{11} & y_{12} \cdots\cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{ni} & yn2 \cdots\cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \qquad [2]$$

El otro caso dual del equilibrio de la empresa es encontrar el máximo de $y = y\,(x)$, para $C = \overline{C}$.

Entonces:

$$\emptyset = y\,(x) + \mu\,(\bar{C} - p'x)$$

y las condiciones de extremo son:

$$\frac{\delta\, \emptyset}{\delta\, x_i} = y_i - \mu\, p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ...\, n)$$

$$\frac{\delta\, \emptyset}{\delta\, \mu} = \bar{C} - p'x = 0$$

La primera ecuación puede escribirse a forma matricial así $y_x = \mu p$. Las condiciones de 2.° orden son las ya examinadas.

Ahora bien, el supuesto más amplio es admitir que la empresa actúa de tal manera que trata de maximizar el beneficio. Por tanto, el equilibro es el máximo de $B = \pi y - p'x$; y las condiciones de máximo son

$$\frac{\delta\, B}{\delta\, x_i} = y_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ...\, n)$$

Las condiciones de 2.° orden son

$$(-1)^k \pi | Y_k | < 0 \ ; \ (k = 1, 2, ..., n)$$

Siendo Y_R los menores principales del determinante de la matriz Y. Matricialmente la condición de 1.° grado es: $\pi y_x = p$.

La resolución de cualquiera de estos tres sistemas

$$\begin{array}{l} p = \lambda y_x \\ I = \pi\ y \end{array} \qquad [3]$$

$$\begin{array}{l} y_x = \mu p \\ \bar{C} = p' x \end{array} \qquad [4]$$

$$\pi y = p'x \qquad [5]$$

Conduce a que,

$$\begin{array}{l} x = x\,(p, \pi, y, C) \\ \lambda = \lambda\,(p, y, C) \\ I = I\,(p, \pi, y, C) \end{array} \qquad [6]$$

Estas relaciones se utilizarán más adelante.

Teniendo en cuenta que,

$$\lambda = \frac{p_i}{y_i} = \frac{p_i}{\frac{\delta y}{\delta x_i}} = \frac{\frac{\delta C}{\delta x_i}}{\frac{\delta y}{\delta x_i}} = \frac{\delta C}{\delta y} \quad ; \text{y que,}$$

$$\mu = \frac{\frac{\delta y}{\delta x_i}}{p_i} = \frac{\frac{\delta y}{\delta x_i}}{\frac{\delta C}{\delta x_i}} = \frac{\delta y}{\delta C} = \frac{1}{\lambda}$$

puede escribirse que,

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \pi$$

ya que las ecuaciones de máximo beneficio son $\pi y_x = p$.

Por tanto, puede escribirse en el caso general la condición de extremo así:

$$p = c_y\ y_x \qquad [7]$$

Algebraicamente las condiciones anteriores son:

$$p_i = c_y \frac{\delta y}{\delta x_i} \quad ; \ (i = 1, 2, \dots n)$$

Diferenciando queda:

$$dp = c_y \, d\, y_X + y_X \;\; dc_y = c_y \, Y \, dx + y_X \, d \, c_y$$

De la definición de coste total se obtiene diferenciando totalmente,

$$d\,C = p' \, d\,x + x' \, d\,p$$

y de la definición de ingreso por diferenciación total,

$$d\,I = \pi \, d\,y + y \, d\,\pi$$

las tres ecuaciones pueden escribirse, resumidamente, así

$$\begin{vmatrix} c_y Y & y_X & 0 \\ p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \ x \ \begin{vmatrix} d\,x \\ dc_y \\ d\,I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 1 & -x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & \pi \end{vmatrix} \ x \ \begin{vmatrix} d\,C \\ d\,p \\ d\,\pi \\ d\,y \end{vmatrix}$$

Recordando las relaciones escritas en [1] una vez diferenciadas pueden ser escritas en forma matricial así:

$$\begin{vmatrix} d\,x \\ d\,c_y \\ d\,I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_C & X_p & x & x_y \\ \lambda c & \lambda p & 0 & \lambda y \\ I_C & I_p & I & I_y \end{vmatrix} \ x \ \begin{vmatrix} d\,C \\ d\,p \\ d\,y \end{vmatrix}$$

En donde, $x_C = [\, x_{1c}, x_{2c}, \dots x_{nc}]'$, esto es, el elemento típico es $\delta x_i / \delta C$. X_p es una matriz (n x n) de las derivadas de demandas de factores respecto a sus precios:

$$X_p = \begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta p_1} & \frac{\delta x_1}{\delta p_2} \cdots & \frac{\delta x_1}{\delta p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta x_n}{\delta p_1} & \frac{\delta x_n}{\delta p_2} \cdots & \frac{\delta x_n}{\delta p_n} \end{vmatrix}$$

$x\pi$ es el vector (n x 1) cuyos elementos típicos son $\delta x_i/\delta \pi$, de derivadas parciales de demanda respecto al precio del producto. x_y es el vector (n x 1) de derivadas de demandas de factores respecto a "oferta" de producto. λ_c es una escalar ($\lambda_c = \delta c_y$ / $\delta C'$): λ_p es un vector (n x 1) de derivadas del coste marginal respecto a precios de los factores ($\lambda p_i = \dfrac{\delta\, c_y y}{\delta\, p_i}$; $i = 1, 2, \ldots n$). λ_y es una escalar y representa la derivada del coste marginal respecto a la oferta del producto. I_c es una escalar, y representa la derivada del ingreso total respecto al coste total. I_p es un vector (nx1), que representa las derivadas parciales del ingreso respecto a precios de los factores. I_π e I_y son, respectivamente, las derivadas del ingreso respecto al precio y oferta de producto.

Y sustituyendo en la anterior ecuación matricial se tendrá que verificar que:

$$\begin{vmatrix} c_yY & y_x & 0 \\ p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_c & X_p & x_\pi & x_y \\ c & p & 0 & y \\ I_c & I_p & I_\pi & I_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d\,C \\ d\,p \\ d\,\pi \\ d\,y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 1 - x' & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & y & \pi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dC \\ dp \\ d\,\pi \\ d\,y \end{vmatrix}$$

y para que se cumpla para cualquier valor del vector debe suceder que

$$\begin{vmatrix} c_yY & y_x & 0 \\ p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_c & Xp & x_\pi & x_y \\ \lambda c & \lambda p & 0 & \lambda y \\ I_c & I_p & I_\pi & I_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 1 - x' & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & y & \pi \end{vmatrix} \qquad [9]$$

Esta relación podría ser denominada "la ecuación matricial básica de la teoría de la demanda derivada", por similitud con la obtenida por Barten (3).

Llamando,

$$A = \begin{vmatrix} c_yY & y_x & 0 \\ p' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A las otras supermatrices se las denominarán abreviadamente Γ y Λ . Tratamos de encontrar A^{-1}.

Definimos,

$$B = \begin{vmatrix} I & -\lambda^{-1}\, Y^{-1}\, y_x & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix}$$

y calculamos

$$A.B = \begin{vmatrix} c_y\ Y & -\ \lambda^{-1}\ c_y\, Y\, Y^{-1}\ y_x + I_{y_x} & 0 \\ p' & -\ \lambda^{-1}\ p'\, Y^{-1}\ y_x & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda Y & 0 & 0 \\ p' - \lambda^{-1} & p'Y^{-1}\ y_x & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} = C$$

Puesto que A . B = C, si premultiplicando por A^{-1}
$B = A^{-1}$ C, y postmultiplicando por C^{-1}; queda, $B\, C^{-1} = A^{-1}$

En lugar de buscar directamente A^{-1}, buscaremos C^{-1}, y la premultiplicaremos por B, para obtener A^{-1}.

Aplicando las reglas de inversión para matrices divididas en submatrices resulta:

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda^{-1}\ Y^{-1} & 0 & 0 \\ b\ p'Y^{-1} & -\lambda b & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix}$$

siendo $b = (p'\ Y^{-1}\ y_x)^{-1}$, una escalar;

Comprobemos que C^{-1} C' es la matriz identidad (I).

$$C^{-1}.\, C = \begin{vmatrix} -\ \lambda^{-1}\ Y^{-1} & 0 & 0 \\ b\ p'\ Y^{-1} & -\lambda^{b} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda Y & 0 & 0 \\ p' & -\lambda^{-1}\ p'Y^{-1}\ y_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\ \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ \lambda Y & 0 & 0 \\ b\ p'\ Y^{-1}\ \lambda Y - \lambda b\ p' & \lambda b\ \lambda^{-1}\ p'\ Y^{-1}\ y_x & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} \equiv I$$

Ahora podemos calcular A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} I & -\lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_x & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^{-1}\ Y^{-1} & 0 & 0 \\ b\ p'\ Y^{-1} & -\lambda b & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^{-1}\ Y^{-1} - \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_X\, b\, p'\, Y^{-1} & \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_X\, \lambda b & 0 \\ b\, p'\, Y^{-1} & -\lambda b & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} \qquad [10]$$

Por tanto, $\Gamma = A^{-1}\ \Lambda$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \lambda^{-1}\ Y^{-1} - \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_X\, b\, p'\, Y^{-1} & b\, Y^{-1}\ y_X & 0 \\ b\, p'\, Y^{-1} & -\lambda b & 0 \\ 0 & 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 1 & -x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & \pi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b\, Y^{-1}\, y_X & -\lambda^{-1}\ Y^{-1} - \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_X\, b\, p'\, Y^{-1} - b\, Y^{-1}\ y_X\, x' & 0 & 0 \\ -\lambda b & b\, p'\, Y^{-1} + \lambda b\ x' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & \pi \end{vmatrix} \qquad [11]$$

Deberá verificarse que,

$$x_c = b\, Y^{-1}\, y_X \qquad [12]$$
$$X_p = -\lambda^{-1}\ Y^{-1} - \lambda^{-1}\ Y^{-1}\ y_X\, b\, p'\, Y^{-1} - b\, Y^{-1}\ y_X\, x' \qquad [13]$$
$$x_\pi = 0 \qquad [14]$$
$$x_y = 0 \qquad [15]$$
$$\lambda_c = -\lambda b \qquad [16]$$
$$\lambda p = b\, p'\, Y^{-1} + \lambda b\ x' \qquad [17]$$
$$\lambda y = 0 \qquad [18]$$
$$I_c = 0 \qquad [19]$$
$$I_p = 0 \qquad [20]$$
$$I_\pi = y \qquad [21]$$
$$I_y = \pi \qquad [22]$$

Podemos realizar algunos cambios; en la [12] sustituimos b por su valor dado en la [16] y queda,

$$x_c = -\lambda^{-1}\ \lambda_c\ Y^{-1}\ y_X \qquad [23]$$

En la [13]

$$X_p = -\lambda^{-1} Y^{-1} - \lambda^{-1} x_c p' Y^{-1} + \lambda^{-1} \lambda_c Y^{-1} y_x x' \qquad [24]$$

en la [16] sustituimos b por su valor,

$$\lambda_c = -\lambda (p' y^{-1} y_x)^{-1} \qquad [25]$$

En la [17] sustituimos b por $\lambda^{-1} \lambda_c$,

$$\lambda' p = \lambda^{-1} \lambda_c p' Y^{-1} + \lambda_c x' \qquad [26]$$

En resumen, las ecuaciones que tienen interés son:

$$x_c = -c_y^{-1} \lambda_c Y^{-1} y_x \qquad [27]$$
$$X_p = c_y^{-1} \lambda_c Y^{-1} y_x x' - c_y^{-1} Y^{-1} - c_y^{-1} Y^{-1} p x'_c \qquad [28]$$
$$\lambda_c = -c_y (p' Y^{-1} y_x)^{-1} \qquad [29]$$
$$\lambda'_p = -c_y^{-1} \lambda_c p' Y^{-1} - \lambda_c x' \qquad [30]$$

Más adelante nos referiremos al significado, e interpretación de las relaciones [14] y [15].

II. Deducción de un sistema de ecuaciones de demanda derivada "Tipo Cournot"

Del sistema inicial de ecuaciones de demanda de factores $x = x(p, \pi y, C)$ por diferenciación se obtiene, teniendo en cuenta las relaciones anteriores que

$$dx = x_c \, d C + X_p \, d p \qquad [31]$$

Definimos
$E_{xc} = c \hat{x}^{-1} x_c$, [32]
como el vector de elasticidades demanda coste.

Algebraicamente, $E_{x_i c} = \dfrac{c}{x_i} \dfrac{\delta x_i}{\delta C}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Asimismo se define
$E_{xp} = \hat{x}^{-1} X_p \hat{p}$ [33]

como la matriz de elasticidades demanda precios de factores.

Algebraicamente $E_{x_i p_j} = \dfrac{p_j}{x_j} \dfrac{\delta x_i}{\delta p_j}$ $(i, j, = 1, 2, \ldots, n)$

Premultiplicando [31] por $\hat{x}^{-1}$ se obtiene

$$d \ln x = E_{xc} \, d \ln C + E_{xp} \, d \ln p \qquad [\,34\,]$$

Si ahora definimos el vector de costes medios de factores como

$$K = C^{-1} \, \hat{x} \, p \qquad [\,35\,]$$

0 algebraicamente

$$K_i = \frac{x_i \, p_i}{C} \; ; (i = 1, 2, ..., n)$$

Y el vector de propensiones marginales de costes de los factores como

$$M = [\, M_1 \, M_2 \, . \, . \, . \, M_n \,]'$$

En donde el elemento típico es

$$M_i = K_i \, E_{x_i c} \quad (i = 1, 2, ..., n) \qquad [\,36\,]$$

Y la matriz de elasticidades-precio transformada como,

$$\theta_{xp} = \hat{K} \, E_{xp} \qquad [\,37\,]$$

En donde cada elemento tipico es

$$\theta_{ij} = K_i \, E_{x_i p_j} \; ; \; (i, j, = 1, 2, ..., n)$$

El sistema [34] puede transformarse si se premultiplica por $\hat{K}$ y se utilizan las definiciones [36] y [37], se obtiene.

$$K \, d \ln x = M \, d \ln C + \theta_{xp} \, d \ln p \qquad [\,38\,]$$

Los sistemas [31] , [34] y [38] son teóricamente equivalentes, pero empíricamente pueden resultar muy diferentes; puesto que en cada uno se mantiene la hipótesis de la constancia de sendos grupos de parámetros estructurales.

Propiedades de x_C y $X \, p$

i) Agregación Engel

Premultiplicando [23] por p' se obtiene

$$p' \, x_C = -c_y \, \lambda_c \, p' \, Y^{-1} \, y_X = -c_y \, \lambda_c \, (\lambda_c^{-1} \, c_y^{-1}) = 1 \qquad [\,39\,]$$

ii) Agregación Cournot

Postmultiplicando X'_p por p, previamente transpuesta

$$X'_p = + c_y^{-1} \, Y^{-1} - c_y^{-1} \, Y^{-1} \, p \, x'_c + c_y^{-1} \, \lambda_c \, x \, y'_x \, Y^{-1} =$$

$$c_{y^{-1}} \, \lambda_c \, x \, y'_x \, Y^{-1}$$

$$X'_p \cdot p = + c_y^{-1} \, Y^{-1} \, p - c_y^{-1} \, Y^{-1} \, p + c_y^{-1} \, \lambda_c \, x \, y'_x \, Y^{-1} \, p =$$

$$c_y^{-1} \, \lambda_y \, x \, y'_x \, Y^{-1} \, p = -x \qquad [\,40\,]$$

iii) Simetria

La ecuación [24] puede escribirse así

$X_p - c_y^{-1} \lambda_c Y^{-1} y_x x' = + c_y^{-1} Y^{-1} - c_y^{-1} p x'_c$

$X_p + x_c x' = - c_y [Y^{-1} - Y^{-1}] = 0$ [41]

Algebraicamente

$$\frac{\delta x_i}{\delta p_j} + x_j \frac{\delta x i}{\delta C} = \frac{\delta x j}{\delta p i} + x_i \frac{\delta x j}{\delta C} \quad ; (i, j, = 1, 2, ..., n)$$

iv) Homogeneidad

$X_p + x_c x' = X'_p + xx'_c$

Postmultiplicando por p

$X_p . p + x_c x' p = P X' p + x x'_c p$

Y dado que

$X'_p p = - x$; y que, $x'_c p = 1$,

$X_p p + x_c x' p = X_p p + x_c C = 0$ [42]

(Condición de Euler para las ecuaciones homogeneas de grado cero)

Propiedades de las elasticidades (E_{xc}, E_{xc}).

i) Agregación Engel

La ecuación $p' x_c = 1$ puede escribirse así

$p' x_c = C^{-1} p' \hat{x} \hat{x}^{-1} x_c C = K' E_{xe} = 1$

$K' E_{xe} = 1$ [43]

o algebraicamente

$K_i E_{x_ic} = 1$

ii) Agregación Cournot

La ecuación $X'_p p = - x$

Puede escribirse así $p' X_p = p' \hat{x} \hat{x}^{-1} X_p = -x'$

Dividido por C y postmultiplicando por p, los 2.° y 3.° miembros

$C^{-1} p' \hat{x} \hat{x}^{-1} X p p = -C^{-1} x' p$

Es decir

$K'E_{xp} = -K'$; ($\sum_j$ K_i E_{xipj} $= -K_j$; j = 1, 2, ..., n) [44]

iii) Simetria

En la condición $X_p + x_c x' = X'_p + x x'_c$

Podemos pre y postmultiplicar ambos miembros por $\hat{p}$ y multiplicar por C^{-1}

$C^{-1} \hat{p} (X_p + x_c x') \hat{p} = C^{-1} \hat{p} (X'_p + x x'_c) \hat{p}$

El segundo miembro puede escribirse así, introduciendo adecuadamente $\hat{x}^{-1}$ x, y, C^{-1} C)

$C^{-1} \hat{p} (X_p + x_c x') \hat{p} = C^{-1} (C\hat{p} X'_p \hat{x}^{-1} \hat{x} \hat{p} C^{-1} + \hat{p} x C x'_c \hat{x}^{-1} \hat{x} C^{-1} =$

$= \hat{p} X'_p \hat{x}^{-1} + \hat{p} x C x'_c \hat{x}^{-1}) (C^{-1} \hat{x} \hat{p}) = (E'_{xc} + K E'_{xp}) \hat{k}$

El primer miembro puede transformarse de una manera similar

$C^{-1} \hat{p} (Xp + x_c x') \hat{p} = \hat{K} (E_{xp} + E_{xc} K')$

Por tanto,

$(E'_{xc} + K E'_{xc}) \hat{K} = [(E'_{xp} + KE'_{xc}) \hat{K}]'$, [44 bis]

Que prueba la propiedad de simetria

iv) Homogeneidad

Consideramos la condición de homogeneidad representada por la ecuación de Euler (pág. 16)

$X_p p + x_c C = 0$

Premultiplicando por $\hat{x}^{-1}$, introduciendo la matriz identidad $\hat{p}\hat{p}^{-1}$ se transforma en

$\hat{x}^{-1} X_p \hat{p}\hat{p}^{-1} p + \hat{x}^{-1} x_c C = 0$

y pasado a elasticidades

$E_{xp} \iota + E_{xc} = 0$ [45]

Puesto que $\hat{p}^{-1} p = \iota$, siendo ι el vector (n x 1) de unos.

Algebraicamente, la condición escrita es

$E_{x_i p_i} + E_{x_i c} = 0$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Análogas agregaciones pueden encontrarse para el sistema [38]

III. Deducción de un sistema de ecuaciones de demanda derivada "tipo Slutsky"

Supongamos que introducimos la función de demanda de factores en la función de producción $x = x (p\ C)$

$y = y (x)$

quedará
$y^* = y^* x(p, C) = z(p, C)$ [46]

a la que denominaremos *función de producción indirecta.*

Podemos calcular las "productividades marginales" de los precios y del coste total.

$$z_C = \frac{\delta y^*}{\delta C} \quad ; Z_p = \left| \frac{\delta y^*}{\delta p_1}, \frac{\delta y^*}{\delta p_2}, \ldots, \frac{\delta y^*}{\delta p_n} \right|' \qquad [47]$$

Que miden el cambio de una curva de isoproducto cuando varian los precios de los factores, ó el coste total.

$z_C = (y^*_C)' x_C$, pero $y_X = \lambda . p$. (ecuación de equilibrio).

Por tanto,
$y^*_C = \lambda p' x_C = \lambda$, puesto que $p' x_C = 1$ [48]

Obtenemos el resultado que ya sabiamos, λ es la "productividad marginal del coste"

La productividad marginal de los precios puede calcularse así
$Z_p = (y^*_p)' X_p = p' X_p = - x'$

Recordamos que
$y^* = x(p, C)$. Diferenciado totalmente:
$d y^* = Z_p d_p + z_C dC = \lambda d C' - \lambda x' d p$

Si nos movemos por una curva de isoproducto la anterior expresión debe valer cero. Por tanto, debe suceder que $(d C)^* = x' d p$

Sustituyendo
$(d C)^*$, en, $d x = x_C (d C)^* + X_p d p$; $d x = x_C x' d p + X_p d p =$
$(X_p + x_C x') d p$; por tanto $X_p^* = X_p + x_C x'$, la "ecuación de Slutsky" [50]

Cada elemento de la matriz X_p puede escribirse así

$$\frac{\delta x i}{\delta p j} = \left(\frac{\delta x i}{\delta p j}\right)^* - x_j \frac{\delta x i}{\delta C} ; \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Por tanto cada elemento de la matriz X_p^* mide en cuanto afecta la variación del precio de un factor la demanda de otro factor, cuando el empresario se ve "forzado" a moverse por una linea de isoproducto.

Puesto que, $X_p = X^*_p - x_c \dot{x}'$

$$d\,x = x_c\ d + X_p\ d\,p = x_c\ (d\,C - x'\,d\,p) + X^*_p\,d\,p$$

El término (d C – x' d p) mide el cambio en el "coste real" del empresario.
Si definimos E^*_{xp} análogamente a E_{xp} tenemos $E^*_{xp} = \hat{x}^{-1}\ X^*_p\ \hat{p}$.

La ecuación fundamental $X^*_p = X_p + x_c\ x'$ puede transformarse premultiplicando por $\hat{x}^{-1}$ y postmultiplicando $\hat{p}$.

$E^*_{xp} = \hat{x}^{-1}$ y postmultiplicando $\hat{p}$.

$$E^*_{xp} = \hat{x}^{-1}\ X_p\ \hat{p}' + \hat{x}^{-1}\ x_c\ x'\ \hat{p}$$

$$E_{xp} + C^{-1}\ C\ \hat{x}^{-1}\ x_c\ x'\ \hat{p} = E_{xp} + E_{xc}\ k' \qquad [\ 51\ ]$$

Puesto que $C\ \hat{x}^{-1}\ x_c = E_{xc}$; y, $C^{-1}\ x'\ \hat{p} = k'$ (recuerdese que $K = C^{-1}\ \hat{x}\ p$)

Definiendo
$\theta^*_{xp} = K\ E^*$, en donde el elemento típico de esta matriz es

$$\theta^*_{ij} = K_i\ \frac{p\,j}{x\,i}\left(\frac{\delta\ x\,i}{\delta\ p\,j}\right)^*$$

La ecuación de Slutsky escrita en elasticidades, $E^*_{xp} = E_{xp} + E_{xc}\ k'$, puede transformarse en otra premultiplicandola por K y utilizando algunas definiciones que ya hemos hecho.

$$\theta^*_{xp} = \theta_{xp} + \hat{M}\ k' \qquad [\ 52\ ]$$

No nos vamos a detener en ello, pero puede, con algunos cálculos intermedios, demostrarse que los pares (X^*_p ; x_c), (E^*_{xpi} ; Ex_c) y (θ^*_{xp}') cumplen condiciones de agregación semejantes a los antes estudiados.

En particular, y por la importancia que tiene, queremos resaltar la simetria de la matriz de derivadas X^*_p, que fue demostrada antes.

Obviamente, también E^*_{xp} es simetria. Como demuestra A. Vazquez (2) los efectos de sustitución directos son negativos, condición semejante a la negatividad de los efectos de sustitución directos de la teoría del consumidor.

IV. Otras propiedades de los sistemas de demanda derivada.

Puede decirse que aquí se acaban las analogías entre los sistemas de ecuaciones de demanda derivada y final. Vamos ahora a analizar la influencia de la variación de otras variables (oferta de productos, precio del producto, etc.) sobre la demanda de factores. Teniendo en cuenta, que la influencia de hacer por una vía indirecta, al contrario de lo que sucede con las variables precios de los factores y coste total.

El efecto que sobre la demanda de factores tiene la variación de la cantidad ofrecida de producto puede analizarse así: consideramos la función de producción, $y = y(x)$ diferenciado totalmente, $d y = y_X dx$; por tanto:

$1 = y'_X x_y$ siendo $x_y = \left| \frac{\delta x1}{\delta y}, \frac{\delta x2}{\delta y}, \ldots, \frac{\delta x_n}{\delta y} \right|'$ las derivadas que buscamos.

Ahora bien, debe suceder que, $\frac{\delta x i}{\delta y} = \frac{\delta x i}{\delta C} \frac{\delta C}{\delta y}$

y recordando que, $\frac{\delta C}{\delta y} = \lambda = C_y = \pi$, sucede que $x_y = \pi x_c$; también puede escribirse, $x'_y = \pi x'_c$

Postmultiplicando esta expresión por p, $x'_y p = \pi x'_c p$, ya que $x'_c p = 1$.

Si definimos, la elasticidad demanda-producto como,

$$E_{xy} = \hat{x}^{-1} x y' \qquad [53]$$

o algebraicamente

$$E_{xiy} = \frac{y}{x i} \frac{\delta x i}{\delta y} \; ; y, E_{yx} = y^{-1} \hat{x} y x' \qquad [54]$$

o algebráicamente

$$E_{yxi} = \frac{x i}{y} \frac{\delta y}{\delta x_i}$$

Esta última expresión la llama Frisch (4) "elasticidad marginal del factor i-esimo".

Resulta entonces que,

$$E'_{y x} = y^{-1} y_X \hat{x}$$

y postmultiplicando ésta por E_{xy},

$$E'_{yx} E_{xy} = y^{-1} y'_X \hat{x} y \hat{x} x y = 1$$

El efecto de la variación del precio del producto sobre la demanda de factores se analiza así

$$\frac{\delta\, x i}{\delta\, \pi} = \frac{\delta\, x i}{\delta\, y}\,\frac{\delta\, y}{\delta\, \pi} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

O en notación matricial llamado $x'_{\pi} = \left| \frac{\delta\, x1}{\delta\, \pi}, \frac{\delta\, x_2}{\delta\, \pi}, \ldots, \frac{\delta\, x_n}{\delta\, \pi} \right|$

$x_{\pi} = y_{\pi}\ x_y$. Ahora bien sabemos que, $x_y = \pi\, x_c$; por tanto, sustituyendo se obtiene, $x_{\pi} = y_{\pi}\, \pi x_c$

Postmultiplicando por p'

$$x_{\pi}\, p' = y_{\pi}\ \pi\, x_c\ p' = y\, {}_{\pi}{}'\pi$$

ó algebraicamente lo escrito arriba es $\left(\sum_i \frac{\delta x_i\, 1}{\delta\, \pi}\, p_i = \frac{\delta\, y}{\delta\, \pi}\ \pi \right)$

Definiendo
Elasticidad oferta-precio

$$y_{\pi} = y^{-1}\ \pi\ y_{\pi} \qquad [55]$$

$$\dot{\eta}_{x\pi} = \pi\, \hat{x}^{-1}\, X_{\pi} \text{ (elasticidad demanda factor-precio producto),} \qquad [56]$$

Resulta que,

$$\pi\, X^{-1}\ x_{\pi} = \pi\, X^{-1}\, \pi\, y_{\pi}\, X_C = \pi\, \hat{X}^{-1}\, y\, y^{-1}\, \pi\, y_{\pi}\, x_c = \pi\, x^{-1}\, y\, \eta_{y\pi}\, X_c$$

$$\dot{\eta}_{x\pi} = \pi\, \hat{X}^{-1}\, y\, X_c\ \eta_{y\pi} = y\, \pi\, C^{-1}\, C\, \hat{X}^{-1}\, X_C\, \eta_{u\pi} = \frac{I}{C}\, E_{xc}\ \eta_{y\pi}$$

$$K'\ \dot{\eta}_{x\pi} = \frac{I}{C}\, \eta_{y\pi} \quad K'E_{xc} = \frac{I}{C}\, \eta_{y\pi}$$

Algebraicamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i\, p_i}{C}\ \dot{\eta}_{x_i\pi} = \frac{I}{C}\ \eta_{y\pi}$$

Simplificando

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ \dot{\eta}_{x_i\pi} = I\, \eta_{y\pi}\ ;\text{ó,}\ \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ \frac{\pi}{x_i}\ \frac{\delta\, xi}{\delta\, \pi} = I\, \frac{\pi\ \delta\, y}{y\, \delta\, \pi}$$

que ya habiamos encontrado antes.

Consideremos ahora el efecto de la variación del precio de los factores cuando $C = \bar{C}$, sobre la oferta del producto.

Llamemos y_p el vector de efectos que deseamos encontrar se tiene pues, por definición que, $y_p = \left| \frac{\delta y}{\delta p_1}, \frac{\delta y}{\delta p_2}, \ldots \frac{\delta y}{\delta p_n} \right|'$

(algebraicamente $y'_p = y'_x X_p$), Es fácil ver que,

$$\frac{\delta y}{\delta p_i} = \frac{\delta y}{\delta x_j} \cdot \frac{\delta x_i}{\delta p_i}$$

Sustituyendo X_p por valor (véase ecuación [28]), $y'_p = y'_x c_y \lambda_c Y^{-1} y_x'$

teniendo en cuenta, que $-c_y \lambda_c Y^{-1} y_x = x_c$ (ecuación [27], se tiene que $y'_p = -y'_x x_c x' = -\pi \pi^{-1} y'_x x_c x'$

Por ser $x_y = \pi x_c$ lo anterior se convierte en $y'_p = \pi^{-1} y'_x x_y x' = -\pi^{-1} x'$

(algebraicamente, $\frac{\delta y}{\delta p_i} = -\frac{1}{\pi} x_i$)

Llamando ξ_{yp} la elasticidad del producto respecto al precio del factor que viene definida así

$$\xi_{yp} = y^{-1} \hat{p} y_p \qquad [57]$$

(algebraicamente, $\xi_{yp_i} = \frac{p_i}{y} \frac{\delta y}{\delta p_i}$)

Sustituyendo y_p por su valor
$\xi_{yp} = y^{-1} \hat{p} X'_p y_x$

Teniendo en cuenta la agregación Cournot
$X'_p p = -x$, se sigue que, $\hat{p}' X'p = -\hat{x}$, y sustituyendo $\xi_{yp} = -y^{-1} \hat{x} y_x$

y recordando la definición de "elasticidades marginales con factores",

$$E_{yx} = y^{-1} \hat{x} y_x, \text{ resulta, } \xi_{yp} = -E_{yx} \qquad [58]$$

La ecuación $y'_p = -\frac{1}{\pi} x'$

puede transformarse, teniendo en cuenta que $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{C_y}$, en

$$y'_p = \frac{1}{c_y} x' = -y_c x'$$

Si la anterior se multiplica y divide por C, resulta que, $y'_p = -C\, C^{-1}\, y_c x'$, ó, $y_p = -C\, C^{-1}\, y_c x$

Premultiplicando ambos miembros por $y^{-1}\, \hat{p}$,
$y^{-1}\, \hat{p} y_p = -C^{-1}\, \hat{p} C y^{-1}\, y_c x$

El primer miembro es ξ_{yp} del segundo $C\, y^{-1}\, y_c = E_{yc}$; $\xi_{yp} = -C^{-1} \hat{p}\, x$

$E_{yc} = -K\, E_{yc}$; $\xi_{yp}\,' = -E_{yc}\, K\, \tau\,' = -E_{yc}$, siendo $\tau = [\, 1, 1, ..., 1 \,]'$;
puesto que, $K \tau\,' = 1$

De la ecuación fundamental, $y'p = -\dfrac{1}{\pi} x'$

postmultiplicando por p,
$$y'_p p = \frac{-1}{\pi} x'\, p = -\frac{C}{\pi} < 0$$

(algebráicamente, $\sum\limits_i \dfrac{\delta y}{\delta p_i} p_i = -\dfrac{C'}{\pi} < 0$)

Por tanto algunas de las $\dfrac{\delta y}{\delta p_i} < 0$; pero no necesariamente todas.

Podrían seguir analizándose otras relaciones entre la demanda de factores y otras variables, pero creemos que con esto queda suficientemente ilustrada nuestra afirmación inicial en estas sugerencias, acerca de lo fecundo que resulta el tratamiento matricial en la Teoría Económica.

Departamento de Economía Agraria
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

BIBLIOGRAFIA

1.– C. LLUCH PICAZO, *La demanda de bienes de consumo,* FIESCECA, Madrid 1971.
2.– A. VAZQUEZ PEREZ, "La demanda de factores en la Teoría de la producción" en *Anales de Economía,* núms. 5 - 8, 3.ª época, enero-diciembre 1970.
3.– A.P. BARTEN, "Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preferences" en *Econometría,* enero-abril, 1964.
4.– R. FRISCH, *Las Leyes Técnicas y Económicas de la producción.* Ed. Sagitario Barcelona, 1963.
5.– J. CASTAÑEDA, *Lecciones de Teoría Económica* ed. Aguilar, Madrid (1.ª edición), 1969.