

## *Fundamentos del análisis espectral y sus aplicaciones en Econometría.*

---

### I. INTRODUCCION

El análisis espectral forma parte del análisis moderno de series temporales. Este constituye una rama del análisis estadístico multivariante, cuyo propósito, en términos generales, es la inferencia estadística con datos relativos a fenómenos que se desenvuelven en un contexto temporal.

El análisis de las series temporales proporciona un enfoque estadístico general para la *descripción* de los fenómenos que se desarrollan en el tiempo. Su aplicación a las estadísticas económicas entra dentro del campo econométrico.

Las primeras aplicaciones del análisis espectral se han desarrollado en el campo de la ingeniería electrónica, de aquí, que una parte de la terminología espectral (sobre la que, por otra parte, encontramos divergencias en los trabajos en lengua inglesa) haga referencia a conceptos de la ingeniería electrónica y de comunicación.

Posteriormente las aplicaciones del análisis espectral se han extendido a la electroencefalografía, oceanografía, óptica, sismografía y más recientemente, a la econometría.

El análisis espectral, frente al análisis clásico de las series temporales, presenta un punto de vista diferente de los procesos temporales (dominio frecuencial frente al dominio temporal) cuyas ventajas generales, siguiendo a Fishman (1969), son:

- Permite una simplicidad conceptual en la interpretación teórica de los comportamientos que se desenvuelven en el tiempo.
- Propone estimadores con propiedades muestrales más simples que los que proporciona el enfoque alternativo.

Contemplando la relación entre las técnicas espectrales y la Econometría, nos encontramos con que, en principio, el enfoque espectral ha surgido para muchos autores como un competidor del enfoque econométrico típico, basado en la construcción de modelos inspirados en la teoría económica. Frente a un enfoque econo-

métrico que busca *explicaciones* de los fenómenos, el enfoque espectral está basado en modelos *descriptivos* (generales) de las interrelaciones entre magnitudes temporales. Este es el sentido que suele darse a la competencia entre métodos econométricos típicos y métodos espectrales. Algunos autores, como Granger han llegado a afirmar que los métodos espectrales superan a los métodos econométricos que hacen uso de la información *a priori* que proporciona la teoría económica.

Pero tal competitividad entre métodos econométricos usuales y métodos espectrales no está clara. De la misma manera que en Econometría se ha producido un desarrollo de los métodos y principios estadísticos clásicos para proporcionar soluciones a los problemas de inferencia estadística que plantean los modelos econométricos, ¿no sería posible adaptar los principios básicos del análisis espectral a la resolución de los problemas de inferencia que se plantean en nuestra disciplina?

Esta pregunta, para la que aún no existe una respuesta definitiva, fue ya implícitamente formulada por Marshak en el prólogo del excelente libro de texto de econometría de Christ (1966). Escribió entonces Marshak: "Puede ser útil referirse aquí a las interesantes aplicaciones que recientemente ha tenido el análisis espectral en economía. Hasta ahora estas aplicaciones no han abordado la estimación de "estructuras" económicas, necesaria para predecir los efectos de ciertas políticas...". Según parece, estas frases aún continúan vigentes.

Hace poco más de un decenio que las técnicas espectrales se comenzaron a aplicar a los problemas económicos. Este es un campo en el que los progresos se producen con gran rapidez y es aún muy pronto para hacer balances o juicios globales. De lo que no cabe duda es que el análisis espectral ha producido unos resultados de gran interés en economía, muchos de ellos complementarios (más que competitivos) del enfoque econométrico usual. Al final de este trabajo se comentan brevemente algunas aplicaciones del análisis espectral en nuestro campo.

El análisis espectral hace uso de instrumentos matemáticos con los que el economista no suele estar familiarizado. Por otra parte, la interpretación de los conceptos espectrales no es obvia. Por estas razones, lo que nos proponemos es exponer los fundamentos del análisis espectral, prestando atención a los aspectos de su interpretación y aplicaciones en Econometría.

Las secciones que siguen están tratadas a nivel introductorio. En cada caso damos las referencias oportunas para ulteriores profundizaciones por parte del lector interesado.

De la bibliografía actual de interés en la aplicación de los métodos espectrales a la Economía, el libro de Granger y Hatanaka (1964), pionero en este sentido, es posiblemente el más fácil de leer. Fishman (1969) y Dhrymes (1970) (1971) se centran sobre todo en problemas de estimación de modelos de interés en econometría; el segundo autor utiliza un aparato matemático superior. Hannan (1970) da un tratamiento riguroso de amplio contenido y el libro de Jenkins y Watts (1969) es el más completo de todos. Engle (1974), quien proporciona una sencilla descripción de los métodos espectrales incluidos en el sistema de programas econométricos TROLL, cita también como exposiciones relativamente cortas y sencillas la de

Jenkins (1961) y Parzen (1961) y recomienda como libro orientado hacia las aplicaciones prácticas el de Cooley, Lewis y Welch (1967).

## 2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

El concepto de proceso estocástico es central en el análisis moderno de series temporales. Un proceso estocástico se puede contemplar como una sucesión de variables aleatorias cada una de ellas referida a un periodo de tiempo particular, y entre las cuales existen determinadas conexiones. Así, por ejemplo, el término de perturbación aleatoria de un modelo econométrico es un proceso estocástico.

Una serie temporal puede considerarse como la realización de un proceso estocástico. El análisis de las series temporales trata de los problemas de inferencia a partir de las realizaciones, es decir, de los problemas de estimación de las características que describen los procesos generadores de las series, con fines de predicción y de control.

En este sentido, el análisis de las series temporales constituye un complemento del enfoque econométrico típico, es decir, del de la inferencia estadística de relaciones establecidas *a priori* por la teoría económica. En efecto, como es sabido, los modelos econométricos incluyen en sus ecuaciones dos clases de variables, endógenas y exógenas. La predicción con modelos econométricos es un ejercicio simple cuando se conocen los valores de las variables exógenas. Pero el problema consiste precisamente en predecir los valores de éstas cuando no son variables sujetas a control gubernamental. Un método corriente de realizar predicciones condicionales en econometría aplicada es haciendo uso del análisis de series temporales para la predicción de variables exógenas. De modo que una vez obtenidos los valores de éstas, se utilizan para calcular las predicciones condicionales de las variables endógenas mediante las relaciones especificadas por el modelo econométrico. Pero no es esta la única forma en que los modelos econométricos y el análisis de series temporales se complementan, como tendremos ocasión de ver más adelante.

En el resto de esta sección, nos proponemos introducir algunos conceptos y notaciones básicas en torno a los procesos estocásticos, que resultan indispensables para los desarrollos ulteriores.

### Definición de proceso estocástico:

Es conveniente concebir el proceso estocástico como una extensión del concepto de variable aleatoria. Sea un experimento aleatorio definido por un modelo con los siguientes entes:

- $\Omega$ , El espacio de puntos muestrales o resultados posibles del experimento.
- F, El campo de los sucesos generados por los puntos muestrales.
- P, La medida de la probabilidad definida sobre los sucesos en el campo.

Si a cada resultado  $\omega \in \Omega$  se le asigna un número  $X(\omega)$  de acuerdo con una regla dada y en correspondencia con un suceso en el campo, tenemos, como es sabido, los elementos básicos para definir la variable aleatoria  $X$ . Esta se define como la función medible.

$$X = \left\{ X(\omega), \omega \in \Omega \right\} \quad [ 1 ]$$

La distribución de probabilidad de  $X$  queda determinada por  $P$ .

Introduzcamos un parámetro  $t$ , que para nosotros significa tiempo de modo que  $t \in T$ , siendo  $T$  el conjunto de número reales. Ahora a cada resultado  $\omega$  no asignamos un número, sino una función  $X(t, \omega)$ . Dados  $t$  y  $\omega$ ,  $X(t, \omega)$  es un valor numérico. Considerando que tanto  $t$  como  $\omega$  varían simultáneamente, surge el concepto de proceso estocástico como la función.

$$X(t) = \left\{ X(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega \right\} \quad [ 2 ]$$

La variación simultánea de  $t$  y de  $\omega$  puede contemplarse alternativamente bajo dos enfoques diferentes. Podemos centrar la atención en  $\omega$ , considerándolo primero dado y luego dejándolo variar; o bien se pueda hacer lo mismo pero en relación a  $t$ . Bajo la primera perspectiva, que destaca el dominio del espacio muestral, el proceso estocástico es una función de valor numérico puesta en correspondencia con cada punto del espacio muestral. Bajo la segunda óptica, para cada valor de  $t$ , tenemos una variable aleatoria; al considerar todos los  $t$  posibles tenemos una colección de variables aleatorias ordenadas de acuerdo con el tiempo.

En esta segunda forma, se contempla el proceso en el *dominio temporal* y es la más interesante por ahora para nosotros, entre otras cosas, porque una serie temporal puede concebirse como una colección de observaciones, cada una correspondiendo a una variable aleatoria del proceso.

Es usual suprimir  $\omega$  en la notación del proceso estocástico y escribir simplemente  $X(t)$ , como se ha hecho en [ 2 ].

Las leyes probabilísticas que gobiernan a un proceso estocástico, se describen exhaustivamente y sin ambigüedades, mediante las funciones de distribución de probabilidad (f.d.p.) conjunta de todos y cada uno de los vectores que se pueden formar con las variables aleatorias que constituyen el proceso. Para muchos fines prácticos, los procesos se suelen describir, sin embargo, mediante sus momentos.

### Las funciones de autocovariación y de autocorrelación

De la misma manera que la media y la variancia son medidas útiles para describir una variable aleatoria, en la teoría de los procesos estocásticos se hace uso también de estos conceptos.

La *media* se define como



$$\mu(t) \equiv E X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi dF(\xi, t), \quad [4]$$

y la función de *autocovariancia*

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E \left\{ [X(s) - \mu(s)] [X(t) - \mu(t)] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [\xi_s - \mu(s)] [\xi_t - \mu(t)] \right\} dF(\xi_s, \xi_t, s, t) \end{aligned} \quad [5]$$

De esta función se obtienen dos resultados útiles. Por una parte, para  $s = t$ , se obtiene la *función de variancia* del proceso

$$\text{var} [X(t)] = R(t, t) \quad [6]$$

Por otra parte, a partir de la función de autocovariancia, definimos la *función de autocorrelación*

$$\rho(s, t) = \frac{R(s, t)}{[R(s, s) R(t, t)]^{1/2}} \quad [7]$$

Esta función mide el grado de *asociación lineal* entre las variables aleatorias del proceso. Evidentemente,

$$\rho(s, s) = 1 \quad [8]$$

Y puede comprobarse también que

$$0 \leq |\rho(s, t)| \leq 1 \quad [9]$$

Para una asociación lineal perfecta, la función de autocorrelación toma el valor de la unidad. Si no hay asociación lineal en absoluto,  $\rho(s, t) = 0$ . Así pues, el valor de  $\rho(s, t)$  puede utilizarse como índice del grado de asociación lineal entre las variables aleatorias del proceso.

De la misma manera que una variable aleatoria normal, queda definida por su media y su variancia, un proceso aleatorio normal es decir, constituido por variables aleatorias que forman distribuciones normales multivariantes, queda determinado por la media y por su función de autocovariancia.

### Procesos estocásticos estacionarios

De estacionariedad puede hablarse en dos sentidos, uno amplio y otro estricto.

En el sentido *estricto* un proceso estocástico es estacionario, si los vectores  $[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$  y  $[X(t_1 + s), X(t_2 + s), \dots, X(t_n + s)]$ , poseen la misma f.d.p. independientemente de  $s$  para cualquier  $n$  dado.

Un proceso que no sea estacionario, se denomina evolutivo.

Examinando la propiedad de estacionariedad, se ve que las leyes probabilísticas que gobiernan el proceso estocástico estacionario no sufren alteración al considerar tiempos históricos diferentes. Esta es una restricción demasiado fuerte para imponerla a priori a los procesos estocásticos que se derivan de sistemas sociales. En otras palabras, un sistema social viola, sin duda, la hipótesis de estacionariedad estricta. Sin embargo, las predicciones científicas (que son desde luego, condicionales), ya sea mediante modelos econométricos, ya mediante el análisis de series temporales, se basan, más o menos explícitamente, en la hipótesis de algún tipo de estacionariedad, pues en definitiva lo que se pretende es hacer uso de la experiencia pasada para predecir el futuro, de modo que hay que suponer que cada observación está relacionada de alguna manera con las precedentes.

El hecho de que se haga uso de los procesos estocásticos estacionarios para describir sistemas sociales que de seguro violan la hipótesis de estacionariedad es, sin duda, una limitación de nuestros métodos que hay que tener presente en las aplicaciones prácticas. Pero esta limitación no es tan fuerte como uno puede imaginarse en principio, por dos razones. En primer lugar podemos admitir cierta clase de estacionariedad que no sea tan restrictiva como la definida anteriormente, se trata de la llamada estacionariedad en sentido *amplio*. Por otra parte, es posible someter a muchos procesos evolutivos a determinado tipo de operaciones, de modo que se logre aproximar bastante a las condiciones de estacionariedad en sentido amplio. Este segundo aspecto lo consideramos brevemente en la sección 9.

Un proceso es estacionario en sentido amplio (o estacionario de segundo orden, o de covarianza estacionaria), cuando

$$\mu = E [ X (t) ] < \infty \quad [ 10 ]$$

$$y \quad R (t, t + \tau) = R (\tau) = E [ X (t + \tau) X (t) ] - \mu^2 < \infty \quad [ 11 ]$$

Es decir, que la media del proceso es constante y la autocovarianza es solo función del lapso temporal considerado y no del tiempo histórico, pudiendo los momentos de orden superior variar con el tiempo. Ciertamente, la mayoría de los procesos económicos, no se ajustan a estas condiciones, pero sí presentan tendencias en sus medias y sus variancias, es posible eliminarlas consiguiendo que el proceso sea aproximadamente estacionario.

La función de autocorrelación es

$$\rho (\tau) = R (\tau) / R (0)$$

Para procesos reales

$$y \quad \begin{aligned} R (0) > 0, \quad R (\tau) = R (-\tau), \quad \rho (\tau) = \rho (-\tau) \\ \rho (0) = 1, \quad | \rho (\tau) | \leq 1 \end{aligned}$$

La representación gráfica de  $\rho(\tau)$  se denomina *correlograma* del proceso y es un instrumento en el análisis de los procesos en el dominio temporal.

### Procesos autorregresivos, de medias móviles y mixtos

Las observaciones económicas vienen referidas a intervalos temporales más o menos amplios. Considerando, pues, el tiempo como variable discreta, los procesos de uso más frecuente en el dominio temporal son: el autorregresivo, el de medias móviles y el mixto (autorregresivo de medias móviles).

Un proceso *autorregresivo* de orden  $p$  es el que viene dado por

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + e_t \quad [12]$$

en donde  $e_t$  es una familia de variables aleatorias independientes que están incorrelacionadas con  $X_{t-i}$  para todo  $i$  mayor que cero. Haciendo uso del operador de retardos,  $R$ , tal que  $R^n X_t = X_{t-n}$ , la ecuación puede escribirse así

$$A(R) X_t = e_t \quad [12 \text{ bis}]$$

en donde

$$A(R) = 1 - a_1 R - a_2 R^2 - \dots - a_p R^p$$

Un proceso de *medias móviles* de orden  $q$  viene dado por la siguiente expresión.

$$X_t = b_1 e_{t-1} + b_2 e_{t-2} + \dots + b_q e_{t-q} + e_t \quad [13]$$

que puede escribirse también

$$X_t = B(R) e_t \quad [13 \text{ bis}]$$

en donde

$$B(R) = b_1 R + b_2 R^2 + \dots + b_q R^q + 1 \quad [14]$$

Por último, un proceso *autorregresivo mixto* es

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + b_1 e_{t-1} + \dots + b_q e_{t-q} + e_t \quad [15]$$

o bien

$$A(R) X_t = B(R) e_t \quad [15 \text{ bis}]$$

Estos procesos así definidos pueden relacionarse entre sí bajo ciertas condiciones. Concretamente, el cociente de polinomios en  $R$ ,  $B(R)/A(R)$ , cuando  $q < p$  y ambos polinomios no poseen raíces comunes, puede expresarse mediante otro polinomio en  $R$ ,  $W(R)$ , que posee infinitos términos.

$$\frac{B(R)}{A(R)} = w_0 + w_1 R + w_2 R^2 + \dots = W(R) \quad [16]$$

con  $\sum_i w_i$  convergente

La demostración puede verse en Otero (1974, págs. 91-93)

Así pues, el proceso autorregresivo mixto

$$A(R) X_t = B(R) e_t \quad [17]$$

bajo las condiciones anteriores, puede expresarse así

$$X_t = W(R) e_t \quad [17 \text{ bis}]$$

que es un proceso de medias móviles pero de infinitos términos.

A continuación, nos interesa ya pasar a contemplar los procesos estocásticos bajo un enfoque diferente al del dominio temporal. Se trata del enfoque del dominio frecuencial o enfoque espectral, del que destacaremos sus ventajas interpretativas y sus aplicaciones en Economía.

### 3. REPRESENTACION ESPECTRAL UNIVARIANTE DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS DE SEGUNDO ORDEN Y SU INTERPRETACION

#### Preliminares

El espectro de la luz blanca, por ejemplo, es la descomposición de la luz en un conjunto de componentes monocromáticas, cada una con una banda de frecuencia determinada; de forma análoga, los tonos musicales están formados por la superposición de armónicos puros. El análisis de Fourier ha permitido también concebir a las series temporales descompuestas en un conjunto de componentes armónicos o funciones de la forma  $A_i \cos(\lambda_i t + \varphi_i)$ , cada una con una amplitud, una frecuencia y una fase específicas. Esta concepción ha dado lugar al análisis espectral de las series temporales.

Para introducir progresivamente el tema, comenzaremos por describir la función armónica.

$$X(t) = A \cos(\lambda t + \varphi) \quad [18]$$

en donde  $t$  es el tiempo. Sea

$$\theta(t) = \lambda t + \varphi$$

en donde  $\theta(t)$  se denomina ángulo de fase. Para  $t = 0$ ,  $\theta(0) = \varphi$ , de modo que  $\varphi$  es el llamado ángulo de fase inicial; este parámetro es adimensional. La función  $X(t)$  es periódica; cuando  $\theta(t)$  se incrementa en  $2\pi$  radianes, se describe un ciclo completo, repitiéndose el valor de la función en la misma fase del ciclo. El tiempo transcurrido en producirse un ciclo completo, se denomina *periodo*. La relación entre el período,  $T$ , y el parámetro  $\lambda$  se obtiene teniendo en cuenta que

$$\Delta\theta(t) = \lambda \Delta t$$

y que cuando  $\Delta\theta(t) = 2\pi$ ,  $\Delta t = T$ , por definición.

De modo que

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ unidades de tiempo/ciclo} \quad [19]$$

Otro parámetro de interés, es la *frecuencia*,  $f$ , que se define como la inversa del período.

$$f = \frac{1}{T} \text{ ciclos/unidad de tiempo} \quad [20]$$

La relación entre  $\lambda$  y  $f$  es, evidentemente,

$$\lambda = 2\pi f \text{ radianes/unidad de tiempo} \quad [21]$$

El parámetro  $\lambda$  se denomina *frecuencia angular*. Es de uso bastante generalizado parametrizar las relaciones del análisis espectral en base al parámetro  $\lambda$ , por lo que se suele acortar su nombre designándolo por frecuencia sencillamente, lo cual debe tenerse bien presente para evitar confusiones entre  $\lambda$  y  $f$ .

El parámetro  $A$  se mide en las mismas unidades que  $X(t)$  y representa la mitad del intervalo al que se extienden todos los valores que puede tomar esta función. De aquí que su nombre sea el de *semiamplitud*, aunque algunos autores también le denominan amplitud.

La representación gráfica de esta función es de la forma que indica la figura 1.

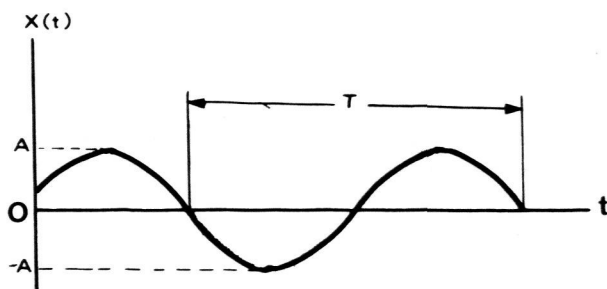


Fig. 1

Los cambios en la fase inicial, son equivalentes a cambios en el origen del eje del tiempo. Por otra parte, el modelo

$$X(t) = \mu + A \cos(\lambda t + \varphi), \quad [ 22 ]$$

que puede reducirse al anterior mediante un cambio en el origen del eje de ordenadas, puede escribirse también en la forma

$$X(t) = \mu + a \cos \lambda t + b \operatorname{sen} \lambda t \quad [ 23 ]$$

en donde

$$a = A \cos \varphi \quad \text{y} \quad b = -A \operatorname{sen} \varphi$$

En nuestro contexto, hemos de trabajar con funciones aleatorias (un proceso estocástico lo es), de modo que el paso siguiente, dentro de una serie de complicaciones sucesivas que vamos a ir introduciendo, es admitir que  $a$  y  $b$  son variables aleatorias tales que

$$E(a) = E(b) = 0, \quad E(a^2) = E(b^2) = \sigma^2, \quad E(a, b) = 0 \quad [ 24 ]$$

Si se admite también la hipótesis de que las distribuciones de  $a$  y  $b$  son normales, la última expresión implica la independencia entre las variables aleatorias.

Bajo estas condiciones  $X(t)$  es un proceso estocástico para el que

$$R(s, t) = E \left\{ \begin{matrix} E[ X(t) ] = \mu \\ [ X(t) - \mu ] [ X(s) - \mu ] \end{matrix} \right\} = \quad [ 25 ]$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \lambda t \cos \lambda s E(a^2) + \sin \lambda t \sin \lambda s E(b^2) \\
 &= \sigma^2 \cos \tau
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\tau = |t - s|$$

Así que  $R(s, t) = R(\tau)$ , por lo que  $X(t)$  es estacionario de segundo orden, con variancia  $R(0) = \sigma^2$ . Como ya se ha indicado, mediante un simple cambio de origen puede conseguirse reducir  $\mu = 0$ . De ahora en adelante trabajaremos con procesos estocásticos estacionarios de segundo orden con media nula, sin que esto último suponga pérdida de generalidad.

### Proceso armónico

Consideremos ahora el proceso formado por la siguiente combinación

$$X(t) = \sum_{j=1}^n A_j \cos(\lambda_j t + \varphi_j) = \tag{27}$$

$$= \sum_{j=1}^n (a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t) \tag{27 bis}$$

en donde se admite que  $\forall_j = 1, 2, \dots, n$

$$E(a_j) = E(b_j) = 0; E(a_j^2) = E(b_j^2) = \sigma_j^2; E(a_j, b_j) = 0 \tag{28}$$

La expresión [ 27 ] es la llamada *representación espectral* del proceso porque lo expresa como la combinación de un conjunto de armónicos simples, cada uno con su frecuencia, amplitud y fase específicas. Por otra parte, [ 27 bis ] es la *representación cartesiana*.

Es útil, sin embargo, hacer uso de otra representación denominada *compleja*. Para ello acudimos a las relaciones de Moivre:

$$\begin{aligned}
 e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\
 e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta
 \end{aligned}$$

de las que se derivan las siguientes

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{29}$$

mediante las cuales se puede escribir la representación *compleja* del proceso

$$X(t) = \sum_{j=1}^n (c_j e^{i\lambda_j t} + c_j e^{-i\lambda_j t}) \tag{30}$$

en donde

$$c_j = \frac{a_j - i b_j}{2} \quad \text{y} \quad \bar{c}_j = \frac{a_j + i b_j}{2} \quad [31]$$

o equivalentemente

$$c_j = \frac{A_j e^{i\varphi_j}}{2} \quad \bar{c}_j = \frac{A_j e^{-i\varphi_j}}{2} \quad [31 \text{ bis}]$$

Es posible dar una notación más compacta que [30] admitiendo que  $j$  pueda tomar valores negativos para los que  $\lambda_{-j} = -\lambda_j$ , y  $c_{-j} = \bar{c}_j$  (esto último es cierto si se admite que  $A_j = A$  y  $\varphi_{-j} = -\varphi_j$ ). Con estos cambios de notaciones, la ecuación [30] puede escribirse así

$$X(t) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i\lambda_j t} \quad [-30 \text{ bis}]$$

Aunque el admitir la existencia de frecuencias negativas resulta algo artificioso el análisis espectral hace uso de este tipo de abstracción por las ventajas que se derivan de su operatividad. Desde luego, siendo  $X(t)$  un proceso real, la parte imaginaria de la representación compleja se anula.

Vamos a obtener las condiciones que, en adición de las [28], deben darse para que el proceso sea estacionario de segundo orden.

Como quiera que  $E[X(t)] = 0$ , ahora hemos de obtener las condiciones bajo las que  $R(s, t) = R(\tau)$ , siendo  $\tau = |s - t|$ .

Según [30 bis].

$$R(s, t) = E[X(t)X(s)] = \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n E[c_j \bar{c}_k e^{i(\lambda_j t + \lambda_k s)}] \quad [32]$$

y para que esta función dependa solo de  $\tau$  hace falta que

$$E(c_j \bar{c}_k) = 0, \quad \forall j \neq k \text{ (positivos o negativos)} \quad [33]$$

condiciones estas que, según [31], tienen las siguientes implicaciones respecto a las  $a_j$ , y  $b_j$ .

$$E(a_j a_k) = E(a_j b_k) = E(b_j b_k) = 0 \quad [34]$$

Con estas condiciones aseguramos que  $R(s, t)$  se anula para  $j \neq k$ . Cuando  $j = k$  las ecuaciones [28] implican que



$$E(c_j^2) = E(\bar{c}_j^2) = 0; E(c_j \bar{c}_j) = \frac{\sigma^2}{2} \quad [35]$$

Bajo las condiciones [33] y las [35], el proceso es estacionario, pues

$$R(s, t) = \sum_{j=-n}^n \frac{\sigma^2}{2} e^{i\lambda_j(t-s)} = \sum_{j=-n}^n \frac{\sigma^2}{2} \cos \lambda_j \tau$$

ya que

$$\sum_{j=-n}^n \sin \lambda_j \tau = 0 \quad \text{por ser } \lambda_{-j} = -\lambda_j$$

quedando en definitiva

$$R(s, t) = R(\tau) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \cos \lambda_j \tau \quad [36]$$

De aquí se deriva una importante conclusión; para  $\tau = 0$  se tiene

$$R(0) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \quad [37]$$

Esta ecuación significa que la variancia total del proceso está constituida por la adición de las variancias de sus componentes armónicas simples. Tal propiedad aditiva permite hablar de la contribución de cada componente a la variación cuadrática media total del proceso.

Si se admite, además, la hipótesis de distribución normal multivariante para los vectores  $a' = [a_1 \dots a_n]$  y  $b' = [b_1 \dots b_n]$ ; las condiciones de ortogonalidad [28] y [34] implican la independencia entre las componentes armónicas del proceso.

Es así como este proceso puede concebirse constituido por un conjunto de fuentes armónicas independientes y aditivas. Este resultado es evidentemente muy atractivo para las aplicaciones económicas, donde la búsqueda de periodicidades es de interés primordial.

Hemos expuesto ya varios aspectos característicos del enfoque espectral, pero hasta ahora, nos hemos limitado a un proceso especial. Sin embargo, el hecho de importancia central es que *estos conceptos pueden generalizarse para tratar con cualquier proceso estocástico estacionario en sentido amplio*. De esta generalización nos ocupamos a continuación.

El modelo [27] es interesante no solo porque constituye una introducción sencilla al enfoque espectral, sino porque constituye en sí mismo un elemento de análisis de ciclos, aunque ya algo rudimentario y pasado de moda. De este modelo se deriva el denominado análisis del *periodograma* que, en esencia, se trata de un gráfico en el que se representan la contribución relativa de cada componente del

proceso en función de la correspondiente frecuencia angular. Este tipo de análisis no es solo el predecesor del análisis espectral, sino que presenta además ciertas conexiones con el mismo, que resultan de interés práctico en la estimación espectral. Sobre este tema volvemos en la sección 8.

**Representación espectral:**

La descomposición en componentes periódicas aditivas que permite el proceso armónico, puede realizarse también con *cualquier* proceso estocástico estacionario de segundo orden. Para ello basta aplicar el resultado básico del análisis de Fourier, según el cuál, cualquier función analítica puede aproximarse dentro de un intervalo con cualquier grado de exactitud preestablecido, mediante una combinación lineal de senos y cosenos. A medida que el intervalo crece, es necesario aumentar el número de componentes, reduciéndose así las diferencias entre las correspondientes frecuencias

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i$$

por lo que  $\lambda$  llega a ser continua en el límite.

Mediante un adecuado procedimiento de aproximación al límite, se puede escribir que *cualquier* función aleatoria  $X(t)$ , tiene una representación.

$$X(t) = \int_0^\infty [ \cos \lambda t dU(\lambda) + \text{sen } \lambda t dV(\lambda) ] \tag{ 38 }$$

en donde

$$dU(\lambda) = dU(-\lambda) \text{ y } dV(\lambda) = - dV(-\lambda) \tag{ 39 }$$

La correspondiente demostración puede verse en Yaglom (1962, pág. 36), en Hannan (1960), o en Grenander y Rosenblatt (1957).

La expresión [ 38 ] es una integral de Fourier Stieltjes y para nuestros propósitos  $U(\lambda)$  y  $V(\lambda)$  son dos procesos estocásticos referidos a  $\lambda$ , que es continua. Tomando  $X(t)$  con media cero, su función de autocovariancia es

$$R(s, t) = E [ X(t) X(s) ]$$

Ahora bien,

$$X(s) = \int_0^\infty \cos \omega s dU(\omega) + \text{sen } \omega s dV(\omega)$$

en donde  $s$  y  $\omega$  son análogos a  $t$  y  $\lambda$  respectivamente.

Así que

$$E [ X(t) X(s) ] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &\cos \lambda t \cos \omega s E [ dU(\lambda) dU(\omega) ] \\ &+ \text{sen } \lambda t \text{sen } \omega s E [ dV(\lambda) dV(\omega) ] \\ &+ \cos \lambda t \text{sen } \omega s E [ dU(\lambda) dV(\omega) ] \\ &+ \text{sen } \lambda t \cos \omega s E [ dV(\lambda) dU(\omega) ] \end{aligned} \right\} \quad [40]$$

Para que  $R(s, t)$  sea solo función de  $\tau = |t-s|$ , es decir, para que  $X(t)$  sea un proceso estacionario de segundo orden es necesario que

$$E [ dU(\lambda) dU(\omega) ] = E [ dV(\lambda) dV(\omega) ] = \begin{cases} 2dG(\lambda), & \lambda = \omega \\ 0 & \lambda \neq \omega \end{cases} \quad [41]$$

$$E [ dU(\lambda) dV(\omega) ] = E [ dV(\lambda) dU(\omega) ] = 0, \quad \forall \lambda, \omega \quad [42]$$

La función  $G(\lambda)$  se denomina *spectro acumulativo* y su significado se verá más adelante.

Los procesos tales como  $U$  y  $V$ , que cumplen las condiciones [41], se llaman "de incrementos no correlacionados". En definitiva se ve que es necesario, para que  $X(t)$  sea un proceso estacionario de segundo orden, que  $U(\lambda)$  y  $V(\lambda)$  sean dos procesos ortogonales de incrementos no correlacionados.

Bajo tales condiciones puede obtenerse fácilmente

$$R(s, t) = \int_0^{\infty} 2 \cos \lambda t \, dG(\lambda) \quad [43]$$

Volviendo a [38], podemos escribir

$$X(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [ \cos \lambda t \, dU(\lambda) + \text{sen } \lambda t \, dV(\lambda) ] \quad [44]$$

ya que por ser

$$\begin{aligned} \cos \lambda t &= \cos(-\lambda t), \\ \text{sen } \lambda t &= -\text{sen}(-\lambda t) \end{aligned}$$

y dadas las condiciones [39], la función subintegral es par y de aquí simétrica respecto al eje de ordenadas, lo que ha permitido escribir [44].

Haciendo uso de las ecuaciones [29] y realizando algunas operaciones algebraicas, se puede escribir.

$$X(t) = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} [ dU(\lambda) - idV(\lambda) ] + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} [ dU(\lambda) + idV(\lambda) ] \right\} \quad [45]$$

Pero dadas las ecuaciones [39], las dos integrales anteriores tienen igual valor, por lo que

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \tag{46}$$

en donde

$$dZ(\lambda) = \frac{1}{2} [ dU(\lambda) - idV(\lambda) ] \tag{47}$$

La igualdad [ 46 ] se denomina *teorema de Wiener-Khintchine* y constituye la base de la representación espectral. Para comprender las ventajas de esta representación obtengamos algunos resultados más.

La función aleatoria compleja conjugada de  $dZ(\lambda)$  es

$$\overline{dZ(\lambda)} = \frac{1}{2} [ dU(\lambda) + idV(\lambda) ] \tag{48}$$

A partir de [ 47 ] y [ 48 ] y de [ 41 ] y [ 42 ] se tienen los siguientes resultados,

$$E [ dZ(\lambda) dZ(\omega) ] \begin{cases} = dG(\lambda) & \text{para } \lambda = -\omega \\ = 0 & \text{para } \lambda \neq \omega \end{cases}$$

$$E [ \overline{dZ(\lambda)} dZ(\omega) ] \begin{cases} = dG(\lambda) & \text{para } \lambda = \omega \\ = 0 & \text{para } \lambda \neq \omega \end{cases}$$

Volvamos ahora a la expresión de la covariancia

$$R(s, t) = E [ X(s) X(t) ] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda t + \omega s)} E [ dZ(\lambda) dZ(\omega) ] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dG(\lambda) \quad \text{en donde } \tau = |s-t| \tag{49}$$

La *variancia total* del proceso es

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dG(\lambda) \tag{50}$$

Así pues, la variancia del proceso puede concebirse como la acumulación de las contribuciones elementales de cada una de sus componentes periódicas.

Por otra parte, la *función de autocorrelación* del proceso es

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dF(\lambda) \tag{51}$$

en donde

$$dF(\lambda) = dG(\lambda) / R(0) \tag{52}$$

y así

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) = 1 \quad F(-\infty) = 0 \quad \text{y} \quad F(+\infty) = 1$$

F se denomina *función de distribución espectral* y posee, como puede comprobarse, todas las características de una función de distribución.

Se puede demostrar que si

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) = 0 \quad [53]$$

entonces la función de distribución espectral es uniformemente continua. La condición [ 53 ] es muy plausible en los procesos temporales económicos; una componente periódica en  $\rho(\tau)$  destruiría esa propiedad, pero la existencia de tal componente implicaría una componente periódica determinista en  $X(t)$ , lo cual es inverosímil con series económicas. Para los procesos en que se verifica [ 53 ], denominados *indeterminables*, F es uniformemente continua y tenemos que

$$dF(\lambda) = f(\lambda) d\lambda \quad ; \quad dG(\lambda) = g(\lambda) d\lambda \quad [54]$$

La función  $f(\lambda)$ , que cumple todas las características de una función de densidad de probabilidad, se denomina función de *densidad espectral*. La función  $g(\lambda)$  y su representación gráfica, se denominan *espectro*. Está claro que el área bajo el espectro es

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda = dG(\lambda) = R(0) \quad [55]$$

y, por tanto, igual a la variancia total del proceso. De aquí que  $g(\lambda)$  encuentre un significado preciso en términos de la aportación relativa a la variancia del proceso por parte de la componente de frecuencia  $\lambda$ . Así pues, por simple inspección visual, el espectro nos proporciona información sobre las frecuencias correspondientes a las componentes cíclicas dominantes en la serie en cuestión. Esta es en sí, una valiosa información para la detección de ciclos económicos. Por ejemplo, supongamos que se ha estimado el espectro de un proceso a partir de una serie de datos trimestrales y presenta la forma de la figura 2. [Más adelante expondremos las razones por las que la representación espectral con series discretas se reduce al intervalo  $\lambda \in (0, \pi)$ ].

Las concentraciones relativas de variancia o extremos más importantes del espectro de la figura, se presentan en torno a las bandas de frecuencias angulares  $\lambda_1 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\lambda_2 \cong \pi/4$ ,  $\lambda_3 = \pi/2$  y  $\lambda_4 = \pi$  radianes/trimestre. Esto significa que hay

evidencia de la existencia de ciclos de periodos  $T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$  trimestres = 4 años y

$T_2 \cong 2$  a 2,5 años, así como de dos componentes estacionales de periodos iguales a 1 año y a 2 trimestres, respectivamente. Las series económicas reales presentan espectros de este tipo.

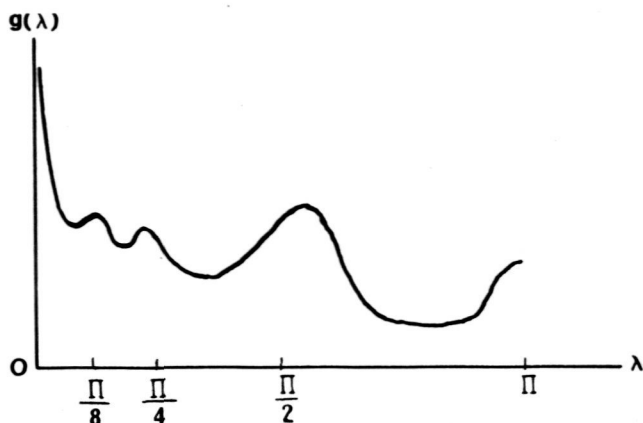


Fig. 2

Un significado análogo posee  $f(\lambda)$ , ya que

$$f(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{R(0)} \quad [ 56 ]$$

A diferencia con  $g(\lambda)$ , el área bajo  $f(\lambda)$  es igual a la unidad, como corresponde a una función de densidad.

Como quiera que

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} g(\lambda) d\lambda \quad [ 57 ]$$

$R(\tau)$  y  $g(\lambda)$  forman una pareja transformada de Fourier, por lo que escribiendo la inversa de [ 57 ] tenemos

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau) d\tau \quad [ 58 ]$$

Análogamente,  $\rho(\tau)$  y  $f(\lambda)$  forman una pareja transformada de Fourier, por lo que

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \rho(\tau) d\tau \quad [ 59 ]$$

### **Interpretación de la representación espectral**

Como la función de autocovariancia y la función de densidad espectral forman una pareja transformada de Fourier, ambas contienen la misma información y conociendo una se puede determinar la otra.

Ya se indicó que una de las ventajas generales del uso de los métodos espectrales en su mayor valor interpretativo. En el caso concreto que estamos examinando, este hecho se traduce en que la función de densidad espectral, es más fácil de interpretar que la función de autocorrelación.

Uno de los principales fines del análisis de las series económicas consiste en descomponer la serie temporal en tendencias, componentes cíclicas, componentes estacionales y componentes irregulares, con el fin de estudiarlas separadamente. Pues bien, como ya se ha dicho, al aplicar los métodos espectrales estamos contemplando la serie temporal como formada por infinitas componentes cíclicas de amplitudes aleatorias ortogonales, de diferentes periodos, tales que entre todas proporcionen la variancia total del proceso. El espectro nos pone de manifiesto cuál es la contribución de cada componente (a cada banda de frecuencia) en la variancia total del proceso. De aquí que una simple inspección del mismo permite conocer los períodos de las componentes cíclicas más importantes en la variabilidad de la serie.

La representación de la función de autocovariancia no proporciona esta clase de información. Esta describe el mayor o menor grado de autocorrelación entre las componentes del proceso con uno, dos o más periodos de desfase temporal. Pero también la inspección del espectro permite tener una idea sobre el grado de autocorrelación de primer orden existente en el proceso. En efecto, procesos más autocorrelacionados tienden a presentar una variabilidad menor a corto plazo, es decir, tienden a presentar componentes cíclicas de períodos más largos o, en términos del espectro, presentan una mayor concentración de variancia en el rango de frecuencias bajas.

Entre la función de densidad espectral y la función de autocorrelación existe la misma relación que entre una función de densidad de probabilidad y la correspondiente función característica. Y de la misma forma que la representación gráfica de la función de densidad es más informativa que la de la función característica, lo mismo ocurre con el espectro en la relación con el correlograma. La función de densidad espectral es aditiva y su acumulación presenta un significado bien definido en términos de la variancia del proceso. En cambio, ni la función de autocovariancia ni la de autocorrelación son aditivas; tampoco sus representaciones gráficas son claramente interpretables en todos sus detalles.

## **4. PROCESOS DISCRETOS, MUESTREO Y ALIGACION**

Hasta ahora nos hemos referido a procesos estocásticos continuos. Sin embargo, en economía los datos se observan periódicamente, es decir, la información económica viene referida a intervalos temporales unitarios discretos tales como, el mes,

trimestre, el año. Este hecho nos obliga a considerar los conceptos espectrales referidos a procesos estocásticos discretos.

Para el proceso discreto  $\{X_t\}$ , toma los valores  $0, \pm 1, \dots, \pm \infty$ .

Las expresiones anteriores en que aparece  $\tau$  han de modificarse adecuadamente cambiando integrales por sumas. En cuanto a  $\lambda$ , sigue siendo continua pero su dominio es ahora  $(-\pi, \pi)$ . Este hecho puede comprenderse intuitivamente con un ejemplo. Supongamos que la unidad temporal es el mes. En este caso, es evidente que en  $X_t$  solo se podrían observar componentes cíclicas de periodos superiores a 2 meses, es decir, de frecuencias angulares inferiores a  $2\pi/2 = \pi$  radianes/mes.

El espectro de un proceso estocástico discreto queda por tanto delimitado entre las abscisas  $-\pi$  y  $\pi$ . Gracias a la simetría, el espectro se puede describir completamente en el intervalo  $(0, \pi)$ .

Si el proceso discreto  $X_t$  es el resultado de muestrear el proceso continuo  $X(t)$  a intervalos temporales discretos, pueden presentarse problemas. En efecto, si en el proceso  $X(t)$  existen componentes cíclicas de frecuencias superiores a  $\pi$  radianes/unidad temporal, resultarán ser inobservables con la unidad temporal elegida, pero además se superpondrán a las componentes periódicas observables de frecuencias submúltiplos de ellas, creando cierta ambigüedad como la fig. 3 ilustra. Este fenómeno se denomina aligación (término con que traducimos la expresión anglosajona *aliasing*, y que significa enlace, trabazón o unión).

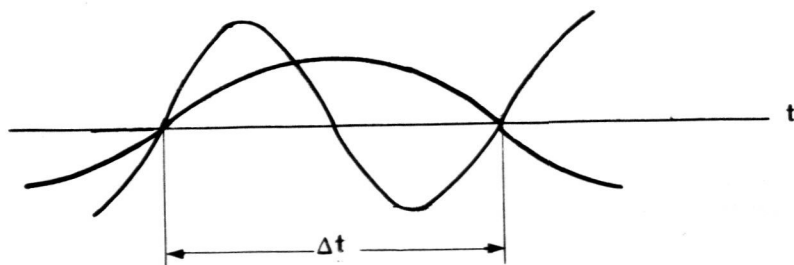


Fig. 3

*Aligación. Las dos componentes se confunden bajo muestreo a intervalos  $\Delta t$*

Así pues, si la unidad temporal no es suficientemente pequeña como para poder observar posibles componentes cíclicas relevantes, se crean dos efectos: la pérdida de información acerca de las componentes cíclicas inobservables y la aligación. Ambos efectos se traducen en que el espectro de  $X_t$  no sea el fiel reflejo del espectro de  $X(t)$ .

Estas consecuencias del muestreo a intervalos discretos han de tenerse bien presentes al interpretar las estimaciones espectrales. Por ejemplo, en el espectro de



la fig. 2, referido a datos trimestrales, se observa la existencia de dos fuertes componentes, una de 2 trimestres de período y la otra anual. Pues bien, es muy probable que con series reales lo que ocurra es que existe una componente estacional trimestral fuerte (inobservable con datos trimestrales, pero que se podría observar con datos mensuales por ejemplo), que se ha "aliado" a las otras componentes periódicas, semestral y anual, y a otras cuyos periodos son múltiplos del trimestre, reforzando así, su verdadera importancia.

Con el tiempo discreto,  $t, \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$ ,  $-\pi \leq \lambda \leq \pi$  y las expresiones equivalentes a las que ya se han estudiado son

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda \tau} z(\lambda) d\tau \quad [60]$$

$$z(\lambda) = \frac{1}{2} [\mu(\lambda) - iv(\lambda)] \quad [61]$$

$$\text{en donde } dU(\lambda) = \mu(\lambda) d\lambda \text{ y } dV(\lambda) = v(\lambda) d\lambda \quad [62]$$

lo cual se cumple cuando  $Z$  es continua, lo que ocurre cuando el proceso es indeterminable. Además.

$$R_\tau = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda \tau} g(\lambda) d\lambda \quad [63]$$

$$\rho_\tau = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda \tau} f(\lambda) d\lambda \quad [64]$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_\tau e^{-i\lambda \tau} \quad [65]$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho_\tau e^{-i\lambda \tau} \quad [66]$$

Las representaciones espectrales de los procesos estocásticos estacionarios discretos más usuales en nuestro campo se pueden consultar en Pena (1970).

El caso más sencillo, aunque no por ello menos importante, es el del proceso puramente aleatorio. Este se define, como es sabido, como una sucesión de variables aleatorias de medias nulas, variancias constantes y covariancias nulas. Representando tal proceso por  $\{e_t\}$  tenemos

$$R_\tau = E(e_t e_{t+\tau}) \begin{cases} = \sigma^2 & \text{para } \tau = 0 \\ = 0 & \text{para } \tau = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad [67]$$

El espectro es, según [65],

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_\tau e^{-i\lambda \tau} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad [68]$$

El *espectro* es pues un segmento paralelo al eje de abscisas entre  $(-\pi, \pi)$ .

A menudo, este proceso entra en los modelos como una perturbación de origen desconocido o muy complejo, atribuible al azar. La forma de su espectro expresa que en la naturaleza del proceso no hay ninguna fuente de carácter preponderante.

## 5. FILTROS LINEALES

Un *filtro lineal* es una transformación lineal realizada en los datos originales. Si se tiene una sucesión  $\{X_t\}$  y la sometemos a la siguiente operación.

$$\tilde{X}_t = \sum_{s=-p}^q a_s X_{t-s} \quad \text{con} \quad \sum_{s=-p}^q a_s^2 < \infty \quad [69]$$

en donde los  $a_s$  son reales y  $p$  y  $q$  son constantes positivas, la sucesión  $\{\tilde{X}_t\}$  se denomina filtrada.

Estas son la clase de operaciones que se realizan, por ejemplo, para corregir series no estacionarias de sus tendencias en la media o en la variancia, o para eliminar las componentes cíclicas anuales de una serie, por ejemplo, trimestral, así como para la desestacionalización de las series económicas.

Por ejemplo, una operación que permite reducir la componente anual de las series mensuales al mismo tiempo que reduce posibles tendencias en la media, es la siguiente —Granger y Hatanaka (1964), pags. 70 y 71—.

$$\tilde{X}_t = \sum_{s=-12}^{12} a_s X_{t-s} \quad [70]$$

en donde

$$a_j \begin{cases} = 6 + A, & |j| = 0 \\ = \frac{1}{2} & |j| = 1, 2, \dots, 6 \\ = 0 & |j| = 7, 8, \dots, 11 \\ = -A & |j| = 12 \end{cases} \quad [71]$$

Los efectos de los filtros sobre las series originales no aparecen claros cuando se contemplan bajo el enfoque del dominio temporal. La ventaja del enfoque espectral en esta área de problemas es decisiva.

Obtengamos la función de autocovariancia de  $\tilde{X}_t$  en [69]

$$\tilde{R}_\tau = E [ (\tilde{X}_t - \tilde{\mu}) (\tilde{X}_{t+\tau} - \tilde{\mu}) ]$$

$$\text{con} \quad \tilde{X}_{t+\tau} = \sum_{r=-p}^q a_r X_{t+\tau-r} \quad \text{y} \quad \tilde{\mu} = E(\tilde{X}_t) = \sum_{s=-p}^q a_s \mu$$

$$\text{en donde } \mu = E(X_t)$$

Así pues

$$\begin{aligned} \tilde{R}_T &= E \left\{ \left[ \sum_{r=p}^q a_r (X_{t+\tau_r} - \mu) \right] \left[ \sum_{s=p}^q a_s (X_{t-s} - \mu) \right] \right\} \\ &= \sum_{\substack{r,s=p \\ q}} a_r a_s E \left[ (X_{t+\tau_r} - \mu) (X_{t-s} - \mu) \right] \\ &= \sum_{r,s=p} a_r a_s R_{\tau_r - s} \end{aligned} \quad [72]$$

A simple vista se comprueba la dificultad de analizar los efectos del filtrado a través de [72], es decir, bajo el enfoque del dominio temporal. Veamos tales efectos en el dominio frecuencial

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \tilde{R}_\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{r,s=p}^q a_r a_s e^{-i\lambda\tau} R_{\tau_r - s} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=p}^q a_r e^{i\lambda\tau} \sum_{s=p}^q a_s e^{-i\lambda s} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_\tau \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta [65], queda

$$\tilde{g}(\lambda) = |A(\lambda)|^2 g(\lambda) \quad [73]$$

en donde

$$A(\lambda) = \sum_{s=p}^q a_s e^{-i\lambda s} \quad [74]$$

se domina *función de respuesta frecuencial o función de transferencia*. Por [73] comprobamos que un filtro lineal produce una amplificación o una atenuación de la contribución de cada componente armónica elemental del proceso original, según que  $|A(\lambda)|^2$  sea respectivamente mayor o menor que la unidad en la correspondiente banda de frecuencias. También [73] nos informa de que promediar en el dominio temporal, equivale a multiplicar en el dominio frecuencial.

Para estudiar con más detalle el efecto del filtrado, acudimos al propio proceso y su representación compleja [60], según la cuál [69] puede escribirse así

$$\tilde{X}_t = \sum_{s=p}^q a_s \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-s)} z(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} A(\lambda) z(\lambda) d\lambda \quad [75]$$

Ahora bien, por ser, en general,  $A(\lambda)$  compleja

$$A(\lambda) \equiv A_1(\lambda) + iA_2(\lambda) \equiv G(\lambda) e^{i\phi(\lambda)} \quad [76]$$

en donde

$$|A(\lambda)| = G(\lambda) = [A_1^2(\lambda) + A_2^2(\lambda)]^{1/2} \quad [77]$$

$$y \quad \operatorname{tg} \Phi(\lambda) = A_2(\lambda) / A_1(\lambda) \quad [ 78 ]$$

$G(\lambda)$  se denomina *ganancia* y  $\Phi(\lambda)$  ángulo de fase.

Por otra parte,

$$z(\lambda) = u(\lambda) - iv(\lambda) = |z(\lambda)| e^{-i\theta(\lambda)} \quad [ 79 ]$$

en donde

$$z(\lambda) = [u^2(\lambda) + v^2(\lambda)]^{1/2} \quad [ 80 ]$$

$$y \quad \operatorname{tg}\theta(\lambda) = \frac{v(\lambda)}{u(\lambda)} \quad [ 81 ]$$

Así que teniendo en cuenta [ 79 ], [ 69 ] puede escribirse así

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\lambda t - \theta(\lambda)]} z(\lambda) d\lambda \quad [ 82 ]$$

y según [ 77 ] y [ 79 ], la expresión [ 75 ] es equivalente a

$$\tilde{X}_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[\lambda t - \theta(\lambda) + \Phi(\lambda)]} G(\lambda) z(\lambda) d\lambda \quad [ 83 ]$$

La comparación de [ 83. ] y [ 82 ] nos lleva a la conclusión de que el filtrado produce dos efectos, a saber:

- (a) Una amplificación a atenuación de cada amplitud a su correspondiente frecuencia  $\lambda$ , de acuerdo con el factor  $G(\lambda)$ .
- (b) Un cambio del ángulo de fase a cada frecuencia, pasando de  $-\theta(\lambda)$  a  $-\theta(\lambda) + \Phi(\lambda)$ . Este último efecto es más difícil de interpretar intuitivamente pero puede identificarse con posibles distorsiones del espectro. Hay una ambigüedad inherente a  $\Phi(\lambda)$  ya que:  $\Phi(\lambda) \pm 2\pi K = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [ A_2(\lambda) / A_1(\lambda) ]$ , lo que impide discernir entre adelantos y retrasos de ángulos de fase.

Usualmente el efecto de un cambio del ángulo de fase no es deseable, porque por lo general lo que se pretende con los filtros es amplificar o atenuar la importancia de algunas componentes periódicas sin producir otras variaciones en el espectro básico. Más adelante tendremos ocasión de considerar diversas aplicaciones

de los filtros en el análisis de series temporales económicas. Dos referencias básicas para este importante tema de las aplicaciones de los filtros al campo económico son Nerlove (1964) y Granger y Hatanaka (1964).

## 6. REPRESENTACION ESPECTRAL BIVARIANTE DE PROCESOS ESTOCASTICOS CONJUNTAMENTE ESTACIONARIOS DE SEGUNDO ORDEN.—

El análisis espectral univariante permite en Econometría el tratamiento riguroso de varias cuestiones de interés: la localización de componentes periódicas relevantes, la eliminación de tendencias en las medias y variancias, la desestacionalización, la verificación de hipótesis de ausencia de autocorrelación en el término de perturbación aleatoria de los modelos econométricos, la predicción de las variables exógenas de un modelo econométrico, el análisis dinámico de las características cíclicas de las variables endógenas de un modelo econométrico, etc. Todas estas son aplicaciones que comentaremos en la sección 9.

Sin embargo, la Econometría trata más de las interrelaciones entre las series económicas que de su estudio aislado. En este sentido, el caso más sencillo y típico estudiado en Econometría es el denominado modelo con un retardo distribuido. El análisis espectral bivariante proporciona una visión e interpretación profunda de este tipo de relación y sus problemas de aproximación discreta mediante el muestreo realizado a intervalos periódicos. También propone estimadores de los coeficientes de la interrelación que presentan determinadas ventajas comparativas frente a los estimadores diseñados bajo el enfoque del dominio temporal.

Para comenzar con el tema, consideramos dos procesos  $X_t$  e  $Y_t$  de covariancia estacionaria, cuyas medias son

$$E(X_t) = \mu_x \quad \text{y} \quad E(Y_t) = \mu_y \quad [84]$$

y sus funciones de autocovariancias respectivas

$$R_{x,\tau} = E[(X_t - \mu_x)(X_{t+\tau} - \mu_x)] \quad [85]$$

$$R_{y,\tau} = E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t+\tau} - \mu_y)] \quad [86]$$

funciones de autocorrelación

$$\rho_{x,\tau} = \frac{R_{x,\tau}}{R_{x,0}} \quad \text{y} \quad \rho_{y,\tau} = \frac{R_{y,\tau}}{R_{y,0}} \quad [87]$$

y espectros

$$g_x = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_{x,\tau} \quad \text{y} \quad g_y = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_{y,\tau} \quad [88]$$

Considerando a las series desde un punto de vista bivalente, existen también las funciones de covarianza mixta y de correlación mixta, siguientes

$$R_{xy,\tau} = E [(X_t - \mu_x) (Y_{t+\tau} - \mu_y)] \quad [89]$$

$$y \quad \rho_{xy,\tau} = \frac{R_{xy,\tau}}{R_{xy,0}} \quad \text{con} \quad -1 \leq \rho_{xy,\tau} \leq 1 \quad [90]$$

Para que los procesos  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  sean conjuntamente estacionarios de segundo orden, hace falta no sólo que cada uno de ellos lo sea, sino que además, la función de covarianza (y de aquí la de correlación) han de depender exclusivamente de  $\tau$ . (Esto justifica las notaciones usadas en [89] y [90]).

Ni la función de correlación  $\rho_{xy,\tau}$  ni la de covarianza  $R_{xy,\tau}$  han de ser pares, puesto que no existirá, en general, el mismo grado de asociación entre  $X_t$  e  $Y_{t+\tau}$  que entre  $X_t$  e  $Y_{t-\tau}$ . Si hay un grado de asociación superior cuando  $Y$  se toma adelantada respecto a la  $X$ , el hecho es indicativo de una relación causal que va de  $X$  a  $Y$ , ya que la causa precede siempre al efecto.

A continuación procedemos a la obtención de los resultados básicos para la representación espectral de la interrelación entre ambos procesos. Considerando el tiempo discreto, tenemos

$$X_t = \int_0^\pi [\cos \lambda t dU_x(\lambda) + \text{sen } \lambda t dV_x(\lambda)] \quad [91]$$

$$Y_{t+\tau} = \int_0^\pi [\cos \omega(t+\tau) dU_y(\omega) + \text{sen } \omega(t+\tau) dV_y(\omega)] \quad [92]$$

Podemos operar con desviaciones respecto a  $\mu_x$  y  $\mu_y$  y reducir los procesos a otros con media nula. Sin pérdida de generalidad supondremos, pues, que  $\mu_x = \mu_y = 0$ . Entonces.

$$R_{xy,\tau} = E [X_t Y_{t+\tau}]$$

$$y \quad E(X_t Y_{t+\tau}) = \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ \begin{aligned} &\cos \lambda t \cos \omega(t+\tau) E [dU_x(\lambda) dU_y(\omega)] \\ &+ \text{sen } \lambda t \text{sen } \omega(t+\tau) E [dV_x(\lambda) dV_y(\omega)] \\ &+ \cos \lambda t \text{sen } \omega(t+\tau) E [dU_x(\lambda) dV_y(\omega)] \\ &+ \text{sen } \lambda t \cos \omega(t+\tau) E [dV_x(\lambda) dU_y(\omega)] \end{aligned} \right\} [93]$$

Para que esta expresión sea independiente de  $t$  hace falta que

$$E [dU_x(\lambda) dU_y(\omega)] \left\{ \begin{aligned} &= dC(\lambda) \quad \text{para } \lambda = \omega \quad [94] \end{aligned} \right.$$

$$= E [dV_x(\lambda) dV_y(\omega)] \left\{ \begin{aligned} &= \quad \quad \quad \text{para } \lambda \neq \omega \quad [95] \end{aligned} \right.$$

$$E [dU_x(\lambda) dV_y(\omega)] \left\{ \begin{aligned} &= dQ(\lambda) \quad \text{para } \lambda = \omega \quad [96] \end{aligned} \right.$$

$$= -E [dV_x(\lambda) dU_y(\omega)] \left\{ \begin{aligned} &= 0 \quad \text{para } \lambda \neq \omega \quad [97] \end{aligned} \right.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 R_{xy,\tau} &= \int_0^{\pi} [ \cos \lambda t \cos \lambda (t+\tau) \, dC(\lambda) \\
 &\quad + \sin \lambda t \sin \lambda (t+\tau) \, dC(\lambda) \\
 &\quad + \cos \lambda t \sin \lambda (t+\tau) \, dQ(\lambda) \\
 &\quad - \sin \lambda t \cos \lambda (t+\tau) \, dQ(\lambda) ] \\
 &= [ \cos \lambda \tau dC(\lambda) + \sin \lambda \tau dQ(\lambda) ] \quad [ 98 ]
 \end{aligned}$$

Si admitimos que no existen componentes periódicas deterministas las funciones C y Q son continuas, por lo que

$$dC(\lambda) = c(\lambda) \, d\lambda \quad y \quad dQ(\lambda) = q(\lambda) \, d\lambda \quad [ 99 ]$$

$$\text{con} \quad c(\lambda) = c(-\lambda) \quad y \quad q(\lambda) = -q(-\lambda)$$

Se puede transformar [ 98 ] haciendo uso de las relaciones [ 29 ], y si además establecemos que

$$c(\lambda) - i q(\lambda) = g_{xy}(\lambda); \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad [ 100 ]$$

puede obtenerse sin dificultad

$$R_{xy,\tau} = \int_{-\pi}^{\pi} g_{xy}(\lambda) \, e^{i\lambda\tau} \, d\lambda \quad [ 101 ]$$

Así que  $R_{xy,\tau}$  y  $g_{xy}$  forman una pareja transformada de Fourier. La relación inversa de [ 101 ] es

$$\begin{aligned}
 g_{xy}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_{xy,\tau} \quad [ 102 ] \\
 \tau &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

A la función compleja  $g_{xy}(\lambda)$  la denominaremos *espectro mixto* (*cross spectrum*), a su parte real,  $c(\lambda)$ , *coespectro* (*cospectrum*) y a su parte imaginaria,  $q(\lambda)$ , *espectro de cuadratura* (*quadrature spectrum*).

El espectro de una serie aislada es una función real, pero el espectro mixto de dos series es, en general, compleja, por lo que, aunque contenga toda la información necesaria, hay que acudir a otras funciones reales relacionadas con la misma. Tales funciones son la *coherencia*,  $\gamma_{xy}(\lambda)$ , la *ganancia*  $G_{xy}(\lambda)$  y la *fase*  $\Phi_{xy}(\lambda)$ , que pasamos a definir.

La *coherencia* a la frecuencia  $\lambda$  se define mediante la expresión

$$\gamma_{xy}(\lambda) = \frac{|g_{xy}(\lambda)|}{[g_x(\lambda)g_y(\lambda)]^{1/2}} \quad [ 103 ]$$

expresión formalmente análoga a la de un coeficiente de correlación. Su valor está comprendido entre cero y uno.

La *ganancia* se define como un coeficiente de regresión

$$G_{xy}(\lambda) = \frac{|g_{xy}(\lambda)|}{g_x(\lambda)} \quad [104]$$

La *fase* se define mediante la expresión

$$\phi_{xy}(\lambda) = \text{arc tg} [-q(\lambda) / c(\lambda)] \quad [105]$$

### 7.— INTERPRETACION DE LAS FUNCIONES DEL ANALISIS ESPECTRAL BIVARIANTE EN TERMINOS DE LOS MODELOS ECONOMETRICOS CON RETARDOS DISTRIBUIDOS

Los conceptos que acabamos de definir no tienen una interpretación obvia, aunque se les puede dotar de cierto significado en términos de modelos formulados en el dominio temporal, conocidos en la literatura econométrica como modelos con retardos distribuidos.

Un modelo con un retardo distribuido consiste en la relación lineal siguiente

$$Y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s X_{t-s} + u_t \quad \text{con} \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s^2 < \infty \quad [106]$$

en donde  $\{u_t\}$  es estacionario de segundo orden, su media es cero y está incorrelacionado con  $\{X_t\}$ . (El término  $u_t$  recoge posibles errores en la forma funcional especificada, así como la influencia de un conjunto de variables que influyen en la variable económica  $Y$ , pero que son individualmente irrelevantes; tanto  $X$  como  $Y$  se suponen medidas sin errores de observación. Así quedan justificadas las hipótesis anteriores acerca de  $\{u_t\}$ ).

Los  $b_s$  se denominan coeficientes de reacción. Por lo general en las aplicaciones económicas se admite a priori cuál es la causa y cuál el efecto. Al aparecer  $X_t$  en el segundo miembro, se admite que ésta es explicativa, y  $s$  toma solo valores positivos; sin embargo, estadísticamente es consistente considerar valores negativos de  $s$ .

Bajo los supuestos de estacionariedad simple y conjunta de  $\{X_t\}$  y de  $\{Y_t\}$ , y tomando las medias de estos procesos iguales a cero, la función de covariancia mixta es

$$R_{xy,\tau} = E[Y_{t+\tau} X_t] = E\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s X_{t+\tau-s} X_t\right]$$



dado que  $\{u_t\}$  y  $\{X_t\}$  están incorrelacionados; de modo que queda

$$R_{xy, \tau} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s R_{x, \tau-s} \quad [107]$$

y por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\tau} g_{xy}(\lambda) d\lambda = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(\tau-s)} g(\lambda) d\lambda \quad [108]$$

por lo que

$$g_{xy}(\lambda) = A(\lambda) g_x(\lambda) \quad [109]$$

en donde  $A(\lambda)$  es la función de respuesta frecuencial

$$A(\lambda) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s e^{-i\lambda s} \quad [110]$$

Según [109] y [110], la transformada de Fourier de la sucesión de coeficientes de reacción puede obtenerse a partir de las estimaciones del espectro mixto y del espectro de  $\{X_t\}$ . Este resultado es la base de un procedimiento de estimación de retardos distribuidos, denominado método ineficiente de Hannan, de uso frecuente en las aplicaciones de este género - Hannan (1965).

De [109] se deduce que

$$A(\lambda) = \frac{g_{xy}(\lambda)}{g_x(\lambda)} = G_{xy}(\lambda) e^{i\phi_{xy}(\lambda)} \quad [111]$$

en donde la última igualdad se deduce de las definiciones de [104] y [105]. Así quedan justificadas las denominaciones de  $G_{xy}(\lambda)$  y de  $\phi_{xy}(\lambda)$  en la terminología de los filtros. (Obsérvese que, en general,  $\{u_t\}$  es distinto de cero, por lo que  $\{Y_t\}$  es solo aproximadamente una transformación lineal de  $\{X_t\}$ ).

Por otra parte, de la expresión [106] se deduce que

$$R_{xy, \tau} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_i R_{x, \tau+j-k} + R_{y, \tau} \quad [112]$$

en donde  $R_{y, \tau}$  y  $R_{y, \tau}$  son las autocovariancias de  $\{Y_t\}$  y de  $\{u_t\}$ , respectivamente. Tomando transformadas de Fourier

$$g_y(\lambda) = |A(\lambda)|^2 g_x(\lambda) + g_u(\lambda) \quad [113]$$

Esta expresión nos informa que la variancia de  $Y$  puede descomponerse en dos partes, una cuya fuente es la variable  $X$  a través de su relación con  $Y$ , y la otra debida a la perturbación  $u$ .

Por combinación de [103], [104], [111] y [113], se tiene

$$g_u(\lambda) = g_y(\lambda) \left\{ 1 - [\gamma_{xy}(\lambda)]^2 \right\} \quad [114]$$

Según esta ecuación, una coherencia igual a la unidad implica que el espectro de  $\{u_t\}$  se anula, en tal caso existe una combinación perfecta entre  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  a cada frecuencia, y se puede obtener exactamente  $\{Y_t\}$  mediante una operación de filtrado de  $\{X_t\}$

Según [111],  $|A(\lambda)| = G_{xy}(\lambda)$ , y por [113] comprobamos que el significado de la ganancia está relacionado con la cantidad por la que hay que multiplicar cada ordenada del espectro de  $\{X_t\}$  para obtener aproximadamente la ordenada correspondiente a cada frecuencia en el espectro de  $\{Y_t\}$ .

Para continuar con la ilustración de estos conceptos consideremos a continuación algunos modelos particulares.

El caso más simple es el modelo de un retardo fijo

$$Y_t = b_r X_{t-r} + u_t \quad [115]$$

Por [110] tenemos para este caso

$$A(\lambda) = b_r e^{-i\lambda r}$$

Identificando las partes real e imaginaria con las correspondientes a la expresión [111], se tiene

$$G_{xy}(\lambda) = b_r \quad [116]$$

$$\phi_{xy}(\lambda) = -\lambda r \quad [117]$$

Así pues, para este modelo la ganancia es constante para todas las frecuencias. La constancia de  $G_{xy}(\lambda)$  no va acompañada de la de la fase, cuya representación gráfica es la de la línea recta con pendiente igual al número de periodos del retardo fijo. En las figuras 4 y 5 aparecen las correspondientes representaciones gráficas.

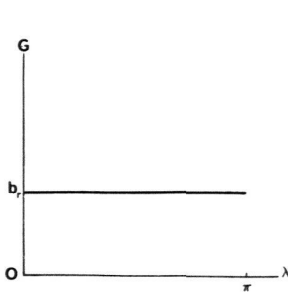


Fig. 4

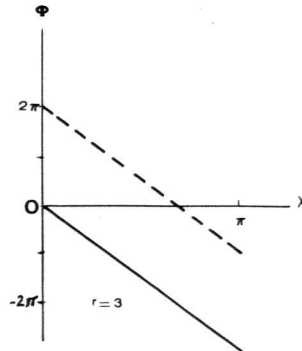


Fig. 5

La línea de puntos en el gráfico de  $\Phi_{xy}(\lambda)$  indica la incertidumbre inherente al valor del ángulo de fase. (Se ha trazado a una distancia vertical fija de  $2\pi$  radianes, pero en general, la ambigüedad se extiende a un término de valor  $\pm 2\pi K$ , con  $K = 1, 2, 3, \dots$ )

Para modelos más complicados ni la ganancia es constante ni la fase tiene pendiente constante.

A frecuencias bajas,  $e^{-i\lambda s}$  tiende a la unidad, por lo que según [ 110 ] y [ 111 ], la ganancia se aproxima a  $\sum_s b_s$ , valor que coincide con el multiplicador a largo plazo. Por otra parte, puede demostrarse que la pendiente de  $\Phi_{xy}(\lambda)$  próxima a  $\lambda = 0$  es igual al retardo medio<sup>1</sup>

A título ilustrativo consideremos ahora el siguiente modelo

$$Y_t = b_0 X_t + b_1 X_{t-1} + u_t \quad [ 118 ]$$

En este caso

$$A(\lambda) = b_0 + b_1 e^{-i\lambda}$$

Según [ 111 ], el módulo de  $A(\lambda)$  es la ganancia, y su argumento la fase  $\Phi_{xy}(\lambda)$ . Así que

$$G_{xy}(\lambda) = \sqrt{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \cos \lambda} \quad [ 119 ]$$

$$y \quad \Phi(\lambda) = \arctan \left( -\frac{b_1 \sin \lambda}{b_0 + b_1 \cos \lambda} \right) \quad [ 120 ]$$

Estas funciones están representadas en las figuras 6 y 7

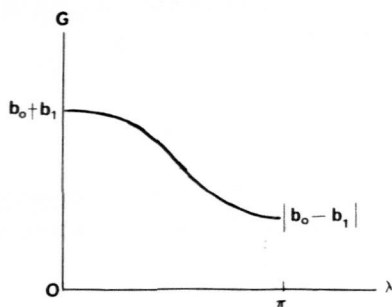


Fig. 6

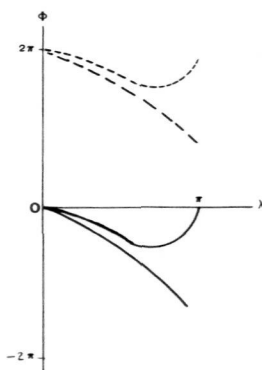


Fig. 7

1. El retardo medio es un concepto que surge cuando los  $b_s$  son todos no negativos. Definiendo  $w_s = b_s / \sum b_s$ , se puede identificar cada  $w_s$  con la probabilidad asignada al entero no negativo  $s$ . La media de la distribución de probabilidad es  $\sum s w_s$ , y se le denomina retardo medio. Para más detalles sobre este concepto, consultar Otero (1974, págs. 83-87).

Continuando con los ejemplos pasemos a considerar el modelo del acelerador

$$Y_t = b (X_t - X_{t-1}) + u_t \quad b > 0 \quad [ 121 ]$$

Para este se tiene

$$A(\lambda) = b (1 - e^{-i\lambda}) = b (1 - \cos \lambda) + i b \operatorname{sen} \lambda \quad [ 122 ]$$

y de aquí

$$G_{xy}(\lambda) = b \sqrt{2(1 - \cos \lambda)} \quad [ 123 ]$$

$$\phi_{xy}(\lambda) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} \lambda}{1 - \cos \lambda} \quad [ 124 ]$$

Las ecuaciones [ 123 ] y [ 124 ] aparecen representadas en las figuras 8 y 9.

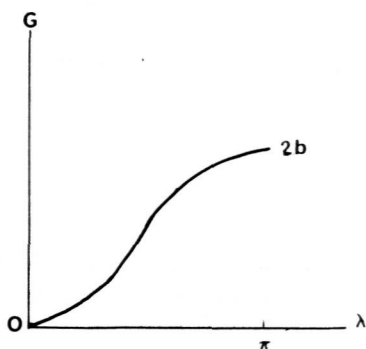


Fig. 8

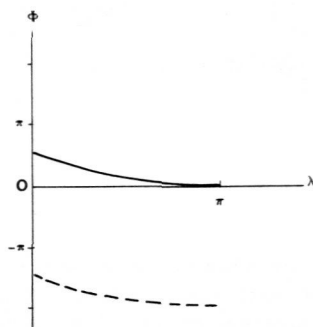


Fig. 9

Y como última ilustración consideremos el retardo de estructura geométrica, tan popular en los trabajos econométricos aplicados de la última década.

Este se define de modo que

$$b_s = \delta^s b_0 \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad 0 \leq \delta < 1 \quad [ 125 ]$$

Por lo tanto,

$$A(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} b_0 \delta^s e^{-i\lambda s} = \frac{b_0}{1 - \delta e^{-i\lambda}} \quad [ 126 ]$$

$$y \quad G_{xy}(\lambda) = \frac{b_0}{\sqrt{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \lambda}} \quad [127]$$

$$\phi_{xy}(\lambda) = \arctg \left( -\frac{\delta \operatorname{sen} \lambda}{1 - \delta \cos \lambda} \right) \quad [128]$$

cuyas representaciones gráficas están en las figuras 10 y 11.

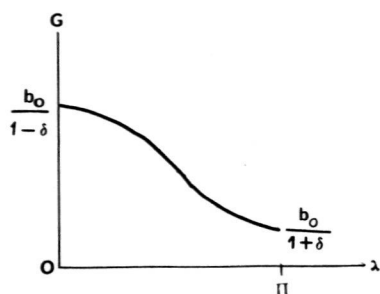


Fig. 10

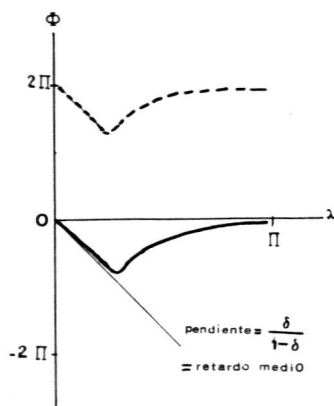


Fig. 11

Comparando las figuras 6 y 10 con la 8 se comprueba que en los modelos en diferencias (tipo acelerador), la ganancia es una función creciente, mientras que en los modelos con distribuciones de retardos en que los coeficientes del retardo son todos positivos, la ganancia es una función decreciente.

Existen programas de ordenador que proporcionan estimaciones de las ganancias y de la fase así como sus correspondientes gráficos. Tal es el caso del sistema de programas TROLL (Trade Reactive On Line Laboratory) del *Massachusetts Institute of Technology*.

Engle (1974), recomienda el uso de las figuras anteriores para compararlas con el gráfico arrojado por el ordenador para un conjunto de datos. De esta manera, se puede saber si el retardo estimado es aproximadamente igual a alguno de los casos simples examinados o a alguna combinación de los mismos<sup>2</sup>. Así se puede interpretar

2. Dos retardos en serie o cascada dan lugar a otro retardo de función generatriz igual al producto de sus funciones generatrices —véase Otero (1974) págs. 33-35 y 83-87—. Esto implica que la ganancia total se obtenga como producto de las ganancias individuales y que la fase sea igual a la suma de las fases. Este hecho puede utilizarse en el caso de que el gráfico correspondiente a una estimación no se ajuste a ninguno de los casos simples antes considerados, pero pueda aproximarse a la combinación de los mismos que implican dos o más retardos en serie.

tar en términos del dominio temporal los resultados de una estimación espectral llevada a cabo con un retardo distribuido.

### 8. INFERENCIA ESTADISTICA BAJO EL ENFOQUE ESPECTRAL.

#### Ergodicidad

Las series temporales que manejamos en Econometría son históricas, es decir, no proceden de la experimentación y, por tanto, son irrepetibles. Una serie temporal puede contemplarse como una sola prueba de un experimento aleatorio multivariante, y constituye lo que se denomina una realización del proceso.

Para hacer inferencias estadísticas en problemas donde interviene una sola variable aleatoria, es necesario recurrir a la repetición de experimentos. Si esta repetición de pruebas fuese necesaria con todos los procesos estocásticos, la Economía plantearía problemas de inferencia estadística prácticamente inabordables. Afortunadamente esto no es así, porque se puede demostrar que cuando un proceso estocástico cumple ciertas condiciones es posible estimar consistentemente sus características a partir de una realización del mismo. Los procesos que cumplen tales condiciones se denominan *ergódicos*.

Por ejemplo, un proceso estocástico estacionario es ergódico en la media,  $\mu$ , si es posible estimar consistentemente este parámetro haciendo uso de la *media temporal*, que se define como

$$\mu_T = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \tag{129}$$

Obsérvese que la media  $\mu$  es un parámetro definido sobre el espacio muestral, es decir,

$$\mu = E(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \, dF(\xi, t) \tag{130}$$

en donde

$X_t = \{X(t, \omega), \omega \in \Omega/t\}$  y de esta forma  $t$  permanece fijo en la función subintegral. Cada  $X_t$  es así, una variable aleatoria (y todas las  $X_t$  tienen igual media  $\mu$  si el proceso es estacionario). En cambio, en [ 129 ], hemos primero de considerar  $X_t = \{X(t, \omega) \mid t \in T/\omega\}$ , es decir, que  $X_t$  es una función de  $t$  discreta determinista a la cual se extiende la suma. Después, al ir considerando diferentes  $\omega \in \Omega$ ,  $\mu_T$ , se convierte en una variable aleatoria que puede utilizarse como estimador de  $\mu$  (constante). Al considerar la sucesión  $\{\mu_T\}$  para diferentes valores de  $T$  y establecer las condiciones de su convergencia a  $\mu$ , se establecen así, en definitiva, las condiciones de ergodicidad del proceso  $\{X_t\}$  respecto a su media.

De forma análoga puede hablarse de ergodicidad respecto a la autocovariancia. No es nuestra finalidad establecer aquí las condiciones bajo las cuales un pro-

ceso es ergódico; baste con decir que dichas condiciones casi siempre se cumplen para la clase de procesos que nos interesan. Como ilustración supongamos un proceso estacionario de segundo orden indeterminable, es decir que cumple.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{\tau} = 0 \quad [131]$$

Esto significa que a medida que  $\tau$  crece la autocorrelación del proceso va desapareciendo. Si el proceso es *normal* puede hablarse de una *independencia* cada vez mayor de las nuevas observaciones respecto a las antiguas o, lo que es lo mismo, que a medida que el tamaño muestral crezca disponemos siempre de nueva información para estimar los parámetros del proceso. Este hecho permite construir en el dominio temporal estimadores consistentes de los parámetros del proceso. O dicho de otra forma, el proceso es ergódico.

Como ya se ha comentado anteriormente, la condición [ 131 ] la cumplen los procesos económicos ya que rara vez se presentan series temporales económicas con componentes periódicos deterministas.

### Estimadores del espectro.

Para abordar los problemas de estimación espectral con una serie estacionaria ergódica, lo primero que se ha de hacer es elegir estimadores de  $\mu$  y de  $R_{\tau}$ .

Se han propuesto diversos estimadores de estos parámetros, sobre todo con vistas a eliminar su sesgo con muestras pequeñas. Las estimaciones espectrales, requieren muestras de gran tamaño (100 ó superior) por lo que en la práctica suelen utilizarse sencillamente las funciones muestrales siguientes, a pesar de sus sesgos con muestras pequeñas.

$$\bar{X} = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \quad [132]$$

$$\hat{R}_{\tau} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T-\tau} (X_t - \bar{X})(X_{t+\tau} - \bar{X}) \quad [133]$$

en donde ahora,  $X_t$  para  $t = 1, 2, \dots, T$ , representa a la serie temporal observada (esto explica la aparente contradicción de notaciones entre [129] y [132]). Hay que hacer la observación de que  $\hat{R}_{\tau}$  es un estimador consistente de  $R_{\tau}$  para  $\tau$  fijo, lo que se comprende intuitivamente al observar que a medida que  $\tau$  crece para un  $T$  dado, el número de grados de libertad para la estimación se va reduciendo.

Existen diversos métodos de estimación espectral cuyas ventajas e inconvenientes han sido muy discutidos por diversos autores, entre ellos Cooley, Lewis y Welch (1967) y Parzen (1969).

Desde sus albores, el análisis moderno de series temporales se ha centrado en la búsqueda de periodicidades ocultas (*hidden periodicities*). Schuster (1898) desarrolló para ello el método del *análisis del periodograma*, que bajo la perspectiva actual podemos contemplar también como una estimación del espectro.

El modelo básico de este enfoque es, a grandes rasgos,

$$X_t = \sum_{j=1}^k a_j \cos(\lambda_j t + b_j) + \epsilon_t \quad [134]$$

en donde  $\epsilon_t$  es un proceso inobservable que se supone está constituido por variables ortogonales. Era típico suponer que  $\epsilon_t \sim N(0, 1)$ . En este orden de ideas, el problema consiste en verificar la existencia de una componente a la frecuencia  $\lambda_j$ . Para ello conviene obtener a partir de la serie de datos  $X_t, t = 1, 2, \dots, T$ , la función

$$I_T(\lambda_j) = \frac{1}{T^2} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{i\lambda_j t} \right|^2 \\ = \frac{1}{T^2} \left[ \left( \sum_{t=1}^T X_t \cos \lambda t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^T X_t \operatorname{sen} \lambda t \right)^2 \right] \quad [135]$$

denominada *periodograma*, la cual se puede utilizar para verificar si en la serie existen componentes periódicas de frecuencias  $\lambda_j$ . (Véase, por ej., Dhrymes (1970) págs. 419 a 422).

Este procedimiento de análisis ha sido posteriormente desacreditado por detectar componentes cíclicas incluso en series experimentales construídas sin ellas.

Resulta curioso que una sencilla modificación del periodograma conduce a un estimador espectral (a pesar de que el modelo estadístico básico difiera en ambos casos).

El espectro es

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R_\tau$$

por lo que una forma directa de estimarlo es sustituyendo  $R_\tau$  por  $\hat{R}_\tau$  obteniendo mediante [ 133 ] para un número de retardos,  $\tau$ , máximo igual a  $T-1$ . Así tendríamos

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-1}^{T-1} e^{-i\lambda\tau} \hat{R}_\tau \quad [136]$$

Pero mediante un cambio de variables puede demostrarse que

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=0}^{T-1} e^{-i\lambda\tau} \hat{R}_\tau = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{i\lambda t} \right|^2 = I_T^*(\lambda) \quad [137]$$

expresión que está estrechamente relacionada con [ 135 ] y que se denomina *periodograma modificado*. Este es un estimador asintóticamente insesgado del espectro pero es *inconsistente*. (La demostración puede verse en Dhrymes (1970) págs. 422-427).

Para conseguir un estimador consistente del espectro, Blackman y Tukey



(1958) y Barlett (1961), entre otros, sugirieron un enfoque diferente, basado en el uso de una *función de autocovariancia muestral ponderada*.

Para introducir convenientemente este enfoque, supongamos en primer lugar que no estamos sujetos al problema de los errores de muestreo y que se conocen exactamente un número finito de valores de  $R_\tau$ ,  $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$ . Una forma directa de obtener aproximadamente  $g(\lambda)$  sería haciendo uso de la expresión.

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M R_\tau e^{-i\lambda\tau} \quad [138]$$

o equivalentemente

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} k_{M,\tau} R_\tau e^{-i\lambda\tau} \quad [138 \text{ bis}]$$

en donde

$$k_{M,\tau} = k_{M,-\tau} \begin{cases} = 1, & \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \\ = 0, & |\tau| > M \end{cases} \quad [139]$$

se denomina función de ponderación (también se denomina en inglés *lag window*). La relación entre  $g(\lambda)$  y  $g'(\lambda)$  es, en general, (para cualquier función de ponderación  $k_{M,\tau}$ ).

$$g'(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) K_M(\lambda - \omega) d\omega \quad [140]$$

en donde  $K_M$  es la transformada de Fourier de  $k_{M,\tau}$  y se denomina *ventana espectral (spectral window)*.

La expresión [ 140 ] demuestra que  $g'(\lambda)$  es un promedio espectral de  $g(\lambda)$ .

Si se toma como función de ponderación la [ 139 ], la correspondiente ventana espectral es

$$K_M(\lambda - \omega) = \frac{\text{sen} \left[ \left( M + \frac{1}{2} \right) (\lambda - \omega) \right]}{2\pi \text{sen} [ (\lambda - \omega) / 2 ]} \quad [141]$$

El análisis de esta función conduce a la conclusión de que no hay garantías de que  $g'(\lambda)$  se parezca a  $g(\lambda)$ . Este hecho es cierto independientemente de los problemas de muestreo, pues se basa en el análisis de [ 140 ] y [ 141 ] en donde no interviene datos muestrales.

Este hecho hace surgir el problema de la elección de una función de ponderación más adecuada que [ 139 ], como problema previo a los que surjan de considerar los errores de muestreo. La función de ponderación habría que elegirla de manera que su transformada de Fourier (ventana espectral) no distorsione el espectro original con las componentes de frecuencias remotas, de modo que debe presentar una gran concentración en torno a la frecuencia principal y alisamiento con las frecuencias remotas. Esto plantea exigencias sobre la función de ponderación en tér-

minos de alisamiento y concentración, que son incompatibles entre sí, por lo que hay que buscar soluciones de compromiso. Se han propuesto diversas funciones de ponderación, cuyas propiedades han sido discutidas por Tukey (1958) Jenkins (1961), Parzen (1961) y (1963).

Existen diversos criterios para obtener índices que informen sobre la calidad de una ventana espectral. Ninguno de estos índices es definitivo, hay que considerarlos todos en conjunto y la valoración definitiva de la ventana espectral puede ser un tanto subjetiva.

Las dos funciones de ponderación más empleadas son las de Tukey-Hanning y la de Parzen, siguientes

Tukey-Hanning

$$k_{M,\tau} = \begin{cases} [1 + \cos(\pi \tau/M)]/2; & |\tau| < M \\ 0; & |\tau| > M \end{cases} \quad [142]$$

Parzen

$$k_{M,\tau} = \begin{cases} 1 - 6 |\tau/M|^2 + 6 |\tau/M|^3; & |\tau| \leq M/2 \\ 2(1 - |\tau/M|)^3; & M/2 < |\tau| < M \\ 0; & |\tau| \geq M \end{cases} \quad [143]$$

y las correspondientes ventanas espectrales son

$$K_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sen}(M + \frac{1}{2})\omega}{\text{sen}(\omega/2)} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(M + \frac{1}{2})(\omega + \pi/M)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\omega - \pi/M)} + \frac{\text{sen}(M + \frac{1}{2})(\omega - \pi/M)}{\text{sen} \frac{1}{2}(\omega - \pi/M)} \quad [144]$$

y

$$K_M(\omega) = \frac{3}{8\pi M^3} \left[ \frac{\text{sen}(M\omega/4)}{\text{sen}(\omega/4)} \right]^4 \quad [145]$$

Es de destacar que la ventana de Parzen nunca puede conducir a estimaciones negativas de la función de densidad espectral.

Así pues, resumiendo lo dicho, independientemente de las consideraciones en torno a los errores de muestreo resulta que el uso de una función de ponderaciones distinta a [139] puede mejorar las propiedades de aproximación de  $g'(\lambda)$  al espectro poblacional para un  $M$  dado.

Contemplemos ahora otro aspecto importante de la estimación espectral: el valor de  $M$ . Si los datos no estuviesen sometidos a los errores de muestreo, tal y como hemos venido hasta el momento admitiendo, es evidente que, cuanto mayor

sea  $M$  más se aproximará  $g'(\lambda)$  a  $g(\lambda)$  para una ventana espectral dada. Este hecho puede expresarse diciendo que el *poder de resolución* es mayor (alta fidelidad) cuanto mayor sea  $M$ , es decir, que  $g'(\lambda)$  proporciona más detalles del espectro. Pero cuando se considera el problema real de la estimación del espectro a partir de una muestra de tamaño  $T$ , se presenta una nueva disyuntiva, esta vez en torno a la elección de  $M$ .

En efecto, a partir de la muestra se pueden estimar  $M$  autocovariancias,  $\hat{R}_\tau$ , (con  $M \leq T-1$ ) haciendo uso para ello de la expresión [ 133 ]. Aumentar  $M$  con una muestra dada tiene sus ventajas, que se manifiestan en un mayor poder de resolución, pero, por otra parte, surge un inconveniente ya que a medida que el número de retardos aumentan se van perdiendo grados de libertad en las estimaciones de las autocovariancias. Este último hecho se traduce en un aumento de la variancia del estimador espectral, con todas sus secuelas (mayor influencia de los errores de muestreo, menos fiabilidad de las estimaciones, posible aparición de máximos en  $g'(\lambda)$  donde  $g(\lambda)$  no los tiene, etc). En el caso de tomar el valor máximo de  $M$ , es decir,  $T-1$ , los estimadores resultantes llegan a ser inconsistentes.

Resumiendo, la relación  $M/T$  depende de la ventana espectral que se esté utilizando así como de la naturaleza de los datos. Pero hay que decir dos cosas, primero que no existe una regla fija para decidir la elección de este cociente, y segundo que los resultados de la estimación son sensibles al mismo.

Se ha criticado el análisis espectral porque no se pueden establecer reglas objetivas para la elección de  $M$ . Las reglas prácticas existentes son de carácter subjetivo. La mayor parte de los autores aconsejan que  $M$  se tome entre el 10 y el 30 por ciento de  $T$ , siendo el 20 % un número bastante corriente<sup>3</sup>. La experiencia demuestra que operando con diversos valores de  $M$  se puede discernir, mediante las correspondientes representaciones espectrales, a partir de qué valores de  $M$  la ganancia en el poder de resolución no compensa los efectos del aumento de la variancia. La estimación espectral exige, por tanto, bastante experiencia.

Vamos ahora a resumir lo dicho destacando los aspectos prácticos de la estimación. Partiendo de una serie temporal,  $X_t$ , ( $t = 1, 2, \dots, T$ ), se comienza obteniendo los  $\hat{R}_\tau$  mediante [ 133 ], para  $\tau = 1, 2, \dots, M$ , (con  $M$  en torno al 20% de  $T$ ). A continuación se hace uso de la familia de estimadores.

$$\hat{g}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_\tau e^{-i\lambda_j \tau} \quad [ 146 ]$$

que para las aplicaciones prácticas puede expresarse así

$$\begin{aligned} \hat{g}(\lambda_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_\tau (\cos \lambda_j \tau - i \operatorname{sen} \lambda_j \tau) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_\tau \cos \lambda_j \tau \end{aligned}$$

3. Fishman (1969), pág. 99, afirma "Está claro que independientemente de la ventana espectral elegida, en ningún caso una razón ( $M/T$ ) superior a 0,3 dará resultados fiables".

Como las funciones de ponderación son pares respecto a  $\tau$ , se pueden escribir

$$\hat{g}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi} (k_{M,0} \hat{R}_0 + 2 \sum k_{m,\tau} \hat{R}_\tau \cos \lambda_j \tau) \quad [146 \text{ bis}]$$

(Las funciones de ponderación de uso más frecuente están dadas en [142] y [143]).

Queda, por último, otra cuestión. ¿Cómo elegir los valores de  $\lambda_j$  para representar el espectro?. Se puede demostrar que  $\hat{g}(\lambda_j)$  queda determinada unívocamente por sus valores en los puntos

$$\lambda_j = \pi j / M \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad [147]$$

(Según ya se ha visto, el espectro de series discretas queda definido en el intervalo  $\lambda \in (-\pi, \pi)$ , pero por simetría puede prescindirse de la representación gráfica en el semieje de los valores negativos de  $\lambda$ ). En la práctica se ha comprobado, sin embargo, que el espaciamiento entre los  $\lambda_j$  así definidos, es demasiado ancho. Por esta razón suelo doblarse o cuadruplicarse el número de puntos, para lo cual reducimos las distancias entre los mismos, tomando, por ejemplo,

$$\lambda_j = \frac{\pi j}{2M}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2M \quad [148]$$

La inclusión de una estimación a la frecuencia angular  $\lambda = 0$  permite verificar si se ha eliminado con éxito la tendencia de la serie. En efecto, una componente armónica de frecuencia cero puede interpretarse como una tendencia lineal constante. Por lo tanto, si aparece tal componente existe evidencia de que aún queda en la serie cierta tendencia sin eliminar.

Este procedimiento proporciona estimadores consistentes pero sesgados con muestras de tamaño pequeño.

Por otra parte Fishman (1960, págs. 96 y 97) recomienda hacer la siguiente corrección.

$$\hat{g}_u(\lambda) = \hat{g}(\lambda) + [2\pi K_M(\lambda) \hat{g}_u(0) / T] \quad [149]$$

$$\text{con} \quad \hat{g}_u(0) = \hat{g}(0) [1 - 2\pi K_M(0) / T]^{-1} \quad [150]$$

para que de esta forma

$$E[\hat{g}_u(\lambda)] \sim g(\lambda) \quad [151]$$

### La última transformación de Fourier

Después de esta descripción del método de la función de autocovariancia ponderada, nos vamos a referir brevemente a otro enfoque estadísticamente equivalente, que proporciona una familia de estimadores a partir del *periodograma alisado*.

Se puede demostrar que la expresión

$$\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} k_{M,\tau} e^{-i\lambda\tau} \hat{R}_\tau \quad [152]$$

es equivalente a

$$\hat{g}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} K_M(\lambda - \omega) I_T(\omega) d\omega \quad [152 \text{ bis}]$$

en donde  $K_M$  es la transformada de Fourier de  $k_{M,\tau}$ . De aquí puede definirse, la siguiente familia de estimadores asintóticamente equivalentes a  $\hat{g}(\lambda)$ .

$$\tilde{g}(\lambda) = \sum_{j=-\frac{T-1}{2}}^{\frac{T-1}{2}} K(\lambda - \lambda_j) I_T(\lambda_j) \quad [153]$$

en donde  $K(\lambda)$  es una función de ponderación real simétrica y periódica, e  $I_T(\lambda_j)$  es el periodograma definido en [135]. La expresión [153] se denomina periodograma alisado (*smoothed periodogram*) o periodograma promediado. Por economía de cálculos se ha venido haciendo uso de [152], hasta que Cooley y Tukey (1965) han redescubierto la denominada "última transformación de Fourier", ya introducida en la literatura especializada por diversos autores, siendo la más antigua la de Danielson y Lanczos (1924). Esta transformación consiste en un algoritmo que permite realizar los cálculos de la estimación espectral sobre el periodograma promediado con una considerable reducción de tiempo<sup>4</sup>.

### Estimación por intervalos y verificación de hipótesis

Las distribuciones de estas familias de estimadores espectrales, bajo el supuesto de que el muestreo procede de un proceso discreto normal, poseen formas complicadas, pero se ha extendido la costumbre de aproximarlas mediante el múltiplo de una ji-cuadrado. El número de grados de libertad de una  $\chi^2$  es dos veces la razón del cuadrado de su media y su variancia. Así, el parámetro denominado números de grados de libertad equivalentes (EDF, en inglés) se define como

$$E D F = r = \frac{2 E^2 [\hat{g}(\lambda)]}{\text{var} [\hat{g}(\lambda)]} \quad [154]$$

Este número depende de la ventana espectral elegida. Para la ventana de Tukey-Hanning, ecuaciones [142] y [144].

$$r = 2,7 T/M \quad [155]$$

y para la de Parzen, ecuaciones [143] y [145]

$$r = 3,7 T/M \quad [156]$$

4. Si el tiempo de cálculo haciendo uso de la función de autocovariancia ponderada es proporcional a  $T^2$  ( $T$  tamaño muestral), el enfoque del periodograma ponderado arroja un tiempo proporcional a  $T \log_2 T$ . El sistema de programas econométricos TROLL hace uso de este algoritmo.

Para construir intervalos de confianza de la función de densidad espectral, se hace uso del resultado aproximado

$$r \frac{\hat{g}(\lambda)}{g(\lambda)} \sim \chi_r^2 \tag{157}$$

Así para un nivel de significación  $p$  tendremos, para cada valor de  $\lambda_j$ ,

$$P_r \left( \frac{r \hat{g}(\lambda_j)}{\chi_{p/2;r}^2} \leq g(\lambda_j) \leq r \frac{\hat{g}(\lambda_j)}{\chi_{1-p/2;r}^2} \right) = 1 - p \tag{158}$$

en donde los valores  $\chi_{p/2;r}^2$  y  $\chi_{1-p/2;r}^2$  se definen mediante

$$P_r (\chi_r^2 \leq \chi_{p/2;r}^2) = 1 - p/2 \tag{159}$$

y 
$$P_r (\chi_r^2 \leq \chi_{1-p/2;r}^2) = p/2 \tag{160}$$

valores que se obtienen de las correspondientes tablas fijados  $p$  y  $r$ . La expresión [ 158 ] define los extremos del intervalo de estimación.

La amplitud del intervalo de estimación es diferente para cada  $\lambda_j$ . Sin embargo, si se tomen logaritmos decimales tenemos

$$\log \hat{g}(\lambda_j) + \log \frac{r}{\chi_{p/2;r}^2} \leq \log g(\lambda_j) \leq \log \hat{g}(\lambda_j) + \log \frac{r}{\chi_{1-p/2;r}^2} \tag{161}$$

En consecuencia, si hacemos uso de una escala logarítmica en el eje vertical para la representación gráfica del espectro, obtendremos dos líneas de puntos (banda de confianza) cuya separación constante medida en la dirección vertical es

$$\chi_{p/2;r}^2 - \chi_{1-p/2;r}^2 \tag{162}$$

Como ya se ha visto, el espectro de un proceso puramente aleatorio es un segmento horizontal. Una forma de verificar si una serie procede de un proceso de esta clase, consiste en trazar una línea horizontal dentro de la banda de confianza sin tocar las líneas de puntos que definen la banda. Si esto es posible, no podemos rechazar la hipótesis de que la serie procede de un proceso puramente aleatorio. Este test constituye una alternativa más rigurosa que el test de Durbin y Watson que usualmente utilizamos en Econometría, (sobre este tema volveremos en la última sección de este trabajo).

Para verificar la hipótesis de si en el espectro existe un máximo relativo (una componente dominante) en torno a una determinada banda de frecuencias, Hannan (1961) ha propuesto un test.

### Blanqueo y coloración (prewhitening y recoloring)

El uso de funciones de ponderación, por otra parte conveniente, produce efectos adversos sobre los estimadores cuando el espectro a estimar presenta máximos o concentraciones de variancia muy acusadas. Aunque el propósito fundamental es estimar el espectro tal y como es, a menudo interesa someter la serie a un "alisado espectral" previo para reducir la intensidad del efecto perjudicial antes mencionado. Una vez realizados los cálculos correspondientes a la estimación hay que aplicar la operación inversa para obtener la estimación definitiva. En la terminología espectral la primera operación se denomina "blanqueo" y la segunda "coloración" (términos cuya significación reside en que cuanto más alisado es un espectro más blanca se dice que es su fuente).

Las series económicas suelen poseer espectros con bastante concentración relativa en las bandas de frecuencia bajas, así como en torno a las bandas de frecuencias estacionales. Estas concentraciones son una fuente de dispersión o distorsión (*leakage*) del estimador que conviene atenuar previamente, aunque no eliminar del todo. Fishman (1969) (págs. 112 y sigs.), recomienda en nuestro campo el procedimiento de las cuasi diferencias para la atenuación de las *componentes de frecuencias bajas* y amplificación de las altas. Este procedimiento consiste en obtener a partir de la sucesión  $\{X_t\}$  la siguiente filtrada

$$\tilde{X}_t^{(1)} = X_t - \alpha X_{t-1},$$

y aplicando la operación  $n$  veces sucesivamente se tiene

$$\tilde{X}_t = \sum_{k=0}^n (-\alpha)^k \binom{n}{k} X_{t-k} \quad [163]$$

Para cada serie temporal hay que elegir los valores más adecuados de  $\alpha$  y de  $k$ . Nerlove (1965), (págs. 257-58), escribe que valores de  $\alpha$  en torno a 0,75 y de  $n$  igual a 2 ó 3 resultan satisfactorios en gran número de casos. Para este filtro se tiene que

$$g_{\tilde{x}}(\lambda) = (1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2) g_x(\lambda) \quad [164]$$

por lo que una vez obtenido  $g_{\tilde{x}}(\lambda)$  habrá que utilizar la ecuación anterior para obtener  $g_x(\lambda)$  en la llamada operación de recolorado.

Para atenuar las componentes a las *frecuencias estacionales* se puede hacer uso de la transformación

$$\tilde{X}_t = X_t - \beta X_{t-12} \quad [165]$$

la cual proporciona el espectro

$$g_{\tilde{x}}(\lambda) = (1 - 2\beta \cos 12\lambda + \beta^2) g_x(\lambda) \quad [166]$$

Si no es suficiente con una vez, esta transformación puede aplicarse sucesivamente.

**Estimación del espectro mixto**

La función de covariancia mixta se puede estimar mediante la correspondiente función muestral

$$R_{xy,\tau} = T^{-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) (\bar{Y}_{t+\tau} - \bar{Y}) \quad [167]$$

siendo  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  las medias temporales muestrales.

Nuestro propósito es estimar el espectro mixto

$$g_{xy} = c(\lambda) - i q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xy,\tau} e^{-i\lambda\tau} \quad [168]$$

en donde

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xy,\tau} \cos \lambda\tau \quad [169]$$

$$y \quad q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xy,\tau} \sen \lambda\tau \quad [170]$$

Los correspondientes estimadores son

$$\hat{g}_{xy}(\lambda) = \hat{c}(\lambda) - i \hat{q}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_{xy,\tau} e^{-i\lambda\tau} \quad [171]$$

$$\hat{c}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_{xy,\tau} \cos \lambda\tau \quad [172]$$

$$y \quad \hat{q}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M k_{M,\tau} \hat{R}_{xy,\tau} \sen \lambda\tau \quad [173]$$

Por otra parte la coherencia, la ganancia y la fase, definidas por [ 103 ], [ 104 ] y [ 105 ] se estiman por las siguientes funciones, respectivamente,

$$\hat{\gamma}_{xy}(\lambda) = | \hat{g}_{xy}(\lambda) | / [ \hat{g}_x(\lambda) \hat{g}_y(\lambda) ]^{1/2} \quad [174]$$

$$\hat{G}_{xy}(\lambda) = | \hat{g}_{xy}(\lambda) | / \hat{g}_x(\lambda) \quad [175]$$

$$y \quad \hat{Q}_{xy}(\lambda) = \text{arc tg} [ -\hat{q}(\lambda) / \hat{c}(\lambda) ] \quad [176]$$

La teoría de la distribución de estos estimadores es complicada<sup>5</sup>. Hannan (1970) da un magnifico resumen de la misma. La distribución del estimador del espectro mixto sigue una ley, relacionada con la distribución de Wishart multidimen-

5. Las referencias básicas son Goodman (1957), (1963), Khatri (1964), Hannan (1970) y Brillinger (1970).



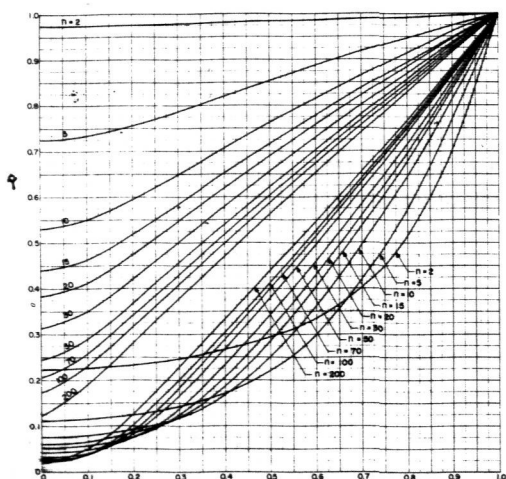
sional compleja. Nosotros nos vamos a limitar a resumir los resultados más interesantes en torno a la construcción de intervalos de confianza y verificación de hipótesis.

### Intervalos de confianza para la coherencia.

Amos y Koopmans (1963) han elaborado unos gráficos que permiten construir aproximadamente, pero con gran simplicidad, intervalos de confianza para [ 174 ], a cada frecuencia. Sea  $n = \frac{1}{2} r$ , en donde  $r$  es el número de grados de libertad

equivalentes, definido en [ 154].

La figura 12, reproduce un gráfico para obtener un intervalo de confianza del 90%. Para hacer uso del gráfico se traza una línea horizontal según el valor de  $\hat{\gamma}_{xy}(\lambda_j)$  ( $\lambda_j$ ) a la frecuencia  $\lambda_j$  elegida; las abscisas de los puntos de corte de esta línea con las correspondientes curvas de  $n$  proporcionan los extremos del intervalo buscado. Si no existe punto de corte dentro del gráfico se toma el valor cero.



Fuente: Amos y Koopmans (1963)

Fig. 12

Ejemplo: para  $\gamma_{xy}(\lambda_j) = 0,5$  y  $r = 20$ , ( $n = 10$ ), tenemos que los extremos del intervalo de confianza del 90% son  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_2 = 0,7$ .

Para verificar la hipótesis de que  $\gamma_{xy}(\lambda) = 0$ , frente a la alternativa;  $\gamma_{xy}(\lambda) > 0$ , se puede hacer uso de la tabla de la distribución F, pues si  $\gamma_{xy}(\lambda) = 0$ , el cociente

$$F = (n - 1) [ \hat{\gamma}_{xy}^2 (\lambda) / 1 - \gamma_{xy}^2 (\lambda) ] \sim F_{2,2(n-1)} \quad [ 177 ]$$

$$(\lambda \neq 0, \pi)$$

en donde 2 y 2 (n - 1) son los grados de libertad del numerador y del denominador respectivamente, en relación con la distribución F. Así pues, para un nivel de significación p, y siendo  $F_{2,2(n-1)}^{(p)}$  tal que

$$\Pr ( F_{2,2(n-1)} \leq F_{2,2(n-1)}^{(p)} ) = 1 - p$$

se rechazará la hipótesis de que  $\gamma_{xy} (\lambda) = 0$  si

$$F > F_{2,2(n-1)}^{(p)}$$

**Intervalos de confianza para la ganancia**

Para el estimador definido en [ 175 ]

$$\hat{G}_{xy} (\lambda) = | \hat{g}_{xy} (\lambda) | / \hat{g}_x (\lambda)$$

el intervalo de confianza apropiado, del 100 (1 - p) %, viene definido por el conjunto de puntos que satisfacen

$$| \hat{G}_{xy} (\lambda) - G_{xy} (\lambda) | \leq \begin{cases} \left[ \frac{\hat{g}_x (\lambda) [ 1 - \hat{\gamma}_{xy} (\lambda)^2 ]}{(n - 1) \hat{g}_x (\lambda)} F_{2,2(n-1)}^{(p)} \right]^{1/2}, \lambda \neq 0, \pi \\ \left[ \frac{\hat{g}_x (\lambda) [ 1 - \hat{\gamma} (\lambda)^2 ]}{\nu \hat{g}_y (\lambda)} \right]^{1/2} t_{\nu}^{(p)}, \lambda = 0, \pi \end{cases} \quad [ 178 ]$$

en donde  $\nu = (n - 2)$  si  $\lambda = y$   $\nu = n - 1$  si  $\lambda = \pi$   $F_{2,2(n-1)}^{(p)}$  ya se ha definido, y  $t_{\nu}^{(p)}$  es tal que

$$\Pr ( t_{\nu}^{(p)} \leq t^{(p)} ) = 1 - p$$

siendo  $\nu$  el número de grados de libertad de la distribución t de Student.

**Intervalos de confianza para la fase**

El intervalo de confianza para  $\hat{\phi}_{xy} (\lambda)$ , definida en [ 176 ], lo constituyen los puntos que cumplen

$$| \operatorname{sen} [ \hat{\Phi}_{xy}(\lambda) - \Phi_{xy}(\lambda) ] | \leq \left[ \frac{1 - \hat{\gamma}_{xy}(\lambda)^2}{\hat{\gamma}_{xy}(\lambda)^2 (2n - 2)} \right]^{1/2} t_{2n-2}^{(p/2)} \quad [179]$$

en donde  $t_{2n-2}^{(p/2)}$  es tal que

$$\Pr [ t_{2n-2} \leq t_{2n-2}^{(p/2)} ] = 1 - p/2$$

La forma de hallar el intervalo es obteniendo el segundo miembro de [182] para una frecuencia  $\lambda_j$  y buscando el arco cuyo seno tiene tal valor. Supongamos que tal arco es  $\Phi_{xy}(\lambda_j)^*$ , entonces los límites buscados son

$$\hat{\Phi}_{xy}(\lambda_j) - \Phi_{xy}(\lambda_j)^* \quad \text{y} \quad \Phi_{xy}(\lambda_j) + \Phi_{xy}(\lambda_j)^*$$

$\Phi_{xy}(\lambda)$  ha de estar comprendido entre  $-\pi$  y  $\pi$  y si los extremos del intervalo quedan fuera de estos límites, hay que transformarlos teniendo en cuenta que se puede sumar o restar múltiplos de  $2\pi$  a los extremos calculados hasta que queden ambos dentro de los extremos admisibles  $(-\pi, \pi)$ .

## 9. APLICACIONES ECONOMETRICAS DEL ANALISIS ESPECTRAL

Antes de comenzar con las aplicaciones concretas, vamos a referirnos brevemente a la condición de *estacionariedad*.

En tanto que nuestra exposición se ha limitado a los procesos estocásticos estacionarios, las series económicas no poseen realmente tal carácter pues de hecho suelen presentar tendencias crecientes en las medias y en las variancias.

A veces es posible convertir una serie temporal no estacionaria en otra estacionaria de segundo orden, lo cual permite no solo hacer uso del análisis espectral, sino también utilizar los procesos autorregresivos y los de medias móviles con propósitos de predicción<sup>6</sup>.

Cuando la fuente de la no estacionariedad está constituida exclusivamente por la aparición de una tendencia en la media, es posible tratar el problema. En efecto determinados experimentos muestrales realizados por Granger y Hatanaka (1964 capítulo 8), parecen indicar que en tales situaciones es aún posible aplicar los métodos espectrales con confianza, si previamente se elimina la tendencia.

Existen tres clases de técnicas para tratar las series que presentan tendencias en las medias: la regresión polinómica, la regresión armónica y el filtraje. La elección del método más adecuado depende de la finalidad perseguida en el trabajo posterior. Un método sencillo que se ha utilizado en econometría aplicada es el de las diferencias primeras, que consiste en obtener la serie filtrada.

$$\tilde{X}_t^{(1)} = X_t - X_{t-1} \quad [180]$$

6. Por ejemplo, el criterio del error de predicción cuadrático medio mínimo, para elegir un predictor óptimo, es inaplicable a series no estacionarias.

Mediante esta operación se pueden eliminar tendencias lineales tanto en la media como en la variancia. Si aplicamos esta operación  $p$  veces en cadena, tenemos la nueva serie

$$X_t = \Delta^p X_t = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} (-1)^j X_{t-j} \quad [181]$$

y puede comprobarse que si  $X$  contenía una media con tendencia polinómica en  $t$ , es decir, si

$$X_t = \xi_t + \sum_{j=0}^p \alpha_j t^j \quad [182]$$

en donde  $\{\xi_t\}$  tiene de media cero y no es necesariamente estacionario, entonces  $\tilde{X}_t$  tiene de media cero. Este procedimiento elimina también las tendencias polinómicas en la variancia.

Por otra parte, a menudo las tendencias en las variancias pueden eliminarse aceptablemente tomando el logaritmo de la serie.

Pero la realidad económica arroja series temporales no solo con medias y con variancias crecientes, sino que la propia estructura temporal de los fenómenos económicos va cambiando durante el tiempo. Afortunadamente parece que los cambios han sido hasta ahora suficientemente lentos como para poder analizarlos mediante técnicas basadas en el supuesto de que los espectros no cambian en el tiempo, lo cual permite seguir haciendo uso de los conceptos espectrales básicos (véase Granger y Hatanaka (1964), capítulo 9). De esta forma, las series no estacionarias presentan problemas tales como:

- (a) ¿Son tan importantes ahora los ciclos económicos de determinada duración media (p. e. de 4 años) como lo fueron antes de la S.G.M.?
- (b) ¿Hay un aumento sensible de la importancia relativa de los ciclos largos en relación a los cortos?
- (c) ¿Está cambiando la estructura temporal de la relación entre dos variables?

Para responder a cuestiones como estas se utiliza la técnica de la demodulación, tratada en el capítulo 10 de la obra Granger y Hatanaka (1964).

Y después de esta introducción, que nos pone sobre aviso de las posibilidades y limitaciones de considerar estacionarias las series económicas, pasemos a continuación a revisar brevemente las aplicaciones del análisis espectral en Economía.

### Desestacionalización

Las series temporales económicas suelen presentar fluctuaciones estacionales, que son las que se repiten aproximadamente 1, 2, 3, 4, 5, ó 6, veces al año, es decir, con frecuencias angulares de

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \text{ y } \pi \text{ radianes/mes}$$

Desestacionalizar una serie consiste en eliminar tales fluctuaciones con la finalidad de contemplar mejor la tendencia para establecer relaciones entre series diferentes. Un buen procedimiento de desestacionalización sería aquel que eliminara las componentes periódicas estacionales sin modificar las demás componentes.

El análisis espectral es de gran ayuda para valorar métodos alternativos de desestacionalización. En efecto, traduciendo lo que acabamos de decir a la terminología de los filtros, un filtro es bueno como procedimiento de desestacionalización si su correspondiente función de transferencia,  $A(\lambda)$ , es real, próxima a cero para las frecuencias estacionales y próxima a la unidad en el resto y especialmente en el intervalo  $(0, \pi/6)$  (correspondiente a las componentes cíclicas de periodos superiores al año, que son las de interés primario cuando el analista está eliminando las componentes estacionales).

Supongamos, por ejemplo, que se desea desestacionalizar una serie temporal mensual y que para ello se utiliza el método siguiente

$$\tilde{X}_t = \frac{1}{24} (X_{t+6} + X_{t-6}) + \frac{1}{12} \sum_{s=-5}^5 X_{t-s} \quad [183]$$

A este filtro le corresponde la siguiente función de respuesta frecuencial real.

$$A(\lambda) = \frac{\text{sen } 6\lambda \cos(\lambda/2)}{12 \text{ sen }(\lambda/2)} \quad [184]$$

Analizando esta función se observa que  $A(\lambda)$  se anula para

$$\lambda = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \text{ y } \pi \text{ rad/mes}$$

lo que significa que el filtro elimina las componentes estacionales de la serie. Pero, por otra parte, la representación gráfica de  $A(\lambda)$  permite observar que el módulo de esta función es inferior a la unidad para todos los valores de  $\lambda$  (excepto cero). Esto significa que al mismo tiempo que elimina las componentes estacionales, el filtro atenúa todas las componentes de la serie de frecuencias relativamente altas (periodos bajos), lo que es conveniente para la finalidad buscada, pero, que de la misma forma, el filtro atenúa las componentes de frecuencias bajas, lo que a menudo significa un oscurecimiento de fenómeno que realmente interesa estudiar. Este ejemplo, pone de manifiesto hasta qué punto el análisis espectral permite captar matices que pasan del todo desapercibidos bajo el enfoque del dominio temporal.

Nerlove (1964) ha publicado un interesante trabajo en el que recoge los resultados de amplias investigaciones, realizadas con diferentes procedimientos de desestacionalización.

### Detección de ondas largas en la economía

Desde los trabajos de Simón Kuznets, muchos investigadores han tratado de verificar la hipótesis de que existen ciclos económicos de 10 a 20 años de periodo, conocidos en la literatura económica como *ondas largas*.

Tales ciclos, de existir, se presentan superpuestos a otros más intensos de cuatro a ocho años de duración media. Este hecho oscurece el análisis realizado en el dominio temporal y obliga a manipular las series originales mediante series de filtros que eliminen las componentes cíclicas que no son objeto de estudio.

El análisis espectral aplicado a este área de problemas ha permitido poner de manifiesto que los filtros utilizados por Kuznets eliminan las componentes de periodos inferiores a 10 años, pero la función de transferencia correspondiente, presenta un extremo importante en torno a la banda de frecuencia correspondiente a un período de 20,26 años, lo que significa que la evidencia de Kuznets favorable a ciclos de alrededor de 20 años de periodo, pudo ser artificialmente originada por el procedimiento de filtrado. Complementariamente, Adelman ha realizado una investigación bastante concluyente, estimando el espectro correspondiente a una serie económica clásica sin someter los datos a ningún tipo de filtrado previo, comprobándose que el espectro estimado no presentó componentes cíclicas relevantes en torno a la frecuencia indicada.

Así pues, el análisis espectral ha venido a dar fin a una larga controversia en torno a la existencia de las llamadas ondas largas de la economía, mostrando que la evidencia empírica es contraria a las mismas.

### Análisis y predicción de los ciclos económicos

Desde la gran crisis económica de 1929, el estudio de los ciclos económicos captó la atención de los economistas. Los primeros trabajos econométricos trataron de las explicaciones de esos ciclos así como de la verificación empírica de las correspondientes teorías. Tales estudios corrieron a cargo de Tinbergen, quien a tal fin introdujo los modelos econométricos multiecuacionales en 1939.

Una justificación muy simple de los ciclos económicos podría encontrarse en el efecto Slutsky. Este autor demostró en 1937 que un proceso de medias móviles puede mostrar propiedades cíclicas. Este tipo de procesos surgen en los modelos econométricos como término aditivo de cada una de las ecuaciones *finales* —véase p. e. Otero (1976)—. De modo que aunque las propiedades dinámicas características del modelo, que se estudian con las ecuaciones finales prescindiendo del término estocástico, no incluyen la posibilidad de generar ciclos económicos, (por tratarse de ecuaciones en diferencias de primer orden, como ocurre en el modelo de Klein-Goldberger), los ciclos podrían quedar justificados solo y exclusivamente por el efecto Slutsky a través del término estocástico de cada ecuación final.

Para el economista, la verificación empírica de esta explicación es gran interés pues ello significaría que el origen de los ciclos puede estar en la superposición de los efectos de causas erráticas, lo cual habría que tener muy en cuenta en los problemas de control.

Haciendo uso del modelo de Klein-Goldberger, Adelman y Adelman (1959) han demostrado que el efecto Slutsky puede originar ciclos económicos de 4 años de duración por término medio. Para llegar a tal conclusión estos autores han hecho uso de procedimientos de simulación numérica, los cuales, al multiplicar los errores de muestreo, hacen surgir dudas sobre la exactitud de las conclusiones.

El análisis espectral, en cambio, proporciona un enfoque más riguroso para verificar esta hipótesis. Utilizando esta técnica Howrey (1971) ha ratificado la conclusión de los Adelman.

La aplicación del enfoque con modelos econométricos no lineales exige, sin embargo, la linealización previa de las ecuaciones finales lo cual es un inconveniente. Klein (1974) propone el uso combinado de las técnicas de simulación y las espectrales cuando se trata con esta clase de modelos (la no linealidad en las variables endógenas del modelo es, por otra parte, un problema que se presenta con gran frecuencia).

Actualmente, los investigadores están dedicando gran esfuerzo a este área de problemas. Puede afirmarse, con Klein (1971) que el análisis espectral ha hecho resurgir el interés por el estudio de los ciclos económicos en la presente década.

En otro orden de ideas, el análisis espectral se utiliza también para la construcción de indicadores que ayuden a predecir los ciclos económicos. La técnica clásica de los indicadores se basa en la idea de la existencia de desfases temporales más o menos fijos entre las crestas y los valles de las ondas descritas por diferentes series económicas, idea que se trata de explotar para predecir la aparición de recesiones o de crisis a partir de indicadores relativos a series adelantadas. Sin embargo, la realidad es más compleja que la idea básica que anima a este método, ya que obviamente los adelantos o retrasos de unas series temporales respecto a otras no son, de ninguna manera, fijos. El análisis espectral permite ampliar el método más allá de los puntos de referencia relativos a los extremos de las series temporales para extenderlo a todas las fases del ciclo. El análisis espectral bivalente permite incluso ir más lejos planteando nuevos problemas y proporcionando otras interpretaciones para las relaciones entre series económicas (sobre este tema puede consultarse el capítulo 12 de la citada obra de Granger y Hatanaka).

### **Retardos distribuidos**

El análisis espectral bivalente posee una aplicación directa a la estimación e interpretación de modelos con retardos distribuidos. Tal y como se señaló, un método espectral para estimar los coeficientes del retardo o multiplicadores dinámicos, consiste en obtener la estimación de  $A(\lambda)$  (que es la transformada de Fourier de los coeficientes de reacción) a partir de las estimaciones del espectro mixto y del espectro de  $X$  y haciendo uso de [ 109 ].

Se ha venido dando demasiado énfasis a la supuesta superioridad de los métodos espectrales sobre los usuales en Econometría, basados en el dominio temporal, para la estimación de retardos distribuidos<sup>7</sup>. Pero la realidad es que se ha exagerado

7. Sobre los métodos usuales en Econometría para la estimación de retardos distribuidos puede consultarse en nuestro idioma, Otero (1974).

un poco. Sims (1974), en uno de los trabajos más profundos y esclarecedores que se han escrito sobre el área econométrica de los retardos distribuidos, escribe textualmente (pág. 302): "La única ventaja fundamental de los métodos de estimación basados en el dominio frecuencial es la introducción de un sistema de cálculo ventajoso para la inversión de cierto tipo de matrices. Una ventaja transitoria más importante es que estos métodos nos han proporcionado una visión más profunda de cómo deben formularse y verificarse los modelos con retardos distribuidos".

La primera parte de la cita anterior, la justifica Sims haciendo referencia a la interpretación que los métodos espectrales de estimación de retardos distribuidos admiten en términos de los métodos del dominio temporal, es decir, en términos de los métodos usuales de mínimos cuadrados ordinarios y mínimos cuadrados generalizados, lo cual se traduce en que la ventaja de los procedimientos de estimación espectrales sea más de forma (para los cálculos) que de fondo (para las propiedades de los estimadores).

En el último párrafo de la cita anterior, Sims debe estar refiriendo implícitamente a los problemas de formulación que ha tratado en un artículo suyo —Sims (1971)—. En este trabajo, trata los problemas relativos a la formulación de restricciones *a priori* en el modelo de Koyck (retardo de estructura geométrica) y de los errores de especificación que se derivan de las correspondientes aproximaciones discretas. Sims plantea el problema de la relación entre el modelo básico en términos continuos y el modelo equivalente en términos discretos, cuando el muestreo a intervalos unitarios temporales proporciona dos procesos discretos, uno exógeno y otro endógeno. La novedad de este enfoque es que los problemas de aproximación discreta en el campo de los retardos distribuidos habían sido tratados hasta entonces desde un punto de vista meramente matemático, es decir, sin tener en cuenta los problemas estadísticos derivados de la especificación errónea. Por otra parte, se habían estudiado problemas de inferencia estadística derivados de la agregación temporal, pero no de la aproximación discreta a una formulación que es teóricamente continua, por lo que, en este sentido, Sims plantea el problema de agregación temporal en el límite.

A continuación damos algunas conclusiones prácticas que se derivan del citado trabajo de Sims, sin otra pretensión que la de destacar el interés de esta línea de investigación que el análisis espectral ha permitido iniciar en Econometría:

a) Aproximaciones discretas realizadas bajo criterios puramente matemáticos pueden implicar serios errores de especificación.

b) Los modelos econométricos dinámicos deben formularse en términos continuos. Solo de esta forma llega a ser posible formarse alguna opinión acerca de qué restricciones de suavizado sobre los parámetros discretos son apropiadas y como se relacionan las estimaciones discretas con los parámetros del modelo básico formulado en términos continuos.

c) Tan importante como plantear la formulación continua del modelo es comprobar que la unidad temporal elegida es adecuada (para que no se presenten pro-



blemas de aligación ni de pérdida de información) pues solo en este caso es cuando puede esperarse una relación estrecha entre la estructura temporal básica y su equivalente discreta. "Sin embargo aún en este caso es interesante hacer notar que: (a) una distribución temporal continua monótona, y b) una distribución temporal continua de una cola, no tiene en general, una equivalente discreta de una cola".

Estas conclusiones se basan en el supuesto de que el proceso exógeno sea estacionario de segundo orden.

#### **Verificación de la hipótesis de perturbación no autocorrelacionada.**

Los métodos espectrales proporcionan un test riguroso para *verificar hipótesis* de ausencia de autocorrelación en el término de perturbación de un modelo econométrico.

En este sentido, el test de Durbin y Watson, que es el habitual en las aplicaciones econométricas, presenta diversas limitaciones, entre ellas el hecho de utilizar como hipótesis alternativa del contraste la autocorrelación provocada por un proceso autorregresivo de primer orden.

Durbin (1969) ha desarrollado un test que no posee tal limitación. Este test está basado en el periodograma de los residuos minimocuadráticos.

Otro área de aplicación de las técnicas espectrales como complemento de las técnicas econométricas, es la predicción de las variables exógenas de un modelo econométrico. Como es sabido, un modelo econométrico es un conjunto de ecuaciones formuladas de acuerdo con la teoría económica que explican el comportamiento de un conjunto de variables denominadas endógenas, función de otro conjunto de variables denominadas exógenas. (En los modelos dinámicos entran también valores retardados de las variables endógenas, que han de conocerse para obtener los valores de las variables endógenas período a período). De aquí se desprende que las predicciones de los modelos econométricos son siempre condicionales, es decir, que el modelo sirve para obtener predicciones de las variables endógenas cuando se conocen los valores de las variables exógenas. Estos últimos han de determinarse fuera del modelo y uno de los procedimientos posibles para hacerlo es mediante el uso de técnicas estadísticas de predicción aplicadas a procesos autorregresivos. En este sentido, el análisis espectral puede ser útil como instrumento para obtener predicciones de series aisladas, constituyendo así un buen complemento más que una alternativa de los modelos econométricos, formulados en base a una teoría económica.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- ADELMAN, I y ADELMAN F.L. (1959) "The Dynamic Propertiers of the Klein-Goldberger Model" *Econometrica*, 27 págs. 597-625.
- 2.- AMOS, D.E. y KOOPMANS, L.H. (1963) "Tables of the distribution of the coefficient of coherence for stationary bivariate Gaussian processes". Sandia Corp. Monograph SCR-483. Sandia Corp., Albuquerque, New Mexico.
- ;;3.- BARLETT, M.S. (1961) *An Introduction to Stochastic Processes*. Cambridge University Press. Londres.
- 4.- BLACKMAN, R.B. y TUKEY, J.W. (1958) *The Measurement of Power Spectra*. Dover Publications, New York.
- 5.- BRILLINGER, D.R. (1970). "The frequency analysis of relations between stationary spatial series". *Proc. Biennial Sem. Canad. Math Congr., 12 th* (R. Pyke, ed.) Canad. Math. Congr. Montreal.
- 6.- CHRIST, C.F. (1966). *Econometric Models and Methods*. Wiley
- 7.- COOLEY, J.M. LEWIS, P.A.W. y WELCH, P.D. (1967) *The Fast Fourier Transform Algorithm and its Applications*. I.B.M. Research Paper RC-1943.
- 8.- COOLEY, J.W. y TUKEY, J.W. (1965). "An Algorithm for the Machine Calculation of Fourier Series". *Math. Comput.*, vol. 19, (págs. 297-301).
- 9.- DANIELSON, G.C. y LANCZOS, C. (1924) "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-ray Seattering from Liquids". *J. Frank. Inst.* vol. 233. (págs. 365-380, 435-452).
- 10.- DHRYMES, P.J. (1970) *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*. Harper and Row. New York.
- 11.- DHRYMES, P.J (1971) *Distributed Lags: Problems of Estimations and Formulation*. Holden Day. San Francisco.
- 12.- DURBIN, J. (1969). "Test for Serial Correlation in Regression Analysis Based on the Periodogram of Least Squares Residuals" *Biometrika* 56, (págs. 1-14).
- 13.- ENGLE, R.F. (1974) "Interpretation Spectral Analyses in Terms of Time-Domain Models" NBER Working Papers Series, n. 37.
- 14.- FISHMAN, G.S. (1969). *Spectral Methods in Econometrics*. Harvard University Press. Cambridge, Mass.
- 15.- GOODMAN, N.R. (1957). "On the joint estimation of the spectra, cospectrum and quadrature spectrum of a two-dimensional stationary gaussian process". Sci. Paper No. 10. Engrng. Statist. Lab. New York Univ., New York.
- 16.- GOODMAN, N.R. (1963). "Statistical Analysis based upon a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction)". *Ann. Math. Statist.* 34, 152-177.
- 17.- GRANGER, C.W.J. y M. HATANAKA (1964). *Spectral Analysis of Economic Time Series* Princeton University Press. Princenton, New Jersey.
- 18.- GRENANDER, U. y ROSENBLATT, M. (1957). *Statistical Analysis of Stationary Time Series*. John Wiley & Sons. New York.
- 19.- HANNAN, E.J. (1960) *Time Series Analysis*. Methuen, Londres.
- 20.- HANNAN, E.J. (1961). "Testing for a jump in the spectral function". *J. Royal Statistical Society (B)* vol. 23, (págs. 396-404).
- 21.- HANNAN, E.J. (1965). "The Estimation of Relationships Involving Distributed Lags". *Econometrica*, 33.
- 22.- HANNAN, E.J. (1970). *Multiple Time Series*. John Wiley. New York.
- 23.- HOWREY, E.P. (1971). "Stochastic Properties of the Klein-Goldberger Model." *Econometrica*. University of Pennsylvania.
- 24.- JENKINS, G.M. (1961) "General Considerations in the Analysis of Spectra" *Technometrics*, 3, 2, (págs. 133-166).
- 25.- JENKINS, G.M. y WATTS, D.G. (1969). *Spectral Analysis and its Applications*. Holden Day. San Francisco.
- 26.- KHATRI, C.G. (1964). "Distribution of the 'generalized' multiple correlation matrix in the dual case". *Ann. Math. Statist.* 35, 1801-1806.
- 27.- KLEIN, L.R. (1971). "Whither Econometrics?". *Journal of the Ann. Stat. Assoc.* vol 66. (págs. 415-421).
- 28.- KLEIN, L.R. (1974). *A Textbook of Econometrics*. Second Edition Englewood Cliffs. Prentice-Hall.
- 29.- NERLOVE, M. (1964). "Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures" *Econometrica*, 32 (págs. 241-286).

- 30.- NERLOVE, M. (1965). "A Comparison of a Modified 'Hannan' and BLS Seasonal Adjustment Filters". *Journal of the American Statistical Association*. vol 60. n. 310.
- 31.- OTERO, J.M. (1974). *Retardos en el comportamiento económico*. Instituto Iberoamericano de Desarrollo Económico. Madrid.
- 32.- OTERO, J.M. (1976). "Propiedades dinámicas de los modelos macroeconómicos: Métodos de análisis y aplicaciones". *Cuadernos de Economía*. Vol IV, n. 9.
- 33.- PARZEN, E. (1961). "Mathematical Considerations in the Estimation of Spectra". *Techonometrics* 3, 2. (págs. 167-190).
- 34.- MALINVAUD, E. (1969). *Méthodes statistiques de l'Econométrie* Dunod. Paris.
- 35.- PARZEN, E. (1963). "Notes on Fourier Analysis and Spectral Windows" reprinted in E. Parzen (1967) *Times Series Analysis Papers* (San Francisco: Holden-Day, Inc) pp. 190-250.
- 36.- PARZEN, E. (1969). "Multiple Time Series Modeling" *Multivariate Analysis*. Nueva York Academic Press.
- 37.- PENA TRAPERO, J.B. (1970). "Análisis espectral de los procesos estocásticos estacionarios de segundo orden". *Anales de Economía*.
- 38.- SCHUSTER, Sir ARTHUR (1898). "On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twenty-Six Day Period of Meteorological Phenomena". *Terrestrial Magnetism*, vol. 3.
- 39.- SIMS, CH. A. (1971). "Discrete Aproximations to Continuous Time Distributed Lags in Econometrics". *Econometrica* págs. 545-564.
- 40.- SIMS, Ch. A. (1974). "Distributes Lags" En: Intriligator y Kendrick (comp.) *Frontiers of Quantitative Economics*, vol II. North-Holland. págs. 289-331.
- 41.- YAGLOM, A.M. (1962) *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* trans. from the Russian by R.A. Silverman. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.