S. BARBERÁ

Racionalidad, decisividad e independencia de alternativas irrelevantes

INTRODUCCION

En su ya clásica obra *Social Choice and Individual Values,* Arrow estudió la posibilidad de diseñar mecanismos satisfactorios para elegir entre las alternativas abiertas ante una sociedad en base a las preferencias de los individuos que la componen. Su conclusión, esencialmente negativa, queda recogida en el bien conocido Teorema de Imposibilidad: no existe ningún mecanismo de elección social que cumpla simultáneamente una serie de condiciones dadas que -consideradas una a una- resultaría deseable poder ver satisfechas.[1] Con este resultado fundamental, Arrow no demostró -contrariamente a una versión trivializadora bastante extendida- la "imposibilidad de la democracia". Lo que sí consiguió, en cambio, fue dar expresión rigurosa a una advertencia importante: que también en el diseño de mecanismos de elección se plantean problemas "económicos", es decir, problemas de decisión entre objetivos alternativos, inalcanzables simultáneamente. Como respuesta a esta advertencia, y siguiendo las propias líneas apuntadas por Arrow en su obra, gran parte de los trabajos sobre teoría de la elección social que -de modo acelerado- se han producido en los últimos veinticinco años, se han desarrollado a lo largo de dos líneas complementarias y muchas veces simultáneas. Una -analítica- que se ocupa de estudiar por separado el significado y los méritos

1. Las condiciones mencionadas en este enunciado general incluirían tanto aquellas que Arrow impone explícitamente sobre sus funciones de bienestar social como aquellas que requiere implícitamente de la función de elección resultante al exigir que se articule, precisamente, por medio de funciones de bienestar. Para un enunciado más preciso, véase la Proposición 5.

relativos de las distintas propiedades que podría satisfacer un mecanismo de elección. Otra -sintética- que investiga la posibilidad de que ciertos grupos de condiciones se vean satisfechas conjuntamente, y cuyas conclusiones suelen venir dadas bien en forma de teoremas de imposibilidad (cuando las condiciones son incompatibles) o como caracterizaciones de mecanismos en términos de las condiciones que satisfacen (si aquéllas son compatibles).[2] Entre las condiciones propuestas por Arrow, la más debatida ha sido, sin duda, la de Independencia de Alternativas Irrelevantes, tanto porque -siguiendo el enfoque analítico- se ha puesto en cuestión la oportunidad de imponerla sobre los procedimientos de elección, como porque -desde un punto de vista sintético- aparece en muchas ocasiones como la principal causante de las dificultades señaladas por el Teorema de Imposibilidad.

El objeto de este trabajo es investigar el papel de dicha condición en un marco general que comprende, como casos particulares, los considerados por Arrow en *Social Choice and Individual Values,* por Sen en *Collective Choice and Social Welfare* y por Fishburn en *The Theroy of Social Choice.* Para ello ofrecemos, en primer lugar, un tratamiento analítico, que nos permite poner de relieve el significado de la condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes y su relación con otras características deseables de los procedimientos de elección. En segundo lugar demostramos proposiciones de tipo sintético que destacan tanto las dificultades en el diseño de mecanismos de elección que persisten en nuestro marco más amplio como las posibilidades abiertas, dentro del nuevo marco, para la superación de algunas de ellas.

UN MARCO GENERAL PARA EL PROBLEMA DE ELECCION SOCIAL

Empezaremos por describir los elementos esenciales del problema. Partimos de un conjunto de posibilidades, mutuamente excluyentes, a las que llamamos las alternativas. Suponemos sociedades compuestas por un número dado de individuos. Describimos las preferencias de dichos individuos acerca de las distintas alternativas mediante relaciones binarias completas, reflexivas y transitivas. Las características de una sociedad vienen dadas al especificar las preferencias de cada uno de sus miembros. Una función de elección social es un procedimiento que, una vez especificadas aquellas características, nos indica qué alternativas resultan elegidas socialmente entre las de un grupo cualquiera de ellas. Más formalmente:

Sea X un conjunto finito,[3] al que llamaremos el conjunto de alternativas concebibles. Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de todos los subconjuntos de alternativas concebibles.

2. Esta distinción se debe a Fishburn ([6], p. 177).

3. La hipótesis que X es finito resulta fundamental para la validez de algunos de los resultados presentados. Las limitaciones que impone sobre el análisis son obvias. Su adopción se justifica, en parte, porque el objetivo fundamental del artículo estriba en esclarecer algunas propiedades de las funciones de elección social, y dicha clarificación ya es posible, y más neta, en el caso particular en que el número de alternativas sea finito. Además, tam-

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de las relaciones binarias reflexivas y completas en X, A el de las relaciones binarias reflexivas, completas y acíclicas en X, y $\mathcal{R}$ el de las relaciones binarias, reflexivas, completas y transitivas.[4] A los elementos de $\mathcal{R}$ le llamamos preferencias sobre X.

Dados $B \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{X}$, definimos el conjunto elegido C(B, Y), como

$$C(B, Y) = \{y \mid y \in Y \ \& \ (\forall x)(x \in Y \rightarrow yBx)\}$$

Sea N el conjunto $\{1, 2, \ldots\ldots n\}$, al que llamaremos el conjunto de individuos.

A los elementos del producto cartesiano $\mathcal{R}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}$ los llamamos configuraciones de preferencias sobre X. Vendrán representados por n-plas de la forma $\underset{\sim}{R} = (R_1, R_2, \ldots\ldots R_n)$. Para cada i, R_i se interpreta como la relación de preferencias del i-ésimo miembro de la sociedad en la configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$ con respecto a las alternativas concebibles.

Llamamos *funciones de elección social* a las funciones de la forma

$$f\colon \mathcal{X} \times \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{X}$$

tales, que para todo $Y \in \mathcal{X}$ y para todo $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$, se cumple la condición

$$f(Y, \underset{\sim}{R}) \subseteq Y$$

Una función de elección social, pues, escoge, para cada subconjunto Y de X y cada configuración de preferencias, un subconjunto de Y. Interpretemos dichas funciones. Hemos dicho que X es el conjunto de todas las alternativas concebibles. Sin embargo, no siempre todas ellas resultarán factibles en todo momento. Sea Y el conjunto de las alternativas que son factibles en un momento dado. Claramente, $Y \in \mathcal{X}$. Una función de elección social escoge subconjuntos de alternativas factibles en base a las preferencias individuales sobre el conjunto de alternativas concebibles.

DECISIVIDAD Y RACIONALIDAD

La formulación que hemos presentado es muy general. En particular, no

bién es cierto que muchos de los problemas de elección social se plantean, de hecho, entre un número finito de opciones.

4. Una relación binaria B es
   (a) Reflexiva, si y sólo si $(\forall x \in X) xBx$
   (b) Completa, si y sólo si $(\forall x, y \in X)[x \neq y \rightarrow (xBy \vee yBx)]$.
   (c) Transitiva, si y sólo si $(\forall x, y, z \in X)[(xBy \ \& \ yBz) \longrightarrow xBz]$.

La condición de aciclicidad la expresamos, por simplicidad, para el caso en que B sea completa, único en que vamos a utilizarla.

(d) Acíclica, si y sólo si

$$(\forall x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n \in X)[\sim(x_2 Bx_1), \sim(x_3 Bx_2), \ldots\ldots \sim(x_n Bx_{n-1})] \rightarrow (x_1 Bx_n)$$

Obsérvese que toda relación transitiva es acíclica.

excluye la posibilidad que, para determinadas especificaciones de $Y \epsilon \mathfrak{X}$ y $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$ pueda suceder que $f(Y, R) = \phi$ aunque $Y \neq \phi$. En tal caso, aunque existirían alternativas factibles, la función de elección social no sería capaz de decidir cuál de ellas debiera ser adoptada. Sería, pues, deseable, que no se diesen casos de este tipo. A las funciones que los evitan las llamaremos decisivas. Una función de elección social es *decisiva* si, para todo $Y \neq \phi$ y cualquier $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$, $f(Y, \underset{\sim}{R}) \neq \phi$.

Hasta ahora no hemos especificado nada sobre cómo se articulan las distintas selecciones de alternativas que una misma función de elección social adopta, para configuraciones de preferencias dadas, según cuáles sean los conjuntos factibles de alternativas. Un caso particular de gran relevancia lo constituyen las funciones que llamaremos racionalizables. Se definen, precisamente, como aquéllas que articulan sus elecciones en base a relaciones binarias.

Una función de elección social es *racionalizable* si, para cada $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$, existe una relación binaria $s(\underset{\sim}{R}) = B \epsilon \mathcal{B}$ tal que

$$C(B, Y) = f(\underset{\sim}{R}, Y) \qquad \text{para todo } Y \epsilon \mathfrak{X}$$

Si f es racionalizable, pues, define una función s que a cada configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$ le asigna una relación binaria $s(\underset{\sim}{R}) \epsilon B$. Diremos que s es una función de agregación de preferencias, y que *racionaliza* a f. Una función de elección social s es a-racionalizable si, para todo $\underset{\sim}{R}$, $s(\underset{\sim}{R})$ es acíclica, y t-racionalizable si, para todo $\underset{\sim}{R}$, $s(\underset{\sim}{R})$ es transitiva.

Conviene, en este punto, reformular, en nuestra terminología, un resultado bien conocido (Sen, [17]):

Proposición 1. Una función de elección social racionalizable es decisiva si y sólo si es a-racionalizable.

El concepto de función de agregación de preferencias, aunque haya surgido en referencia al de función de elección social racionalizable, puede definirse con independencia de este contexto, del siguiente modo:

Una *función de agregación de preferencias* es una función de la forma

$$s: \mathcal{R}^n \longrightarrow B.$$ [5]

Diremos que s es acíclica (resp. transitiva) si, para todo $\underset{\sim}{R}$ $s(\underset{\sim}{R})$ es acíclica (resp. transitiva).

Se trata, en definitiva, de un procedimiento que, partiendo de las preferencias de los miembros de una sociedad, da lugar a una nueva relación binaria. Dicha relación suele interpretarse como expresión de unas "preferencias sociales" en base a las cuales se determinarán las elecciones colectivas entre alterna-

5. Una formulación aún más general admitiría que las relaciones binarias obtenidas a partir de s pudiesen ser irreflexivas o incompletas. Sin embargo, tal generalización no sería productiva, creemos, en nuestro caso. Para el estudio de problemas de elección con relaciones incompletas véase, por ejemplo, Richter [15].

tivas. Obsérvese, sin embargo, que las "preferencias sociales" obtenidas pueden no gozar de las mismas propiedades que las individuales: cabría que no fuesen transitivas, o ni tan sólo acíclicas. Un caso particularmente interesante, sin embargo, lo constituyen aquellas funciones cuyas imágenes son relaciones binarias de la misma naturaleza que las preferencias individuales: es decir, aquéllas que dan lugar a relaciones sociales transitivas. Este es, precisamente, el tipo de funciones consideradas por Arrow, bajo el nombre de funciones de bienestar social, en *Elección Social y Valores Individuales.*

Dada una función de bienestar social o, en general, una función de agregación de preferencias, ésta genera una función de elección social determinada por la relación

$$f(Y, \underset{\sim}{R}) = C(Y, s(\underset{\sim}{R})), \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X} \text{ y todo } \underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$$

Dicha relación, junto al hecho que toda relación transitiva es acíclica y en combinación con la Proposición 1, nos permite formular la siguiente observación:

Las funciones de elección social inducidas por las de bienestar Arrowianas son t-racionalizables y, por tanto, decisivas.

INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES, INDEPENCIA DE ALTERNATIVAS SUBÓPTIMAS E INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS NO FACTIBLES

Arrow impone sobre sus funciones de bienestar social una condición que, de hecho, es aplicable a cualquier función de agregación de preferencias: la condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI).

Dicha condición establece que, al escoger entre los elementos de un conjunto cualquiera de alternativas factibles debe hacerse en base a las preferencias individuales respecto a dichas alternativas solamente. O, lo que es equivalente, que si para dos configuraciones cualesquiera coinciden las preferencias de los individuos en lo que respecta a un determinado subconjunto de alternativas, la elección correspondiente entre los elementos de dicho subconjunto deberá ser la misma para una y otra configuración, aunque las preferencias individuales con respecto a otras alternativas concebibles hayan variado. Formalmente:

Dos relaciones de preferencia *R y R' coinciden en Y∈X* si y sólo si, para cualquier par de elementos x e y contenidos en Y se cumple que

$$xRy \longleftrightarrow xR'y$$

Dos configuraciones de preferencias $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ *coinciden en* Y si y sólo si, para todo $i \in N$, R_i y R'_i coinciden en Y.

Una función de agregación de preferencias es *independiente de alternativas irrelevantes* (IAI) si y sólo si, para cualquier $Y \in X$, y para todo par de configuraciones de preferencias $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ que coincidan en Y, se cumple que

$C(Y, s(\underset{\sim}{R})) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}'))$.

Esta condición ha sido muy debatida, y se ha señalado con frecuencia como responsable del resultado negativo al que llegó Arrow en su Teorema de Imposibilidad. A fin de clarificar su significado, nos proponemos formular condiciones generales sobre funciones de elección social y determinar su relación con la de IAI. Partiremos de los argumentos que el propio Arrow ha expuesto en favor de su condición de IAI, argumentos que él mismo formula en base a las funciones de elección social inducidas por sus funciones de bienestar, y no en referencia directa a éstas.

En su discurso de aceptación del Premio Nobel [3], Arrow se refiere a la condición de independencia de alternativas irrelevantes en los siguientes términos: "La . . . condición . . . de independencia de alternativas irrelevantes es más discutible, aunque la considero muy justificable desde un punto de vista pragmático: la elección social entre cualquier conjunto de alternativas dependerá exclusivamente de cómo ordenen las alternativas de este conjunto los distintos individuos. Para comprender lo que está en juego, supongamos que una sociedad debe elegir, y elige, entre varias alternativas. Después de haberse tomado la decisión, alguna alternativa que no había sido tenida en cuenta anteriormente se menciona como posibilidad lógica, aunque siga no siendo factible. Los individuos pueden expandir sus preferencias para colocar esta nueva alternativa en el lugar adecuado de su ordenación; pero, ¿debe esta información adicional acerca de las preferencias con respecto a una alternativa que no resulta posible escoger en ningún caso afectar la decisión tomada previamente?"

El argumento presentado[6] es aplicable a cualquier tipo de función de elección, sea o no racionalizable. La condición de independencia de alternativas no factibles, que pasamos a exponer, constituye una extensión de la de independencia de alternativas irrelevantes para la clase de funciones de elección social.

Una función de elección social es *Independiente de Alternativas no Factibles (IANF)* si y sólo si, para todo $Y \epsilon \mathcal{X}$, si $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coinciden en Y, se cumple que $f(Y, \underset{\sim}{R}) = f(Y, \underset{\sim}{R}')$.

Existe un segundo sentido en el que se dice a veces de una función de elección social que es "independiente de alternativas irrelevantes". Aunque, como veremos, las condiciones a las que vamos a referirnos son completamente independientes de la de IANF y, por tanto, de la de IAI Arrowiana, su consideración al llegar a este punto resulta oportuna por dos razones. En primer lugar, porque en una literatura paralela muy importante, la que se ocupa del estudio de las decisiones individuales bajo situaciones de incertidumbre, suele llamarse de "independencia de alternativas irrelevantes" a una condición cuya naturaleza está mucho más cerca de la de Independencia de Alternativas Subópti-

6. Para otras discusiones sobre el significado de la condición de independencia de alternativas irrelevantes véase, por ejemplo, [10], [14], y [15].

mas y de sus extensiones, que vamos a definir, que a las de IAI o IANF.[7] En segundo lugar, porque, como también veremos (Proposiciones 3 y 4), los requisitos en cuestión también los impone Arrow implícitamente, por la propia estructura de sus funciones de bienestar social, sobre las funciones de elección que éstas inducen.

Antes de proceder a formular las condiciones generales, y a fin de motivarlas, presentamos la siguiente versión, aplicable sólo al caso en que el conjunto escogido conste de un solo elemento.

Una función de elección social es *Independiente de Alternativas Subóptimas*[8] si y sólo si, para todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$, siempre que $Y_1 \subset Y_2 \subseteq X$ y $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) = z \epsilon Y_1$, debe cumplirse que $f(Y_1, \underset{\sim}{R}) = z$.

Esta condición sobre funciones de elección social nos dice que si un elemento resulta escogido en una determinada situación $Y_2, \underset{\sim}{R}$, el hecho que algunas alternativas subóptimas dejen de ser factibles no debe influir en la elección, que debe seguir favoreciendo al mismo elemento, entre los miembros de los subconjuntos de Y_2 que lo contengan. En este caso, los elementos subóptimos de Y_2 podrían calificarse de "irrelevantes". A esto se debe, sin duda, que condiciones de esta naturaleza se hayan llamado también, en ocasiones, de "independencia de alternativas irrelevantes". Introducida la condición, convendría pasar a investigar sus relaciones con las condiciones impuestas por Arrow sobre sus funciones de bienestar social y con la de IANF que hemos definido anteriormente. Antes, sin embargo, formularemos dos condiciones generales, aplicables al caso general en que la dimensión del conjunto elegido sea arbitraria, y que responden al mismo espíritu que la condición de Independencia de Alternativas Subóptimas.

Una función de elección social es *Independiente de Alternativas Excluídas (en sentido fuerte) (IAEF)* si y sólo si, para todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$, siempre que $Y_1 \subset Y_2 \subseteq X$ y $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1 \neq \phi$, debe cumplirse que $f(Y_1, \underset{\sim}{R}) = f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1$.

Una función de elección social es *Independiente de Alternativas Excluídas (en sentido débil) (IAED)* si y sólo si, para todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$, siempre que $Y_1 \subset Y_2 \subseteq X$, debe cumplirse que $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1 \subseteq f(Y_1, \underset{\sim}{R})$.

RELACIONES ENTRE LAS DISTINTAS CONDICIONES Y TIPOS DE FUNCIONES CONSIDERADAS

En esta Sección formulamos y demostramos tres proposiciones que tienen por objeto principal esclarecer la relación entre las condiciones de IAEF, IAED y de IANF, definidas sobre funciones de elección social, y la de IAI,

7. Para una discusión del grado de confusión existente hasta hace poco acerca de las distintas condiciones de "independencia de alternativas irrelevantes", véase Ray [17].

8. Esta condición ha sido propuesta recientemente por Karni y Schmeidler para el caso particular de funciones de elección cuya imágen consta siempre de un elemento único (véase [11]).

que se aplica a funciones de agregación de preferencias.

Para este propósito, y otros ulteriores, resulta oportuno introducir una nueva condición sobre funciones de agregación de preferencias que, bajo las condiciones consideradas hasta ahora, es equivalente a la de IAI. Esta condición, a la que llamaremos de binariedad, establece que, para cualquier par de alternativas x e y, la relación binaria establecida entre ellas por una función de agregación de preferencias s que la cumpla debe depender exclusivamente de la posición relativa de x con respecto a y en las preferencias de cada uno de los individuos. Formalmente:

Una función de agregación de preferencias es *binaria* si y sólo si para cualquier par de alternativas x e y, y para todo par de configuraciones de preferencias $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}'$ tales que

$$xR_iy \longleftrightarrow xR'_iy \qquad \text{para todo } i \in N,$$

se cumple que

$$xs(\underset{\sim}{R})y \longleftrightarrow xs(\underset{\sim}{R}')y$$

En otros términos: si $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coinciden en $<x, y>$, y s es binaria, $s(\underset{\sim}{R})$ y $s(\underset{\sim}{R}')$ deben coincidir en $<x, y>$.

Demostramos, en primer lugar, que las condiciones de binariedad y de IAI son equivalentes.

Proposición 2. Una función de agregación de preferencias s es independiente de alternativas irrelevantes si y sólo si es binaria.

Demostración. Claramente, si s(R) y $s(\underset{\sim}{R}')$ coinciden en Y se cumple que $C(Y, s(\underset{\sim}{R})) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}'))$. Para demostrar que si s es binaria será independiente de alternativas irrelevantes, supongamos que s fuese binaria y que $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coincidiesen en algún $Y \epsilon \mathfrak{X}$. Por definición, $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coincidirían en cada subconjunto compuesto por dos elementos de Y: es decir, $<x, y> \epsilon Y \longrightarrow [(\forall i) xR_iy \longleftrightarrow xR'_iy]$, Por tanto, como s es binaria, se cumplirá que $xs(\underset{\sim}{R})\,y \longleftrightarrow xs(\underset{\sim}{R}')\,y$, para todo par x, $y \epsilon Y$. Para ello implica que $s(\underset{\sim}{R})$ y $s(\underset{\sim}{R}')$ coinciden en Y y que, por tanto, $C(Y, s(\underset{\sim}{R})) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}')$. La función s deberá, pues, satisfacer la condición de IAI.

Para probar que si s es independiente de alternativas irrelevantes debe ser binaria basta con notar que si $C(Y, s(\underset{\sim}{R})) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}'))$ para todo $Y \epsilon \mathbf{X}$ y para todo par de configuraciones $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ que coincidan en Y, dicha identidad se cumplirá, en particular, para el caso en que $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coincidan en un conjunto que conste de dos elementos. Así, si para todo $i \epsilon N$ se cumple que $xR_iy \longleftrightarrow xR'_iy$, ello implica que $C(<x, y>, s(\underset{\sim}{R})) = C(<x, y>, s(\underset{\sim}{R}'))$. Pero ello sólo es posible si $xs(\underset{\sim}{R})y \longleftrightarrow xs(\underset{\sim}{R}')y$. La función s deberá, pues, ser binaria.

Por tanto, mediante su condición de IAI, Arrow impone, de hecho, dos restricciones distintas sobre sus procedimientos de elección social. Una, implícita, es que sean racionalizables (ya que, de otro modo, no tendría sentido hablar del conjunto C(. , .). Ya hemos visto cómo puede generalizarse esta restricción a través de la condición de IANF. Además, la condición de IAI supone una restricción sobre el tipo de conexión existente entre las preferencias individuales y la relación binaria social. Dicha restricción exige que la función de agregación de preferencias que la cumpla sea binaria. Como veremos, la condición de IANF, que es la que creemos verdaderamente relevante, puede satisfacerse en el contexto, más amplio, de las funciones de elección social, sin necesidad de que se cumpla ningún paralelo a la de binariedad, si las funciones consideradas no son racionalizables.

Pasamos ahora a demostrar, mediante la Proposición 3, que también la condición de Independencia de Alternativas Excluídas (Fuerte), junto con la decisividad, están implícitas entre los requisitos que Arrow impone sobre los procesos de elección de que se ocupa. Ambas condiciones corresponden, exactamente, a la exigencia que el proceso de elección pueda racionalizarse mediante relaciones de orden, es decir, sea resultado de aplicar criterios sociales obtenidos a partir de una función de bienestar Arrowiana.

Proposición 3. Una función de elección social f es decisiva e Independiente de Alternativas Excluídas (en sentido fuerte) si y sólo si es t-racionalizable.

Demostración.

(a) Supongamos, en primer lugar, que f es decisiva e IAEF. Para cada $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$, podemos definir la relación binaria $s(\underset{\sim}{R})$ de modo que, para todo par $x, y \in X$,

$$xs(\underset{\sim}{R})y \text{ si y sólo si } x \in f(\langle x, y \rangle, \underset{\sim}{R})$$

Obsérvese que $s(\underset{\sim}{R})$ será siempre reflexiva y completa, puesto que f es decisiva por hipótesis. Demostraremos que, bajo las condiciones del teorema, (1) s racionaliza a f, y (2) $s(\underset{\sim}{R})$ es transitiva.

(1) Supongamos que $s(\underset{\sim}{R})$ no racionalizase a f. En tal caso, existirían Y y $\underset{\sim}{R}$ para los cuales $f(Y, \underset{\sim}{R}) \neq C(Y, s(\underset{\sim}{R}))$. Para que ello se cumpla, deberá darse una de las dos situaciones siguientes (ya que, al ser f decisivo, alguna alternativa pertenecerá a $f(Y, \underset{\sim}{R})$):

Caso primero: $\exists\ z \in f(Y, \underset{\sim}{R}):\ z \notin C(Y, s(\underset{\sim}{R}))$
Caso segundo: $\exists\ w \notin C(Y, s(\underset{\sim}{R})):\ w \notin f(Y, \underset{\sim}{R})$

Supongamos que se diese el Caso primero. Por la condición de IAEF, como $z \in f(Y, \underset{\sim}{R})$, tenemos que $z \in f(\langle z, y \rangle, \underset{\sim}{R})$ para todo $y \in Y$. Por tanto, $zs(\underset{\sim}{R})y$ para todo $y \in Y$. Pero esto implica que $z \in C(Y, s(\underset{\sim}{R}))$, en contra de nuestra hipótesis.

Supongamos ahora que se diese el segundo Caso. Como $f(Y, \underset{\sim}{R}) \neq \phi$, puesto que f es decisiva, sea z un elemento de $f(Y, \underset{\sim}{R})$. Por la condición de IAEF, $f(\langle z, w \rangle, \underset{\sim}{R}) = f(Y, \underset{\sim}{R}) \cap \langle z, w \rangle = z$. Ello implica que $zs(\underset{\sim}{R})w$ y que $\sim (ws(\underset{\sim}{R})z)$. Por lo tanto, $w \notin C(Y, s(\underset{\sim}{R}))$, en contradicción con nuestros supuestos de partida.

Resumiendo: como ni el Caso primero ni el segundo pueden darse, tenemos que, bajo nuestras hipótesis, $f(Y, \underset{\sim}{R}) = (Y, s(\underset{\sim}{R}))$ para todo par $Y, \underset{\sim}{R}$, y que s racionaliza a f como queríamos demostrar.

(2) Supongamos ahora que s no fuese transitiva en algún caso. Existirían entonces x, y, z tales que, para algún $\underset{\sim}{R}$ dado,

$$xs(\underset{\sim}{R})y, \; ys(\underset{\sim}{R})z \text{ pero } \sim(xs(\underset{\sim}{R})z)$$

Como s racionaliza a f, tendremos que $x \notin f(\langle xyz \rangle, \underset{\sim}{R})$.

Caso primero: Supongamos que $y \in f(\langle x, y, z \rangle, \underset{\sim}{R})$. En este caso, y por la condición de IASO, $f(\langle x, y, z\rangle, \underset{\sim}{R}) \cap \langle y, z \rangle = y = f(\langle y, z \rangle, \underset{\sim}{R})$, en contradicción con la hipótesis que $xs(\underset{\sim}{R})y$.

Caso segundo: Supongamos que $y \notin f(\langle x, y, z\rangle, \underset{\sim}{R})$. En tal caso, $z = f(\langle x, y, z\rangle, \underset{\sim}{R}) = f(\langle x, y, z\rangle, \underset{\sim}{R}) \cap \langle y, x\rangle = f(\langle y, z\rangle, \underset{\sim}{R})$, contradiciendo la hipótesis que $ys(\underset{\sim}{R})z$.

Con ello queda completa la demostración de la transitividad de s.

(b) Supongamos ahora que f fuese t-racionalizable. Como toda relación transitiva es acíclica, la Proposición 1 implica que f es decisiva. Queda, pues, por demostrar, que f satisface la condición de IAEF. Para ello, supongamos que no la satisfaciera, es decir, que existiesen Y_1, Y_2 y $\underset{\sim}{R}$ tales que $Y_1 \subset Y_2 \subseteq X$ y que $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1 \neq \phi$, pero $f(Y_1, \underset{\sim}{R}) \neq f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1$.

Como f es t-racionalizable por hipótesis, existe una relación binaria transitiva $s(\underset{\sim}{R})$ tal que $f(Y_1, \underset{\sim}{R}) = C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$ y $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) = C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$. Es evidente que si $x \in C(Y_2, s(\underset{\sim}{R})) \cap Y_1$ también se cumplirá que $x \in C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$. Por tanto,

$$C(Y_2, s(\underset{\sim}{R})) \cap Y_1 \subset C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$$

Basta, pues, demostrar que

$$C(Y_1, s(\underset{\sim}{R})) \subset C(Y_2, s(\underset{\sim}{R})) \cap Y_1$$

Supongamos que no fuese así. Tendríamos, entonces, que existiría algún $x \in Y_1 \subset Y_2$ que pertenecería a $C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$ pero no a $C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$. Por hipótesis, existe también algún $y \in C(Y_2, s(\underset{\sim}{R})) \cap Y_1$, puesto que $s(\underset{\sim}{R})$ es transitiva.

Tenemos que, como $x \notin C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$, existe algún $z \in Y_2$ tal que

$$\sim(xs(\underset{\sim}{R})z) \tag{1}$$

Por otra parte, como $x \in C(Y_1, s(R))$ e $y \in Y_1$, debe ser que

$$xs(\underset{\sim}{R})y \tag{2}$$

Como $y \in C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$, debe también cumplirse que

$$ys(\underset{\sim}{R})z \qquad (3)$$

pero (1), (2) y (3) contradicen la hipótesis que $s(\underset{\sim}{R})$ es transitiva. Con esta contradicción completamos la demostración.

Vemos, pues, que la condición de IAEF, junto con la decisividad, resultan equivalentes a exigir del método de elección social que sea t-racionalizable. En otras palabras, para ser decisiva y cumplir la condición de IAEF, una función de elección social deberá basarse en una función de bienestar Arrowiana.

Este resultado, cuya demostración hemos querido presentar con detalle, lo probó Arrow, con referencia al problema de elección individual en [2]. En el mismo artículo se encuentra también la clave para su mejor comprensión. Allí se demuestra que la condición impuesta por la de IAEF sobre la relación social $s(\underset{\sim}{R})$ derivada de una configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$ cualquiera es equivalente a exigir de aquella que satisfaga el Axioma Débil de la Preferencia Revelada. También Plott [16] y Sen [20] han formulado axiomas equivalentes. No es, pues, de extrañar que al imponer la condición de IAEF sobre funciones de elección tropecemos con importantes dificultades (véase, más adelante, la Proposición 11), puesto que supone, de hecho, demandar un alto grado de racionalidad del criterio de elección social. Por ello, conviene también considerar las relaciones existentes entre el grado de racionalidad social y la condición, más débil, de IAED sobre funciones de elección social.

Proposición 4. Toda función de decisión social racionalizable satisface la condición de IAED.

Demostración. Sea f racionalizable, y s la función de agregación de preferencias que la racionaliza. Si $f(Y_2, \underset{\sim}{R}) \cap Y_1 = \phi$, es claramente un subconjunto de $f(Y_1, \underset{\sim}{R})$. Supongamos, pues, que $f(Y_2, R) \cap Y_1 \neq \phi$ pero no está contenido en $f(Y_1, \underset{\sim}{R})$. En tal caso, existirá un $x \epsilon Y_1$ tal que $x \epsilon C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$ pero $x \notin C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$. Por estar en $C(Y_2, s(\underset{\sim}{R}))$, satisface $xs(\underset{\sim}{R})z$ con todo $z \epsilon Y_2$. Por tanto, lo satisface con todo $w \epsilon Y_1$ y debe pertenecer también a $C(Y_1, s(\underset{\sim}{R}))$, en contra de nuestra hipótesis.

Obsérvese que la implicación en sentido contrario no se cumple, ni tan sólo cuando f es decisiva: existen funciones de elección social decisivas e IAED que no son racionalizables. Basta considerar, por ejemplo, el caso en que $X = \langle x, y, z \rangle$ y, para algún R, $f(\langle x, y \rangle, \underset{\sim}{R}) = \langle x, y \rangle$, $f(\langle y, z \rangle, \underset{\sim}{R}) = \langle y, z \rangle$, $f(\langle x, z \rangle, \underset{\sim}{R}) = \langle x, z \rangle$ pero $f(\langle x, y, z \rangle, \underset{\sim}{R}) = x$.

ALGUNAS CONDICIONES ADICIONALES Y TRES RESULTADOS FUNDAMENTALES PARA FUNCIONES DE AGREGACION DE PREFERENCIAS

En esta sección definimos algunas condiciones comúnmente manejadas en la literatura sobre elección social y formulamos, sin demostrarlos, tres resultados bien conocidos sobre funciones de agregación de preferencias.

Recordemos que una *función de agregación de preferencias* es una función s: $\mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{B}$.

La primera condición, que llamaremos de Pareto, exige que siempre que exista acuerdo por parte de todos los individuos en considerar a una alternativa x preferida a otra alternativa y, ello se traduzca en que x sea socialmente preferida a y.

Una función de agregación de preferencias satisface la *condición P (de Pareto)* si y sólo si, para todo par de alternativas $x, y \epsilon X$, y cualquier configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$ tal que, para todo $i \epsilon N, \sim(yR_i x)$, se cumple que $\sim(ys(\underset{\sim}{R})x)$.

La condición de respuesta positiva supone un requisito de sensibilidad sobre las funciones que la satisfacen. Más concretamente, establece que si dos alternativas, x e y, resultaban socialmente indiferentes bajo una determinada configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$, y $\underset{\sim}{R}'$ se diferencia sólo de $\underset{\sim}{R}$ en que, "ceteris paribus", la posición relativa de x sobre y ha mejorado, dicha mejora deberá traducirse en que, bajo la nueva situación $\underset{\sim}{R}'$, x sea preferida socialmente a y, y que, si x era ya preferida a y en $\underset{\sim}{R}$, lo siga siendo en $\underset{\sim}{R}'$. Formalmente:

Una función de agregación de preferencias, s, satisface la *condición RP (responde positivamente)* si y sólo si, para todo par de alternativas $x, y \epsilon X$ y para todo par de configuraciones de preferencias $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ tales que

(1) si a y b son distintas de x, $aR_i b \longleftrightarrow aR'_i b$ para todo $i \epsilon N$

(2) para todo a, $[\sim(aR_i x) \rightarrow \sim(aR'_i x)]$ & $\{[aR_i x \ \& \ xR_i a] \longrightarrow xR_i a\}$, para todo $i \epsilon N$, y

(3) para algún $i \epsilon N$, se cumple que $yR_i x$ & $\sim(yR'_i x)$, o bien que $\sim(xR_i y)$ & $xR'_i y$,

se cumple que $xs(R)$ y $\longrightarrow \sim(ys\,(R')x)$.

Las dos definiciones que siguen caracterizan a funciones bajo las cuales algún individuo o grupo de individuos podrían, bajo cualesquiera circunstancias, imponer su voluntad sobre los demás.

Una función de agregación de preferencias es *dictatorial* si y sólo si existe algún individuo $i \epsilon N$ tal que, para todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathfrak{R}^n$ y todo $x, y \epsilon X$ se cumpla que

$$\sim(xR_i y) \longrightarrow \sim(xs(\underset{\sim}{R})y)$$

Una función de agregación de preferencias es *cuasi - dictatorial* si y sólo si existe algún individuo $i \epsilon N$ tal que, para todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathfrak{R}^n$ y todo $x, y \epsilon X$ se cumpla que

$$\sim(xR_i y) \longrightarrow ys(\underset{\sim}{R})x$$

Para formular las dos condiciones que siguen necesitamos introducir nueva terminología. Sea ρ una función de permutación sobre N, el conjunto de los individuos. Dada una configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$, denotaremos por $\underset{\sim}{R}^\rho$ a la configuración tal que, para todo $i \epsilon N$, $R_i^\rho = R_{\rho(i)}$. Sea σ una función de permutación sobre X, el conjunto de alternativas concebibles. Dada una configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$, denotamos por $\underset{\sim}{R}^\sigma$ a la configuración que, para todo par de alternativas $x, y \epsilon X$, cumpla que, para todo $i \epsilon N$, $xR_i y$ si y sólo si $\sigma(x) R_i^\sigma \sigma(y)$.

$\underset{\sim}{R}^{\rho}$ representa, pues, una situación en la que, manteniéndose las mismas relaciones de preferencias que en $\underset{\sim}{R}$, han canbiado los indivíduos que las detentan. A su vez, el paso de $\underset{\sim}{R}$ a $\underset{\sim}{R}^{\sigma}$ puede verse como una modificación de los papeles jugados por las distintas alternativas de una situación a otra, pero tal que la estructura formal de la configuración de preferencias no quede alterada.

Las condiciones de anonimidad y de neutralidad establecen requisitos de tratamiento simétrico para los distintos indivíduos y alternativas, respectivamente, al imponer restricciones sobre cómo debe responder un método de agregación de preferencias a permutaciones en los papeles jugados por unos u otros.

Una función de agregación de preferencias es *anónima* si y sólo si para toda función de permutación ρ sobre N y todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \mathcal{R}^n$ se cumple que $s(\underset{\sim}{R}) = s(\underset{\sim}{R}^{\rho})$.

Una función de agregación de preferencias, s, es *neutral*, si y sólo si, para toda función de permutación σ sobre X y todo $\underset{\sim}{R} \epsilon \underset{\sim}{R}^n$ se cumple que $x s(\underset{\sim}{R}) y$ si y sólo si $\sigma(x) s(\underset{\sim}{R}^{\sigma}) \sigma(y)$ para cualquier par de alternativas x e y.[9]

Las condiciones anteriores formalizan diversas nociones intuitivas que, según se vean o no satisfechas por una función de agregación de preferencias permiten considerar a dicha función más o menos deseable. En términos generales, P es un requisito de unanimidad, las condiciones de anonimidad y de neutralidad exigen, respectivamente, que todos los indivíduos y todas las alternativas reciban igual tratamiento, y RP es un requisito de sensibilidad por parte de la relación social a los cambios en las preferencias individuales. Junto a estas nociones positivas, la de dictatorialidad y la de cuasi - dictatorialidad expresan formalmente la existencia de rasgos indeseables, "antidemocráticos", en aquellas funciones de agregación de preferencias que las cumplen.

Estamos ahora en condiciones de formular tres teoremas fundamentales.

Proposición 5 (Arrow). – Si $|X| > 2$, toda función de agregación de preferencias transitiva que satisfaga las condiciones de IAI y P debe ser dictatorial.

Proposición 6 (May). – La única función de agregación de preferencias que satisface las condiciones de IAI y RP, es anónima y neutral es la que se basa en la aplicación, para cada configuración de preferencias, del método de ma-

9. Obsérvese que esta condición de neutralidad es distinta, y más débil, que la propuesta por Sen [20] y Segura [19]. En particular, la cumplen las funciones de elección social basadas en métodos de puntuación, que no satisfarían la condición, más estricta, propuesta por los autores antes mencionados. La diferencia se debe a que la condición de neutralidad propuesta por aquéllos es equivalente conjuntamente, y para funciones de agregación de preferencias, a las de independencia de alternativas irrelevantes y de neutralidad (en el sentido aquí utilizado). Para nuestros propósitos resulta conveniente separar el requisito de IAI -cuyas implicaciones veremos con mayor detalle más adelante- del de neutralidad, que aquí se refiere exclusivamente al tratamiento en pie de igualdad de todas las alternativas.

yoría simple. [10]

Proposición 7 (Mas Colell y Sonnenschein). – Si $|X| > 3$, toda función de agregación de preferencias acíclica que satisfaga las condiciones de IAI, P y RP debe ser cuasi - dictatorial.

ALTERNATIVAS A LA INDEPENDENCIA DE ALTERNATIVAS IRRELEVANTES EN EL MARCO DE LAS FUNCIONES DE AGREGACIÓN DE PREFERENCIAS

La combinación de los resultados expuestos en la Sección anterior señala el tipo de dificultades con que tropieza el diseño de funciones de agregación de preferencias satisfactorias. Es bien sabido que la función de agregación de preferencias basada en el método de mayoría simple no es acíclica. Por tanto, combinando la Proposición 1 y el Teorema de May (Prop. 5), vemos que no existe ninguna función de agregación de preferencias que satisfaga las condiciones de May y garantice conjuntos elegidos no vacíos cuando $|X| > 2$. Si exigimos que la función de agregación de preferencias sea acíclica -a fin de garantizar que la función de elección inducida sea decisiva- e incluso renunciando "a priori" a que satisfaga el requisito de anonimidad, nos encontramos con que sólo será posible satisfacer el nuevo conjunto de exigencias a través de procedimientos cuasi-dictatoriales (Prop. 6). Si renunciamos también a la condición de RP, imponiendo a cambio que la función de agregación de preferencias sea transitiva, tenemos que sólo las dictatoriales pueden satisfacer las condiciones impuestas (Arrow).

Este tipo de dificultades señalan a la condición de IAI como clara responsable, si rechazamos aquellas funciones de elección social que, por ser cíclicas, podrían resultar ineficaces para la formación de decisiones sociales. Eliminando la condición de IAI queda libre el camino hacia la construcción de funciones de agregación de preferencias que satisfagan simultáneamente todos los demás requisitos enunciados hasta ahora. Por ello, muchos autores han señalado que, en el marco de las funciones de agregación de preferencias, un reenfoque fructífero de la teoría de la elección social debería pasar por el abandono de la condición de IAI. En particular, y aunque no sea éste el único camino, podría lograrse tal propósito utilizando procedimientos que fuesen capaces de procesar características cardinales de las preferencias individuales. [11]

Pero no hace falta ir tan lejos. El siguiente método, basado exclusivamente en las características ordinales de las preferencias individuales, satisface todos los requisitos anteriormente expuestos excepto el de IAI. Por tratarse de un

10. El método de mayoría simple, aplicado a una configuración de preferencias dada, establece que, para un par de alternativas (x, y) dado, xRy si y sólo si el número de individuos para los que x es estrictamente preferida a y es por lo menos tan grande como el de individuos que prefieren estrictamente y a x.

11. Esta es la possición expresada, por ejemplo, por Sen [20] y por Segura [19]. Desde un ángulo más radical, basado en consideraciones de optimalidad para secuencias de decisiones colectivas, Camacho [5] rompe también con la condición de IAI.

ejemplo, y para simplificar la exposición, nos limitaremos a presentarlo para el caso en que las preferencias son estrictas. Para el caso en que se admitan indiferencias en las preferencias individuales caben varias generalizaciones posibles que no modificarían sustancialmente nuestras conclusiones.[12]

Método de puntuación sobre el conjunto de alternativas concebibles (MPAC):

La *posición de x en* R_i, $r(x, R_i)$, se define como el número de alternativas concebibles que son preferidas o indiferentes a x en R_i. Por tanto, $r(x, R_i) = = |\{y \in x \mid y R_i x\}|$, de modo que, si $|X| = m$, tendremos que $1 \leqslant r(x, R_i) \leqslant \leqslant m$.

Un *vector de puntuación posicional* para $|X| = m$ es un vector m-dimensional $[t_1, t_2, \ldots, t_m]$ tal que $t_1 > t_2 > \ldots > t_m \geqslant 0$.

La puntuación de x en $\underset{\sim}{R}$, $p(x, \underset{\sim}{R})$, se define del siguiente modo:

$$p(x, \underset{\sim}{R}) = \sum_{i=1}^{n} t_{r(x, R_i)}$$

Un MPAC es una función de agregación de preferencias que a cada configuración $\underset{\sim}{R}$ le asigna la relación binaria $s(\underset{\sim}{R})$ definida de modo que $x s(\underset{\sim}{R}) y$ si y sólo si $p(x, \underset{\sim}{R}) \geqslant p(y, \underset{\sim}{R})$, para un vector de puntuación posicional dado.

La siguiente proposición, cuya demotración dejamos al lector, confirma las ventajas de abandonar la condición de IAI en el marco de las funciones de agregación de preferencias.

Proposición 8. Todo MPAC es una función de agregación de preferencias transitiva que satisface las condiciones P y RP, es anónima y neutral.

¿Cómo quedan modificadas las conclusiones hasta aquí apuntadas sí, abandonando el marco de las funciones de agregación de preferencias, investigamos la posibilidad de encontrar funciones de elección social satisfactorias? Para responder a esta pregunta, empezamos por formular condiciones sobre las funciones de elección social que corresponden a las que hemos definido anteriormente para funciones de agregación de preferencias. Algunas dificultades, como era de esperar, perduran. Sin embargo, como también veremos, al considerar la clase, más amplia, de las funciones de elección, se amplían las posibles opciones para la superación de aquéllas.

Antes de cerrar esta sección señalaremos una posible vía de escape a las dificultades anteriores en el propio seno de las funciones de agregación de preferencias, que, como veremos, no consigue superarlas satisfactoriamente. Hemos demostrado (Proposición 2) que las condiciones de binariedad de IAI son equivalentes. De hecho, la demostración que Arrow facilita de su teorema, aunque postula sobre sus funciones de bienestar la condición de IAI, se basa en la utilización repetida de la condición de binariedad.

12. Las virtudes de las funciones de elección por puntuación, en sus distintas versiones, que iremos exponiendo a lo largo del artículo, justifica el renovado interés por este tipo de funciones en la literatura reciente. Véanse, por ejemplo [6], [9], [22] y [23].

Naturalmente, la equivalencia entre una y otra hacen que el procedimiento sea totalmente legítimo. Sin embargo, existen circunstancias bajo las cuales la formulación que hemos venido dando del problema de elección mediante funciones de agregación de preferencias podría resultar excesivamente restrictivo. Hemos estado definiendo, hasta ahora, las propiedades de dichos métodos en términos de su funcionamiento para conjuntos cualesquiera de $\mathcal{X}$. Esto refleja la exigencia de que estén preparados para operar sea cual sea el conjunto de alternativas factibles. En ocasiones, sin embargo, algunos conjuntos de alternativas podrían rechazarse "a priori" como posibles conjuntos factibles. Así, por ejemplo, si el número de alternativas concebibles es muy elevado, cabría pensar que nunca se dará el caso en que sólo dos de ellas resulten factibles. Para expresar formalmente situaciones de este tipo podríamos redefinir las propiedades anteriores exigiendo, cuando sea pertinente, que las funciones de agregación de preferencias las satisfagan solamente para determinados subconjuntos de X, a los que podríamos llamar conjuntos relevantes de alternativas factibles. Sea $\mathcal{Y}$ el conjunto de tales conjuntos relevantes. La condición de IAI, convenientemente modificada, quedaría así:

Una función de agregación de preferencias, s, es independiente de alternativas irrelevantes para $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ si y sólo si, para cualquier $Y \in \mathcal{Y}$, si $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ son configuraciones de preferencias que coinciden en Y, se cumple que $C(Y, s(\underset{\sim}{R})) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}'))$.

Observemos ahora que la condición de binariedad deja de ser equivalente a la de IAI en este nuevo contexto. Toda función de agregación de preferencias binaria sigue siendo IAI, pero, para determinadas colecciones de subconjuntos Y es posible que s satisfaga IAI sin ser binaria, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo. – Sea $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{Y} = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b, c,\}\}$.

Supongamos que $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coinciden en $\{a, b, c\}$, y que $\sim(ds(\underset{\sim}{R})c)$, $\sim(cs(\underset{\sim}{R})b)$, $\sim(bs(\underset{\sim}{R})a)$, mientras que $\sim(ds(\underset{\sim}{R}')c)$, $\sim(bs(R')c)$, $\sim(cs(\underset{\sim}{R}')a)$.

Si a es una función de bienestar (y por tanto $s(\underset{\sim}{R})$ y $s(\underset{\sim}{R}')$ son transitivas), la situación anterior establece que, para $\underset{\sim}{R}$, a resulta estrictamente preferida a b, b a c, y c a d, mientras que, para $\underset{\sim}{R}'$, a resulta preferida a c, c a b y b a d.

Como $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ coinciden en $\{a, b, c\}$, también coinciden en $\{b, c\}$. Sin embargo, $s(\underset{\sim}{R})$ y $s(\underset{\sim}{R}')$ no coinciden en $\{b, c\}$, por lo que la función s no sería binaria. Cumpliría, sin embargo, para $\mathcal{Y}$, el requisito impuesto por la condición de IAI, ya que $C(\{a, b, c\}, s(R)) = C(\{a, b, c\}, s(\underset{\sim}{R}')) = a$.

Vemos, pues, que bajo determinadas restricciones sobre los conjuntos relevantes de alternativas factibles, la condición de IAI resulta más débil que la de binariedad. Como esta última es la que Arrow utiliza en la demostración de su teorema de imposibilidad, cabría preguntarse por la posibilidad que, para determinados conjuntos $\mathcal{Y}$ pudieran evitarse las dificultades con que nos hemos ido encontrando. La respuesta, esencialmente negativa, a esta cuestión, nos la proporciona la siguiente versión de un teorema debido a Blau [4], y que presentamos sin demostración: si la clase relevante de conjuntos factibles es suficientemente rica, persisten en todo su rigor las dificultades señaladas por Arrow.

Es más: lo mismo ocurriría si relajásemos el requisito de transitividad, a la manera de Mas Colell y Sonnenschein, como ha sido demostrado por Fishburn [8].

Proposición 9. Sea X un conjunto finito de alternativas y $|X| = k > 2$. Si $\mathcal{Y}$ contiene todos los subconjuntos de X que constan de $k-1$ elementos, no existe ninguna función de agregación de preferencias transitiva que satisfaga las condiciones P a IAI para $\mathcal{Y}$ y no sea dictatorial.

Visto, pues, que las dificultades por compatibilizar las condiciones de decisividad y de IAI (incluso en su versión débil) en el marco de las funciones de agregación de preferencias son profundas, pasemos a investigar cómo se modifica la situación en el contexto, más amplio, de las funciones de elección social.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE ELECCION SOCIAL

Las siguientes condiciones sobre funciones de elección social son adaptaciones de las que hemos definido anteriormente para funciones de agregación de preferencias. Para no introducir nueva terminología, utilizaremos los mismos nombres señalando con un asterisco (*) que, en este caso, se aplican a funciones de elección.

Una función de elección social, f, satisface la condición P* si y sólo si, para todo par de alternativas x, $y \in X$, y toda configuración de preferencias $\underset{\sim}{R}$ **tal que, para todo** $i \in N$, $\sim(y R_i x)$, se cumple que $[\langle x, y\rangle \subseteq Y] \longrightarrow [y \notin f(Y, \underset{\sim}{R})]$.

Una función de elección social, f, satisface la condición RP* si y sólo si, para todo par de alternativas x, $y \in X$, y para todo par de configuraciones de preferencias $\underset{\sim}{R}$ y $\underset{\sim}{R}'$ tales que

(1) si a y b son distintas de x, $a R_i b \longleftrightarrow a R_i' b$ para todo $i \in N$

(2) para todo a, $[\sim(a R_i x) \rightarrow \sim(a R_i' x)]$ & $[(a R_i x \;\&\; x R_i a) \longrightarrow x R_i a]$, para todo $i \in N$, y

(3) para algún $i \in N$, se cumple que $y R_i x$ & $\sim(y R_i' x)$, o bien que $\sim(x R_i y)$ & $x R_i' y$

se cumple que

$$x \in f(Y, \underset{\sim}{R}) \longrightarrow y \notin f(Y, \underset{\sim}{R}').$$

Una función de elección social es dictatorial* si y sólo si existe algún individuo $i \in N$ tal que, para todo $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$ y todo $Y \subseteq X$ se cumple que $f(Y, \underset{\sim}{R}) \subseteq C(Y, R_i)$.

Una función de elección social es cuasi-dictatorial* si y sólo si existe algún individuo $i \in N$ tal que, para todo $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$ y todo $Y \subseteq X$ se cumpla que $C(Y, R_i) \subseteq f(Y, \underset{\sim}{R})$.

Una función de elección social es anónima* si y sólo si, para toda función de permutación ρ sobre N, todo $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$ y todo $Y \subseteq X$, se cumple que $f(Y, \underset{\sim}{R}) = f(Y, \underset{\sim}{R}^{\rho})$.

Una función de elección social es neutral* si y sólo si, para toda función de permutación σ sobre X, todo $\underset{\sim}{R} \in \mathcal{R}^n$ y todo $Y \subseteq X$ se cumple que $f(Y, \underset{\sim}{R}^{\sigma}) = \sigma(f(Y, \underset{\sim}{R}))$, donde $\sigma(f(Y, \underset{\sim}{R})) = \{z \mid z = \sigma(y) \text{ para algún } y \in f(Y, \underset{\sim}{R})\}$.

DIFICULTADES EN EL DISEÑO DE FUNCIONES DE ELECCION SOCIAL SATISFACTORIAS: VIAS DE SUPERACION

¿Hasta qué punto constituye una ampliación del campo de posibilidades abierto en el diseño de mecanismos de elección el paso desde el marco de las funciones de agregación de preferencias al de las funciones de elección social? Por una parte, y como era de esperar, las mismas dificultades y las mismas vías de superación persisten si nos limitamos a las funciones de elección social racionalizables. La proposición 10 constituye una reformulación del teorema de May y señala algunas de las dificultades que se derivan de exigir de una función de elección social que sea decisiva y racionalizable. La proposición 11 es una versión del teorema de Arrow y de nuevo pone de relieve la incompatibilidad de las exigencias de decisividad y la de racionalidad implicada por IAEF. Dicha condición es, sin embargo, como ya hemos señalado, muy estricta. La Proposición 12, que reformula el resultado de Mas Colell y Sonnenschein, demuestra que incluso relajándose sustancialmente al nivel mínimo de racionalidad que garantiza la decisividad, se mantienen muchos de los problemas inherentes al diseño de funciones de elección social racionalizables y decisivas. La Proposición 13, una reformulación de la 8, indica un camino posible para superar las dificultades anteriores mediante el abandono de la condición de IANF, cuyo papel corresponde al que jugaba la de IAI en el marco, más estrecho, de las funciones de agregación de preferencias. Tenemos, sin embargo, nuevas opciones abiertas, que no habrían sido posibles en el contexto anterior: aquéllas que se derivan, precisamente, del abandono del requisito de racionalidad sobre las funciones de elección social. En la Proposición 14 demostramos, mediante un ejemplo, la posibilidad de hallar funciones de elección social no racionalizables que satisfagan todos los demás requisitos positivos hasta aquí señalados.

Proposición 10. Toda función de elección social f que sea racionalizable, decisiva, neutral,* anónima,* PR* e IANF debe estar basada en la aplicación, para cada configuración de preferencias, del método de mayoría simple.

El lector interesado podrá comprobar que las Proposiciones 2 y 6 implican el resultado de la 10.

Proposición 11. Si $|X| > 2$, toda función de elección social f que satisfaga las condiciones de IAEF, IANF y P* es dictatorial.*

Demostración. Si f es IAEF, es t-racionalizable y, por tanto, decisiva. Como f es IANF, la función de agregación de preferencias que la racionaliza es IAI. Como f satisface P,* s satisface P. Por tanto, según el Teorema de Arrow (Proposición 5), s es dictatorial. De ello se sigue que f es dictatorial.*

Proposición 12. Si $|X| > 3$, toda función de elección social racionalizable y decisiva que satisfaga las condiciones de IANF y P* es cuasi-dictatorial.*

El lector interesado podrá comprobar, por un razonamiento análogo al de la demostración anterior, que el resultado aquí expresado se sigue de las Proposiciones 1 y 7.

Proposición 13. Existen funciones de elección social que satisfacen las condiciones de IAEF, P, PR, neutralidad y anonimidad.

Demostración. Basta considerar la función de elección social definida por $f(Y, \underset{\sim}{R}) = C(Y, s(\underset{\sim}{R}))$, para cualquier $s(\underset{\sim}{R})$ que sea un método de puntuación sobre el conjunto de alternativas concebibles (MPAC). Dejamos para el lector interesado la comprobación detallada de que se cumplen las condiciones expresadas. Obsérvese, sin embargo, que no se cumplirá la de IANF.

Observemos que la condición de IAEF implica (Prop. 3) dos propiedades distintas para las funciones de elección que las cumplan: que sean racionalizables y que sean decisivas. La decisividad parece una propiedad esencial para cualquier función de elección que deba contribuir eficazmente a la selección de alternativas factibles. Para lograrla no es necesario, sin embargo, que la función de elección social sea racionalizable, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 14. Existen funciones de elección social decisivas que satisfacen las condiciones de IANF, P,* PR* y son anónimas* y neutrales.*

Demostración. Describiremos una clase de funciones de elección que satisfacen las condiciones expresadas. Dejamos para el lector interesado la comprobación de que dichas condiciones se ven, efectivamente, satisfechas, el *Método de puntuación sobre el conjunto de alternativas factibles (MPAF).*

Sea X el conjunto de alternativas concebibles, y $|X| = m$. Partiremos, como en el caso del MAPC, de un vector de puntuación posicional $[t_1, t_2, \ldots, t_m]$.

La posición de x en Y, R_i, $v(x, Y, R_i)$, se define como el número de alternativas (factibles) en Y que son preferidas o indiferentes a x en R_i. Formalmente, $v(x, Y, R_i) = \{y \epsilon Y \mid y R_i x\}$. Por tanto, si $|Y| = h$, tendremos que $1 \leqslant v(x, Y, R_i) \leqslant h$.

La puntuación de x en Y, $\underset{\sim}{R}$ se define del siguiente modo:

$$q(x, \underset{\sim}{R}, Y) = \sum_{i=1}^{n} t_{v(x, Y, R_i)} - |X| + |Y|$$

Un *MAPF* es una función de elección social f que a cada par Y, $\underset{\sim}{R}$ le asigna el conjunto $f(Y, \underset{\sim}{R}) = \{z \mid z \epsilon Y$ tales que $q(z, \underset{\sim}{R}, Y) \geqslant q(y, \underset{\sim}{R}, Y)$ para todo $y \epsilon Y\}$, para un vector de puntuación posicional dado.

Vemos, pues, que las condiciones de IANF y de decisividad son perfectamente compatibles cuando se aplican sobre funciones de elección social, con tal que éstas no deban ser, además, racionalizables. El dilema entre aquellas condiciones, que se establecía en el seno de las funciones de agregación de preferencias queda ahora, para funciones de elección social, como un aspecto de la relación conflictiva entre ellas y una tercera condición, antes implícita en la propia formulación del problema: la racionalidad del método de elección. Con ello no queda resuelto el problema central de la teoría de la elección social: sigue sin ser posible hallar funciones que sean satisfactorias atendiendo, simultáneamente, a todos los criterios que hemos ido identificando. Y el diseñador de un mecanismo de elección debera optar, en consecuencia, por unas propiedades u otras. Pero esta decisión dependerá ya de consideraciones cuya índole no es teórica. El papel de la teoría se reduce a señalar que, consciente o inconscientemente, la adopción de todo mecanismo de elección conlleva no sólo la aceptación de ciertas normas sino, necesaria y simultáneamente, el rechazo de algunas otras.

CONCLUSIONES

Hemos presentado un marco general para el problema de la elección social entre alternativas en base a las preferencias individuales. Dentro de este marco hemos establecido relaciones entre las funciones de elección social y las de agregación de preferencias y esclarecido la relación existente entre la condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes propuesta por Arrow, que se refiere a las segundas, y diversas condiciones que formalizan propiedades deseables en las primeras. Hemos demostrado también que el dilema fundamental que se establece en el seno de las funciones de agregación de preferencias entre decisividad e Independencia de Alternativas Irrelevantes se convierte, en el marco más amplio de las funciones de elección social, en un conflicto entre tres condiciones: decisividad, racionalidad e Independencia de Alternativas no Factibles. Aunque existan funciones de elección social decisivas y racionalizables satisfactorias no podrán ser independientes de Alternativas no Factibles. Ello plantea problemas importantes de operatividad, puesto que para definir precisamente tales funciones habría que delimitar previamente el conjunto de alternativas concebibles (factibles y no factibles) y dicha delimitación comportará inevitablemente un elemento de arbitrariedad. Por otra parte, es posible construir funciones de elección social decisivas e Independientes de Alternativas no Factibles satisfactorias si renunciamos a que sean racionalizables. En muchas ocasiones, tal estado de cosas sería totalmente aceptable: la selección de una alternativa sobre otra no podría ya racionalizarse en términos de ninguna relación binaria ("socialmente mejor que") pero podría justificarse apelando a las propiedades del propio proceso de elección: su neutralidad, anonimidad, eficiencia Paretiana y su sensibilidad (RP). No siempre, sin embargo, será esta solución plenamente satisfactoria. En ocasiones -y éste fue en su origen el fin perseguido por Arrow- el propósito del teórico es fundamentar la formación de juicios de valor sobre las alternativas sociales atendiendo a las preferencias individuales con respecto a aquéllas. En estos casos, la naturaleza del problema descarta como inválidos aquellos procedimientos que no sean racionalizables, y habrá que aceptar, con todos sus peligros, la necesidad de romper con la condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes.

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Autónoma de Madrid

BIBLIOGRAFIA

1. ARROW, K.: *Social Choice and Individual Values*, 2ª Edición, Yale University Press, New Haven, 1963. (Existe traducción al castellano, editada por el Instituto de Estudios Fiscales).
2. ARROW, K.: "Rational Choice Functions and Orderings", *Economica 26*, 1959.
3. ARROW, K.: "General Economic Equilibrium: Purpose, Analytic Technique Collective Choice", *American Economic Review* LXIV, 1974.
4. BLAU, J.: "Arrow's Theorem with Weak Independence", *Economica 38*, 1971.
5. CAMACHO, A.: "Societies and Social Decision Functions", en *Developments in the Methodology of Social Science*, editado por Leinfellner y Köhler, Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.
6. FISHBURN, P.: *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
7. FISHBURN, P.: "Subset Choice Conditions and the Computation of Social Choice Sets", *The Quartery Journal of Economics*, 88, 1974.
8. FISHBURN, P.: "On Collective Rationality and a Generalized Impossibility Theorem", *Review of Economic Studies* XLI, 1974.
9. GÄRDENFORS, P.: "Positionalist Voting Functions", *Theory and Decision 4*, 1973.
10. HANSSON, B.: "The Independence Condition in the Theory of Social Choice", *Theory and Decision 4*, 1973.
11. KARNI, E. y SCHMEIDLER, D.: "Independence of Non-Feasible Alternatives and Independence of Non-Optimal Alternatives", presentado al tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto 1975.
12. MAS COLELL, A. y SONNENSCHEIN, H.: "General Possibility Theorems for Group Decisions", *Review of Economic Studies 39*, 1973.
13. MAY, K.: "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision", *Econometrica 20*, 1952.
14. MAYSTON, D.: "Alternatives to Irrelevant Alternatives", presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto, 1975.
15. PATTANAIK, P.: "A Note on Independence of Irrelevant Alternatives and Nash - Stability of Sincere Voting Situations", mimeo, La Trobe University, Australia, 1975.
16. PLOTT, C.: "Path Independence, Rationality and Social Choice", *Econometrica 41*, 1973.
17. RAY, P.: "Independence of Irrelevant Alternatives", *Econometrica, 41*, 1973.
18. RICHTER, M.: "Rational Choice", en *Preference, Utility and Demand*, editado por Chipman et alii, Hartcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

8. FRIEDMAN, M.: Discussion of the Inflationary Gap, *Essays in Positive Economics,* Chicago, pp. 253-257. 1953.
9. FRIEDMAN, M.: *A Theory of the Consumption Function,* Princeton University Press, Princeton, N.J. 1957.
10. FRIEDMAN, M.: The Demand for Money: Some Theoretical and Empirical Results, *Journal of Political Economy,* n^{o} 71, pp. 327-351. Agosto 1959.
11. FRIEDMAN, M.: *The Optimum Quantity of Money and Other Essays,* Aldine Publishing Company, Chicago. 1969.
12. FRIEDMAN, M.: Government Revenue from Inflation, *Journal of Political Economy,* n^{o} 79, pp. 846-856. Julio-Agosto 1971.
13. FRIEDMAN, M. and SCHWARTZ, A.: The Definition of Money. Net Wealth and Neutrality Criteria, *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol. 1, n^{o} 1, pp. 1-15. Feb. 1969.
14. FRIEDMAN and SCHWARTZ, A.J.: *Money Statistics of the U.S.,* National Bureau of Economic Research, New York. 1970.
15. GRANDMONT, J.M.: On the Long Run Quantity Theroy of Money, Artículo de discusión, Paris. Abril 1971.
16. GRANDMONT, J.M. and YOUNES, Y.: On the Role of Money and the Existence of Monetary Equilibrium, *Review of Economic Studies,* Vol. 39, pp. 355-372. Julio, 1972.
17. HICKS, J.R.: A Suggestion for Simplifying the Theory of Money, *Economica* New Series, n^{o} 2, pp. 1-19. Feb. 1935.
18. JOHNSON, H.G.: Money in a Neo-Classical One-Sector Growth Money, *Essays in Monetary Economics,* Allen & Unwin, London. 1967.
19. JOHNSON, H.G.: Inside Money, Outside Money, Income Wealth and Welfare in Monetary Theroy, *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol. 1, n^{o} 1, pp. 30-45. Feb. 1969.
20. KALECKI, M.: Professor Pigou on the Classical Stationary State A Comment, *Economic Journal,* n^{o} 54, pp. 131-132. Enero 1944.
21. KURZ, M.: Equilibrium in a Finite Sequence of Markets with Transaction Costs, *Econometrica,* Vol. 42. n^{o} 1, pp. 1-20. Enero 1974.
22. KURZ, M.: Equilibrium with Transaction Costs and Money in a Simple Market Exchange Economy, *Journal of Economic Theroy,* n^{o} 7, pp. 418-452. Abril 1974.
23. LANGE, O.: Say's Law: A Restatement and Criticism, *Studies in Mathematical Economics and Econometrics,* University of Chicago Press. 1942.
24. LEVHARI, D. and PATINKIN, D.: The Role of Money in a Simple Growth **Model**, *American Economic Review,* Vol. 58, n^{o} 4, pp. 713-753. Sept. 1968.
25. MARTY, A.L.: The Optimal Rate of Growth of Money, *Journal of Political Economy,* n^{o} 76, pp. 860-873. Julio-Agosto 1968.
26. MARTY, A.L.: Growth, Satiety and the Tax Revenue from Money Creatión, *Journal of Political Economy,* Vol. 81, n^{o} 5, pp. 1136-1152. Sep-Oct. 1973.
27. PATINKIN, D.: Relative Prices, Say's Law and Demand for Money, *Econometric,* n^{o} 16, pp. 135-154. Abril, 1948.
28. PATINKIN, D.: *Money, Interest and Prices,* Evanston Row Peterson; 1^{a} edición (2^{a} edición, 1965, New York). 1956.
29. PESEK, B.P. and SAVING, Th. R.: *Money, Wealth, and Economic Theroy,* McMillan, New York, 1967.

19. SEGURA, J.: "Elección Social, Cardinalidad, Comparabilidad y Distribución," *Anales de Economía 21-22,* 1974.
20. SEN, A.: *Collective Choice and Social Welfare,* Holden Day, San Francisco, 1970.
21. SEN, A.: "Social Choice Theory: A Re-Examination", presentado al Tercer Congreso Mundial de la Econometric Society, Toronto 1975.
22. SMITH, J.: "Aggregation of Preferences with Variable Electorate". *Econometrica 41,* 1973.
23. YOUNG, H.: "A Note on Preference Aggregation", *Econometrica, 42,* 1974.