

*Sobre la computación de los equilibrios en economías lineales.\**

---

I.— INTRODUCCION

El presente trabajo es complementario al artículo (7). Allí se examinaron, en el contexto de una economía productiva con tecnología especificada por actividades lineales, las propiedades de convergencia del tâtonnement Walrasiano. Esquematiizando sobremanera, se concluyó que como mecanismo de computación de precios de equilibrio (competitivo) el tâtonnement es más bien pobre: de hecho no supimos encontrar condición alguna que garantizase convergencia global (el tipo de convergencia relevante para propósitos de computación); algunas modificaciones del mecanismo básico convergían mejor, pero no mucho mejor.

Así pues, el siguiente problema subsiste: especificada numéricamente una economía con actividades lineales, ¿cómo computar un sistema de precios de equilibrio?. Presentaremos aquí una solución a este problema. El mecanismo que se sugerirá pertenece a la familia de los algoritmos para computación de puntos fijos (o resolución de ecuaciones no lineales, véase Scarf (9)) y está especialmente en deuda con Eaves - Scarf (4) y sobretodo, dado que nos moveremos en un contexto diferencial más que combinatorio, con el reciente y fundamental artículo de Smale (10); véase también el muy estimulante libro de Milnor (8).

El contenido de las secciones 2, 3 y 4 es bien conocido y es preparatorio de la sección 5 donde se presenta el mecanismo para la economía con tecnología lineal. En aras a la claridad, los argumentos puramente matemáticos no se prosiguen con rigor completo. Mencionamos como un inciso que formalmente el problema de esta comunicación es clasificable en la categoría "problemas de complementariedad no lineales".

\* Esta comunicación fue presentada en el Simposio sobre Modelos Económicos Multisectoriales: Teoría y Aplicaciones, organizado por el Departamento de Teoría Económica de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, Octubre de 1976.

La relevancia teórica del tâtonnement Walrasiano se proyecta en más de una dirección. En particular, Walras lo propuso no simplemente como método de computación sino también como modelo de operación de una economía competitiva *descentralizada*. Como tal fue retomado por Lange (5) que lo presentó como solución descentralizada al problema del cálculo económico en una economía socialista. Un análisis riguroso del mecanismo de Lange ha sido llevado a término con Arrow-Hurwicz(1). Sin adentrarnos en la espinosa, y no muy crucial, cuestión de poner fronteras conceptuales que delimiten lo que es centralizado y lo que es descentralizado, parece claro que el mecanismo de esta comunicación caería del lado centralizado, por lo que respecta a la computación y del lado descentralizado en la que concierne a la toma de decisiones individuales.

## 2.— Descripción del modelo

Hay un número  $l$  de mercancías. El símbolo  $p = (p^1, \dots, p^l)$  representa un vector de precios. El repertorio de mercancías incluye desde bienes físicos a distintos tipos de servicios como el trabajo.

Al nivel conceptual la economía se dividirá en dos sectores o compartimientos, el *sector de producción* y el *sector de consumo*.

### a) Sector de producción.

La responsabilidad del sector de producción es la transformación de unas mercancías en otras. En la vida económica real ello se organiza por medio de factorías y empresas y tiene una dimensión temporal evidente pero para los objetivos de este artículo la institucionalización del proceso de producción es irrelevante y los aspectos temporales pueden abstraerse. Lo único que interesa conocer son las combinaciones de *inputs* y *outputs* técnicamente posibles.

Se seguirá la convención habitual de dar a los *inputs* signo negativo y a los *outputs* signo positivo. Así, si  $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^l)$  y  $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^l)$  son vectores input-output técnicamente posibles,  $x_1 + x_2 = (x_1^1 + x_2^1, \dots, x_1^l + x_2^l)$  también lo será.

El *sector de producción* quedaría por lo tanto completamente especificado por un conjunto  $Y \subset R^l$ , llamado *conjunto de producción*, a interpretar como el conjunto de combinaciones input-output que son realizables. Reharemos sin embargo tanta generalidad. La tecnología de nuestra economía será de rendimientos *constantes a escala*, es decir si  $\alpha \geq 0$  y  $x \in Y$  entonces  $\alpha x = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^l)$  también es realizable, o sea,  $\alpha x \in Y$ . Aún más concretamente, adoptaremos el modelo de *actividades lineales* de Koopmans (véase el capítulo 4 de Debreu (2)). En éste tenemos un número finito de vectores input-output  $\{a_1, \dots, a_m\} = A$  llamados *actividades básicas o elementales*. El conjunto de producción es entonces el conjunto de todos los vectores input-output que pueden obtenerse a partir de operar las actividades a algún nivel no negativo, es decir,  $Y = \left\{ \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m : \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0 \right\}$ ,

$\alpha_j$  es el nivel de actividad de la actividad  $a_j$ . Está claro que  $Y$  satisface la condición definitoria  $Y + Y \subset Y$  (donde  $Y + Y = \{ y + y' : y \in Y, y' \in Y \}$ ) y es por lo tanto un conjunto de producción. De hecho,  $Y$  es, por su definición, un *cono polihédrico y convexo*.

Se impondrán las siguientes hipótesis familiares:

**Hipótesis 1:**

(“Eliminación libre”), para todo  $1 \leq j \leq \ell$  el vector input-output  $x$  definido por  $x^i = -1$  si  $i = j$  y  $x^i = 0$  si  $i \neq j$  pertenece a  $Y$ .

Es decir, no se incurren costos por la destrucción (o simplemente, la no utilización) de mercancías. Geométricamente, la hipótesis 1 significa  $-R_+^\ell \subset Y$ , donde  $R_+^\ell = \{ x \in R^\ell : x^j \geq 0 \text{ para todo } j \}$ ; vease la figura 1.

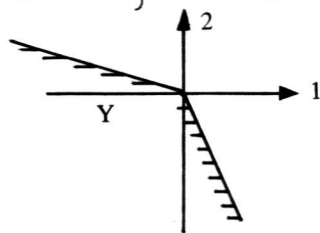


FIG. 1

**Hipótesis 2:**

(“de la nada nada sale”): El único vector con todos sus componentes no negativos que pertenece a  $Y$  es el vector  $O = (0, \dots, 0)$ .

Es decir, si se produce una cantidad positiva de algún output hay que utilizar una cantidad positiva de algún input; la figura 1 es permitida por esta hipótesis, no así la figura 2.

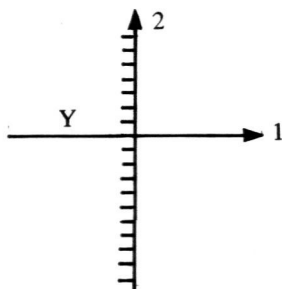


FIG. 2

Las hipótesis 1 y 2 son tradicionales. Para nuestros objetivos precisaremos también una condición de regularidad (empleando la locución regular como opuesta a degenerada).

**Hipótesis 3:**

(“regularidad”): Si  $A' \subset A$  y el número de actividades en  $A'$  es inferior o igual a  $l$ , entonces  $A'$  es una colección de vectores linealmente independientes.

La hipótesis 3 no es restrictiva. Perturbando ligeramente las actividades básicas siempre podemos asegurar su cumplimiento. Geométricamente, la hipótesis 3 implica que  $Y$  es un cono apuntado (como en la figura 1); la situación de la figura 3 no es permitida por esta hipótesis.

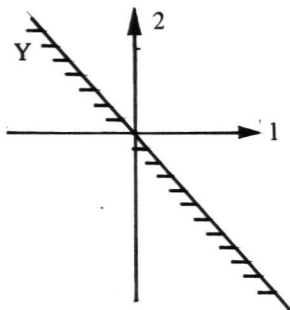


FIG. 3

Supondremos que *dado un vector de precios  $p$  el sector de producción intenta maximizar sus beneficios* o, dicho de otra forma, que para toda actividad  $a \in A$ , si  $p \cdot a \equiv \sum_{j=1}^l p^j a^j < 0$  entonces la actividad se opera a nivel cero, si  $p \cdot a > 0$  el nivel de operación tiende a infinito y si  $p \cdot a = 0$  el nivel de operación es indeterminado.

Se dirá que, dado  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  y  $p$  los niveles de actividad  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ( $0 \leq \alpha_j < \infty$ ) están en equilibrio si, para todo  $l \leq j \leq m$ ,  $p \cdot a_j \leq 0$  y  $p \cdot a_j < 0$  implica  $\alpha_j = 0$ , es decir, si los niveles de actividad maximizan los beneficios a los precios dados. En un equilibrio los beneficios son siempre nulos (lo que refleja la implicación de libre entrada de los rendimientos constantes a escala).

**b) Sector de consumo**

El sector de consumo será especificado por una función de demanda excedente  $f(p)$  definida tan solo para precios estrictamente positivos, es decir, dado un sistema de precios  $p = (p^1, \dots, p^l)$  tal que  $p^j > 0$  para todo  $j$ ,  $f(p) = (f^1(p), \dots, f^l(p))$  es el vector de demandas netas resultante; está claro que hay que interpretar los componentes negativos de  $f(p)$  como ofertas.

En este artículo se toma a la función de demanda excedente como un dato primitivo del problema. Lo que haya por detrás de la función: consumidores propiamente dichos, empresas, sectores exteriores, sector público, ... no nos interesa de momento.

Se impondrán sobre la función de demanda excedente las hipótesis de costumbre:

**Hipótesis 4:**

(“Ausencia de ilusión monetaria”) Para todo  $p$  y  $\alpha > 0$ , se tiene  $f(p) = f(\alpha p)$ .

**Hipótesis 5:**

(“Ley de Walras”) Para todo  $p$ , se tiene  $p \cdot f(p) = 0$ .

**Hipótesis 6:**

(“finidad del universo”): La función de demanda excedente está uniformemente acotada por debajo; es decir, hay un vector  $z \in \mathbb{R}^k$  tal que  $f(p) \geq z$  para todo  $p$ .

También supondrá:

**Hipótesis 7:**

(“diferenciabilidad”):  $f$  es una función diferenciable de orden 1, es decir tiene derivadas parciales continuas.

**Hipótesis 8:**

(“todas las mercancías son deseables”): Supóngase que  $p_n \rightarrow p$ , donde  $p \neq 0$  pero  $p^j = 0$  para algún  $j$ . Entonces  $\| f(p_n) \| \rightarrow \infty$   $\| \cdot \|$  es la norma euclidiana.

La interpretación de la hipótesis 8 (habido cuenta de la 6) es la siguiente: si algunos precios tienden a cero entonces la demanda de alguna de las mercancías con precio cero tiende a infinito. Es decir, desde el punto de vista del consumo todas las mercancías son deseables.

No es ésta una hipótesis muy realista. En un contexto productivo muchas mercancías serán típicamente productos intermedios puros, sin utilidad directa para el consumo. Ahora bien, y adelantando algunas etapas, nuestro interés está en la computación de precios de equilibrio y esto habrá siempre que entenderlo como computación aproximada. En efecto, un método algorítmico implementable en la práctica no puede realizar más que un número finito de iteraciones y en nuestro problema esto no bastará para una solución exacta; aunque, como debe, todos los datos del problema sean expresables por números enteros la solución puede muy bien ser un número irracional. Se puede demostrar fácilmente que toda función de demanda excedente que satisfaga las hipótesis 4, 5, 6 puede aproximarse (en el sentido relevante) por una que también satisfaga la hipótesis 8 (véase la figura 4).

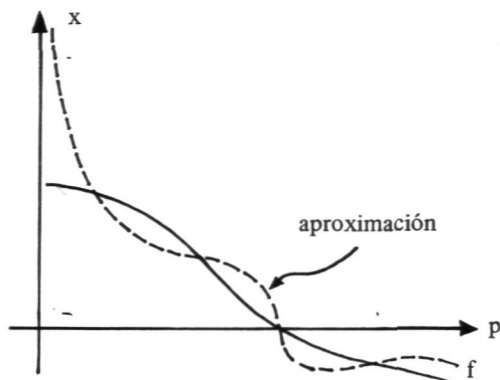


FIG. 4

Como nuestro problema cumple la condición de continuidad mínima de que una solución aproximada a una aproximación al problema original es una solución aproximada al problema original, se desprende que la hipótesis 8 no representa ninguna pérdida de generalidad (lo mismo se aplica a la hipótesis 3).

El modelo de este artículo incluye como caso particular el modelo estudiado en A. Mas Colell (7). El de aquí constituye una generalización en dos aspectos fundamentales: el primero es que se admite la producción conjunta puesto que nuestras actividades lineales no están restringidas y las de (7) eran del tipo de Leontief, el segundo que no se requiere que la función de demanda excedente cumpla el Axioma Débil de la Preferencia Revelada. Las hipótesis de rendimientos constantes a escala y de un número finito de actividades se mantienen.

El par actividades básicas —función de demanda excedente  $(A, f)$  describe completamente la economía. Asociado a  $A$  tenemos el conjunto de producción  $Y$ .

Dado  $Y$  y la función  $f$  diremos que *el vector de precios  $p$  es factible si  $f(p) \in Y$* , es decir si con las cantidades de inputs que el sector de consumo ofrece es técnicamente posible producir las cantidades de outputs que demanda.

Diremos que  *$p$  es un vector de precios de equilibrio si es factible y, además,  $f(p)$  maximiza los beneficios*. En nuestro caso esto quiere decir simplemente que  $p \cdot a_i \leq 0$  para todo  $a_i$ .

La siguiente observación es importante para los desarrollos ulteriores: supóngase que  $p$  es un equilibrio; entonces, por definición,  $f(p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$ . Ahora bien,  $\alpha_i > 0$  solo si  $p \cdot a_i = 0$ . En virtud de la hipótesis 3 hay como máximo  $\ell$  actividades tales que  $p \cdot a_i = 0$ , de donde se desprende que  $f(p)$  es una combinación lineal de un máximo de  $\ell$  actividades lo que implica, en virtud otra vez de la hipótesis 3, que los coeficientes  $\alpha_i$  de esas actividades están únicamente determinados. Resumiendo: *si  $p$  es un equilibrio entonces los coeficientes  $\alpha_i$  tales que  $f(p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$  están únicamente determinados*.

Nuestro problema es: *¿cómo determinar prácticamente (es decir, computar) un sistema de precios de equilibrio?*

### 3.— Una construcción auxiliar, tratamiento informal del mecanismo propuesto.

El problema computacional que nos hemos planteado será resuelto por medio de una construcción auxiliar: la de familia uniparamétrica de economías. En esta sección introduciremos el concepto y de forma poco rigurosa se expondrá la esencia del mecanismo computacional que se propone. Este será descrito más detallada y rigurosamente en las secciones 4 y 5.

Suponemos siempre que la economía dada  $(A, f)$  satisface las hipótesis de la sección 2. Convendrá también que de ahora en adelante exploremos la hipótesis 4 para normalizar el sistema de precios. Sea  $S = \{ p \in \mathbb{R}^\ell : p^j > 0 \text{ para } j, y \| p \| = 1 \}$ , véase la figura 5. En virtud de la hipótesis 4 no se pierde ninguna generalidad por

considerar tan solo vectores de precios en  $S$ . Así se hará en lo sucesivo sin necesidad de advertencia previa.

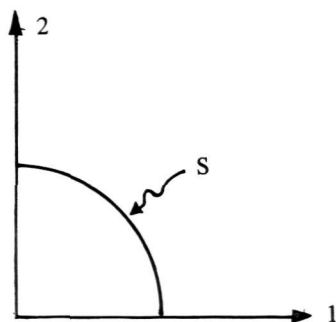


FIG. 5

Tómese para empezar una función de demanda excedente  $h(p)$  arbitraria que satisfaga:

- (i)  $h$  cumple la hipótesis 4 a 8.
- (ii)  $(A, h)$  tiene un único sistema de precios (normalizado) de equilibrio  $\bar{p}$ . Además,  $h(\bar{p}) = 0$  y  $\bar{p} \cdot a < 0$  para todo  $a \in A$ .

Puesto que  $Y$  es un cono apuntado, funciones de demanda excedente que satisfagan (i) y (ii) son bien fáciles de encontrar; de hecho, hay un amplio margen de elección. Más que construir formalmente una función  $h$ , preferimos remitirnos a la figura 6 donde, para  $\ell = 2$ , se ha dibujado la curva de oferta ("offer curve") correspondiente a  $h$ .

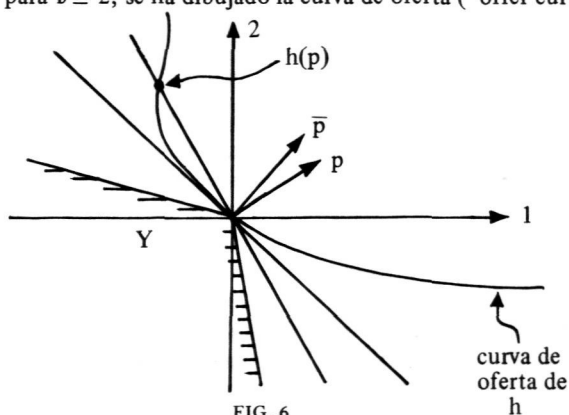


FIG. 6

Más adelante habrá que imponer también hipótesis de regularidad sobre la función  $h$ .

Para cada  $0 \leq t \leq 1$  defínase una economía  $(A, f_t)$  poniendo  $f_t(p) = t f(p) + (1-t) h(p)$ . Es fácil verificar que  $f_t$  satisface las hipótesis 4-8. Nótese que la tecnolo-

gía,  $A$ , no depende de  $t$  y que  $f_0 = h$ ,  $f_1 = f$ . A  $(A, f_t)$ ,  $t \in [0, 1]$  se le llamará *familia uniparamétrica de economías*.

El espacio de variables estado en que operará nuestro mecanismo computacional será  $S \times [0, 1]$ , es decir, el espacio de vectores de precios ampliado con un parámetro.

Defínase  $P = \{ (p, t) \in S \times [0, 1] : p \text{ es un equilibrio para } (A, f_t) \}$ , véase la figura 7;  $P_t = \{ p \in S : (p, t) \in P \}$ , es obviamente, el conjunto de precios de equilibrio de la economía  $(A, f_t)$ .

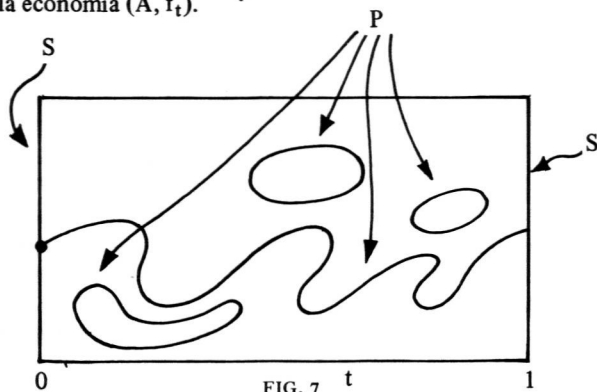


FIG. 7

La primera observación es que  $P$  es un conjunto compacto, es decir, *cerrado* (nótese que  $P$  es acotado puesto que  $S \times [0, 1]$  lo es). Esto puede verificarse como corolario inmediato de los dos hechos siguientes:

(i) Si  $(p_n, t_n) \rightarrow (p, t)$  y  $p^j = 0$  para algún  $j$  entonces  $\| f_{t_n}(p_n) \| \rightarrow \infty$ . Esto es en virtud de las hipótesis 6 y 8.

(ii) Para todo  $z \in \mathbb{R}^1$  el conjunto  $\{ x \in Y : x^j \geq z^j \text{ para cada } j \}$  es acotado (Hipótesis 1, 2 y 3). Tómese  $z$  tal que, para todo  $(p, t) \in S \times [0, 1]$ ,  $f_t^j(p) > z^j$  para cada  $j$  (Hipótesis 6). Se sigue la existencia de una constante  $s$  tal que si  $(p, t) \in P$  entonces  $\| f_t(p) \| \leq s$ .

Procediendo de manera informal podríamos describir la estrategia del mecanismo computacional como sigue:

Se verá que, con nuestras hipótesis de diferenciabilidad y bajo condiciones de regularidad, si  $(p, t) \in P$  y  $0 < t < 1$  entonces en una vecindad de  $(p, t)$ ,  $P$  es "como un segmento abierto" (es decir, como en la figura 8 —varios ejemplos dibujados— y no como en las figuras 9, 10 o 11) o, más precisamente, localmente homeomórfico a un segmento abierto. Si  $t = 0$  ó  $t = 1$  entonces en una vecindad de  $(p, t)$ ,  $P$  es "como un segmento semiabierto" con un punto extremo que es precisamente  $(p, t)$ ; véase la figura 8. La figura 12 no es admisible.



Las consideraciones anteriores implican que en cada punto  $(p, t) \in P$  existe un único "camino" incluido en  $P$  y que pase por  $(p, t)$ .

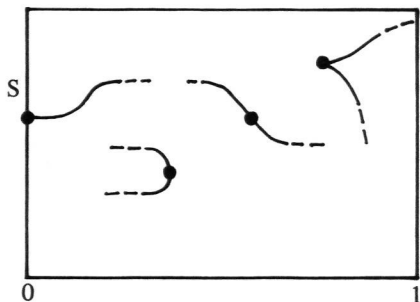


FIG. 8

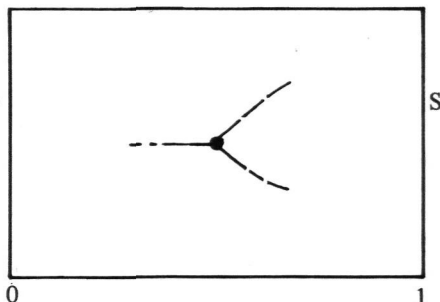


FIG. 9

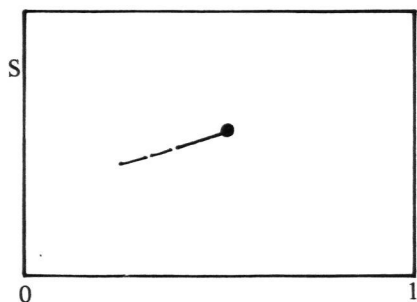


FIG. 10

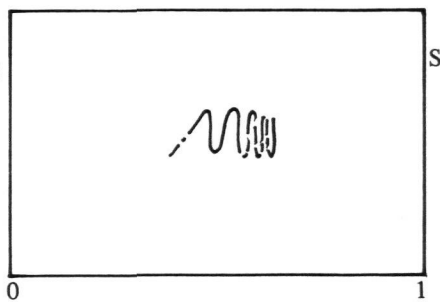


FIG. 11

Tómese ahora el espacio  $S \times [0, 1]$  e instalemos en el punto  $(\bar{p}, 0) \in P$  (recuérdese que  $f_0 = h$  y  $\bar{p}$  es un equilibrio para  $(A, h)$ ; restringidos a movernos sin salir de  $P$  existe un único camino que pase por  $(\bar{p}, 0)$  y una única dirección de salida. Prolonguemos el recorrido de la trayectoria con ese punto inicial tanto como sea posible; ¿a dónde llegaremos?. En primer lugar se advertirá que puesto que la situación de la figura 11 ha sido eliminada, o bien llegaremos efectivamente a algún punto  $(p', t')$  o bien tendremos ciclos. Pero si hay ciclos habrá un primer punto de  $P$  donde la trayectoria vuelve sobre si misma lo que nos pondría en la figura 9. Por lo tanto no hay ciclos y llegamos a un punto  $(p', t')$ ;  $0 < t' < 1$  es imposible puesto que la figura 10 ha sido eliminada;  $t' = 0$  es imposible ya que  $\bar{p}$  es el único equilibrio para  $(A, f_0)$  y la figura 12 ha sido eliminada. Por lo tanto  $t' = 1$  y puesto que  $f_1 = f$  hemos obtenido un equilibrio para  $(A, f)$ . La figura 13 ilustra el procedimiento. También es claro en la figura que  $(A, f)$  puede tener más de un equilibrio y que tan solo uno es computable una vez elegido  $h$ . Es un hecho cierto y común a todos los algoritmos de computación de "puntos fijos" que si el equilibrio de  $(A, f)$  no es

único entonces hay equilibrios que no son computables cualquiera que sea  $h$ .

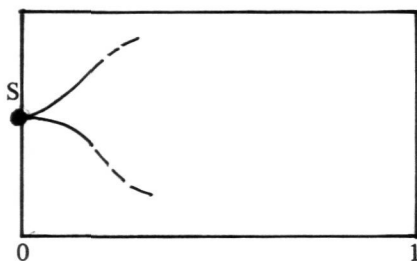


FIG. 12

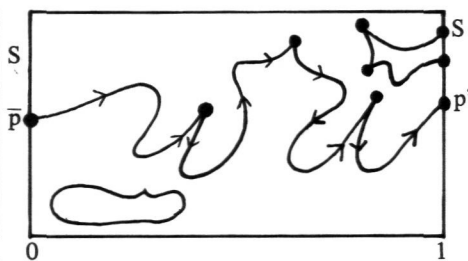


FIG. 13

Por ejemplo, en la figura 14,  $p_1$  y  $p_3$  son computables, no así  $p_2$ . Para analizar este fenómeno deberíamos introducir el concepto de *índice de un equilibrio*, lo cual no vamos a hacer.

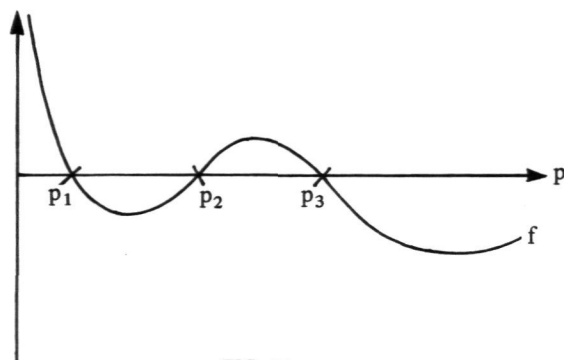


FIG. 14

#### 4.— Un caso particular: Economías de intercambio.

Como primer paso estudiaremos la situación donde  $Y = R_+^L$  es decir, donde no es posible transformar unas mercancías en otras y, por lo tanto, el único problema económico es el del intercambio.

Un sistema de precios  $p$  es entonces de equilibrio si y solamente si  $f(p) = 0$ .

Supóngase que  $h$  ha sido tomada como en la sección 3 y que  $f_t = t f + (1-t) h$  es la familia uniparamétrica de economías (conjunto de producción siempre igual a  $-R_+^L$ ).

Debemos hacer un inciso de naturaleza más bien técnica. Para acentuar la dependencia de la función  $f_t(p)$  respecto al argumento  $t$  escribiremos también  $f(p, t)$ . Entonces  $f(p) = f(p, 1)$ . Los símbolos  $D_{p,t} f(p, t)$ ,  $D_p f(p, t)$ , etc. denotan la apli-

cación (lineal) derivada de  $f(p, t)$  con respecto a los argumentos  $(p, t)$ ,  $p$ , etc. Para cada  $p \in S$  sea  $T_p(S) = \{v \in \mathbb{R}^{\ell} : p.v. = 0\}$  el hiperplano (de dimensión  $\ell-1$ ) perpendicular a  $p$ . Supóngase que  $f(p, t) = 0$ , entonces para todo  $(v, u) \in T_p(S) \times \mathbb{R}$  tendremos  $D_{p,t} f(p, t)(v, u) \in T_p(S)$  ya que, diferenciando  $p \cdot f(p, t) = 0$  se obtiene  $p \cdot D_{p,t} f(p, t) = 0$ . Por lo tanto, si  $f(p, t) = 0$ ,  $D_p f(p, t)$  aplica  $T_p(S)$  en sí mismo y si el rango de  $D_p f(p, t)$  es  $\ell-1$  entonces  $D_p f(p, t)$  aplica  $T_p(S)$  biunivocamente sobre sí mismo. Así pues, conveniendo que el domicilio de  $D_p f(p, t)$  es  $T_p(S)$ , el determinante de  $D_p f(p, t)$ , denotado  $|D_p f(p, t)|$ , es un concepto bien definido. A efectos prácticos el signo de  $|D_p f(p, t)|$  es simplemente el signo de cualquiera de los menores principales de orden  $\ell-1$  de  $D_p f(p, t)$  (considerada como una matriz).

Impondremos tres hipótesis de regularidad sobre la familia  $f_t$

*Hipótesis 9:*

Si  $h(p) = 0$  entonces el rango de  $Dh(p)$  es máximo, es decir,  $\ell-1$  (Nota: por las hipótesis 4 ó 5 el rango de la derivada de una función de demanda excedente es siempre menor que 1). Evidentemente el cumplimiento de la hipótesis 9 puede garantizarse por construcción.

*Hipótesis 10:*

Si  $f(p) = 0$  entonces el rango de  $Df(p)$  es  $\ell-1$ .

*Hipótesis 11:*

Para todo  $0 \leq t \leq 1$  si  $f(p, t) = 0$  entonces el rango de  $D_{p,t} f(p, t)$  es  $\ell-1$ .

Las hipótesis 10 y 11 son de regularidad en el sentido que siempre puede garantizarse su cumplimiento por una perturbación arbitraria de las funciones inicialmente dadas. Este hecho, que tiene un contenido intuitivo importante (véase la figura 15), no es elemental. Constituye esencialmente una consecuencia de un teorema profundo y moderno (1942) del análisis matemático (el Teorema de Sard, véase Debreu (3) y Milnor (8)).

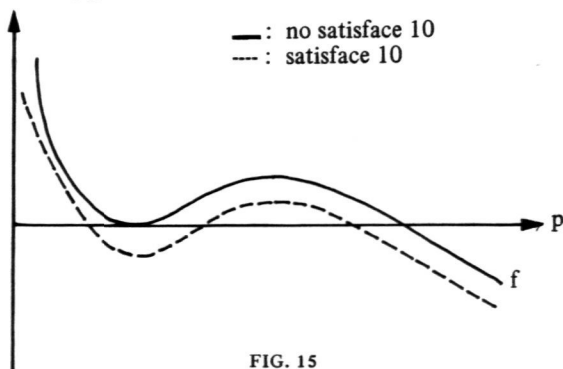


FIG. 15

Estudiemos ahora el conjunto  $P$  (véase la sección 3) que es precisamente  $P = f^{-1}(0) \subset S \times [0, 1]$ , la imagen inversa de 0 por la función  $f(p, t)$ . ¿Cuán

grande puede  $P$  ser? El sistema  $f(p, t) = 0$  tiene  $l-1$  ecuaciones y  $l$  incógnitas (todo debidamente normalizado). Por lo tanto, excepto en situaciones degeneradas (eliminarlas en el contenido de las hipótesis 9-11), el conjunto solución tendrá como máximo un grado de libertad. Es esto una consecuencia del Teorema de la Función Implícita: si  $f(p, t) = 0$  y el rango de  $Df(p, t)$  es  $l-1$  entonces  $Df(p, t)$ , considerado como una matriz, tiene  $l$  columnas y  $l-1$  filas;  $l-1$  de las columnas son linealmente independientes (digamos que son las  $l-1$  primeras) y por lo tanto podemos localmente resolver el sistema como función de la variable correspondiente a la columna  $l$  (es decir, el conjunto solución es localmente uniparamétrico).

Más precisamente lo siguiente es cierto (véase Milnor (8)):  $P$  es difeomórfico a una unión disjunta de un número finito de segmentos  $[0, 1]$  y circunferencias de radio positivo. Además,  $P \cap \{ (S \times \{0\}) \cup (S \times \{1\}) \}$  es el conjunto de los puntos extremos de los segmentos (véase la figura 16, la figura 17, por ejemplo, queda prohibida). "Difeomórfico" quiere decir que hay una aplicación biunívoca tal que la aplicación y su inversa son diferenciables de grado 1.

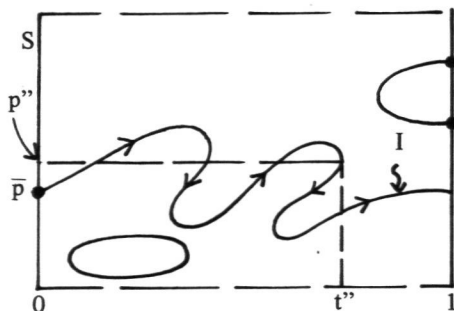


FIG. 16

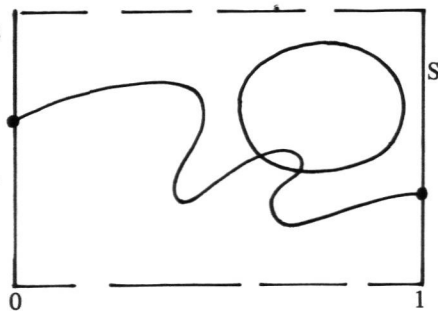


FIG. 17

Considérese la figura 16. Sabemos, por construcción de  $h$ , que  $P \cap (S \times \{0\}) = (\bar{p}, 0)$  y que  $(\bar{p}, 0)$  es un extremo de un segmento, llamémoslo  $I$ , contenido en  $P$ . El otro extremo de  $I$ , digamos  $(p', t')$ , está contenido en  $(S \times \{0\}) \cup (S \times \{1\})$  y es distinto de  $(\bar{p}, 0)$  (de otro modo  $I$  sería una circunferencia), por lo tanto pertenece a  $S \times \{1\}$  (es decir,  $t' = 1$ ). Y  $p'$  es un equilibrio para la función de demanda excedente  $f$  en que estamos interesados.

Este es el mecanismo computacional: comiencese en  $t = 0$  con el equilibrio  $\bar{p}$  para  $h$  que por construcción conocemos. Sígase el segmento contenido en  $P$  con punto inicial  $(\bar{p}, 0)$  hasta que se alcance  $t = 1$ . Obsérvese que a lo largo de la trayectoria la deformación de  $h$  a  $f$  puede no ser monótona; cómo en la figura 16, puede ser necesario algunas veces volver atrás un trecho.

¿Cómo hacer para seguir  $I$ ? Muy fácil (al menos conceptualmente):  $I$  es la trayectoria de la única solución a una ecuación diferencial  $\frac{dp}{ds} = \left( \frac{dp^1}{ds}, \dots, \frac{dp^l}{ds} \right)$  con condiciones iniciales  $p(0) = \bar{p}$ ,  $t(0) = 0$ .

La ecuación diferencial viene implícitamente definida por el sistema:

$$(+) \begin{cases} [t Df(p) + (1-t) Dh(p)] \frac{dp}{ds} = \frac{dt}{ds} [h(p) - f(p)] \\ \frac{dt}{ds} = \text{signo} | D_p f(p, t) | \\ p \cdot \frac{dp}{ds} = 0 \end{cases}$$

Por convención  $\text{signo } \beta = +1, 0, -1$  según  $\beta > 0, = 0, < 0$ . Si en el punto  $(p, t)$ ,  $D_p f(p, t) = t Df(p) + (1-t) Dh(p)$ , contemplada como una aplicación de  $T_p(S)$  a  $T_p(S)$ , es invertible las primeras ecuaciones de  $(+)$  toman la forma explícita  $\frac{dp}{ds} = \text{signo} | D_p f(p, t) | [D_p f(p, t)]^{-1} (h(p) - f(p))$ . Puede ser inevitable sin embargo la presencia de puntos tales como  $(p'', t'')$  en la figura 16 donde  $D_p f(p'', t'')$  no será invertible. Pero ello no es importante; lo notable de la ecuación diferencial  $(+)$  es que tiene soluciones únicas a pesar de que en algunos puntos las condiciones suficientes de Lipschitz no se cumplen (como en  $(p'', t'')$  de la figura 16). Los procedimientos numéricos para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales funcionarán perfectamente bien para el sistema  $(+)$ .

También se pueden apreciar, a la vista de  $(+)$ , las diferencias informacionales entre el procedimiento de esta sección, que siempre es capaz de computar un equilibrio, y el método del tâtonnement de Walras (véase Mas Colell (7)) que solo funciona en casos especiales. Para el tâtonnement dado  $p$  basta conocer  $f(p)$ ,  $\ell$  números, mientras que aquí necesitamos además conocer  $D_p f(p, t)$ ,  $\ell^2$  números. La dificultad (y por lo tanto el coste) computacional es también mayor; una iteración del mecanismo de esta sección tiene una complejidad análoga a la de la inversión de una matriz  $\ell \times \ell$ ; ello es muy sustancial si  $\ell$  es grande.

## 5.- El caso general.

La economía  $(A, f)$  está dada. La función de demanda excedente ha sido seleccionada como en la sección 3. Las hipótesis I-11 se cumplen.

Describiremos primero una construcción auxiliar.

Si  $L \subset \mathbb{R}^\ell$  es un subespacio lineal denótese por  $L^\perp \subset \mathbb{R}^\ell$  el subespacio perpendicular (es decir,  $L = \{v \in \mathbb{R}^\ell : v \cdot u = 0 \text{ para todo } u \in L\}$ ). Dado  $L$  definiremos una noción de equilibrio respecto a  $L$  como sigue:  $p$  es un equilibrio si  $f(p) \in L$  y si  $p \cdot b = 0$  para todo  $b \in L$  o sea, denotando por  $\Pi_L$  la proyección perpendicular de  $\mathbb{R}$  sobre  $L^\perp$  (más concretamente  $\Pi_L(x) = x - \sum b_i \cdot x$  donde los  $b_i$  constituyen una base de  $L$ ), si  $p \in S \cap L^\perp$  y  $\Pi_L(f(p)) = 0$ . Designase  $S_L = L^\perp \cap S$ ,  $f_L = \Pi_L \circ f$ ,  $h_L = \Pi_L \circ h$ ,  $f_{L,t} = t f_L + (1-t) h_L$ . Con esta notación un  $p \in S_L$  está en equilibrio si y solo si  $f_L(p) = 0$ . La producción no aparece explícitamente. Formalmente tenemos una situación de intercambio como el de la sección 4. Sea  $E_L = \{(p, t) \in S_L \times [0, 1] : f_{L,t}(p) = 0\}$ .

De ahora en adelante  $L$  (ó  $L'$ ,  $L''$ ) será el símbolo genérico para subespacios que tienen como base subconjuntos de  $A$ . Hay un número finito de tales  $L$ . Si  $A' \subset A$ ,  $L(A')$  será el subespacio expandido por  $A'$ .

*Hipótesis 12:*

Para todo  $L$ , las funciones  $h_L, f_L, f_{L,t}$  satisfacen las hipótesis 9, 10 y 11.

La hipótesis 12 es de regularidad y se justifica como en la sección 4 (recuérdese que hay un número finito de subespacios  $L$ ).

Bajo la hipótesis 12 tenemos que si  $(p, t) \in E_L$  y  $0 < t < 1$  entonces  $E_L$  es, una vecindad de  $(p, t)$ , difeomórfico a un segmento abierto. Si  $t = 0, 1$ , entonces  $E_L$  es, en una vecindad de  $(p, t)$ , difeomórfico a un intervalo semiabierto cuyo punto extremo es  $(p, t)$  (véase la figura 16).

Considérense las figuras 18 y 19 que representan en  $S \times [0, 1]$  distintos  $E_L$ . Es intuitivo que la situación representada en las figuras es degenerada ya que, permitiéndonos un alto nivel de informalidad, una perturbación del sistema daría, respectivamente, las figuras 20 y 21. Ese será el contenido de la siguiente hipótesis de regularidad, justificable con los mismos argumentos de la sección 4:

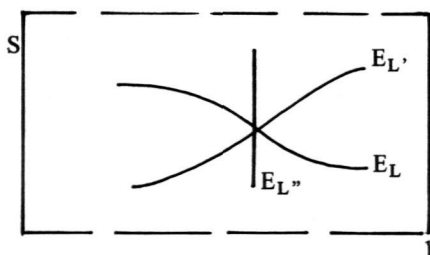


FIG. 18

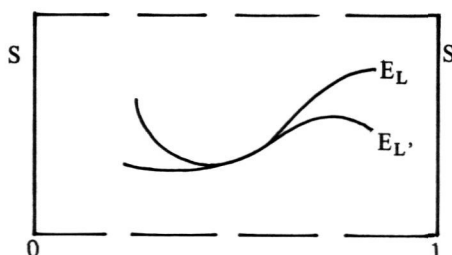


FIG. 19

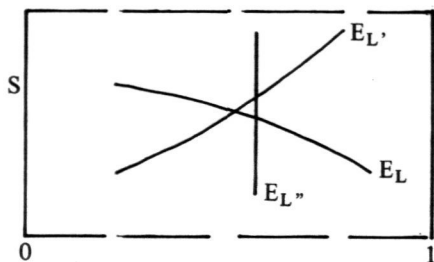


FIG. 20

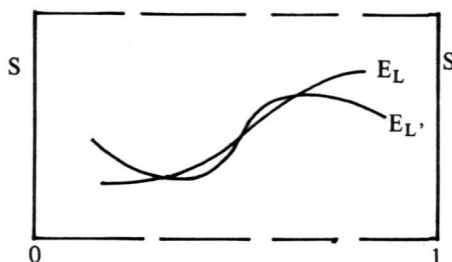


FIG. 21

*Hipótesis 13:*

Si  $L \neq L'$  entonces  $E_L$  y  $E_{L'}$  tienen un número finito de puntos de intersección. En cada  $(p, t) \in S \times [0, 1]$  intersectan como máximo dos  $E_L$  distintos.

Examinemos la segunda parte de la hipótesis con mayor detenimiento. Como que si  $(p, t) \in E_L \cap E_{L'}$  entonces  $(p, t) \in E_{L''}$  para todo  $L \cap L' \subset L'' \subset L \cup L'$ ,  $L''$  debe coincidir con  $L$  o con  $L'$ . Así pues, las dimensiones de  $L$  y  $L'$  no pueden diferir en más de uno y o bien  $L \subset L'$  o bien  $L' \subset L$ .

Estamos ya en condiciones de describir el mecanismo computacional.

Llamemos al conjunto  $Z = \{ E_L \cap E_{L'} : L \neq L' \}$  el conjunto de bifurcación (véase la figura 22).

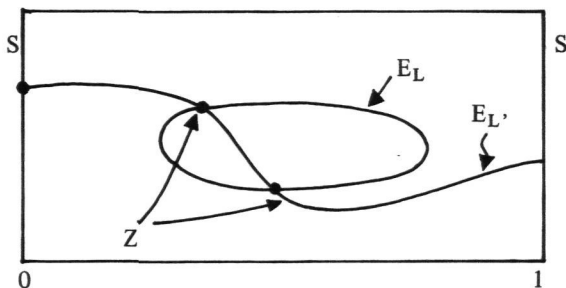


FIG. 22

Examinemos el conjunto  $P = \{ (p, t) \in S \times [0, 1] : p \text{ es un equilibrio para } (A, f_t) \}$ .

Tómese  $(p, t) \in P$ . Entonces, denotando  $A' = \{ a \in A : p \cdot a = 0 \}$ , se tiene  $f_t(p) = \sum_{a \in A'} \alpha_a a$  donde los coeficientes  $\alpha_a \geq 0$  son únicos (Hipótesis 3). Evidentemente  $f_t(p) \in E_{L(A')}$ . Si para todo  $a \in A'$ ,  $\alpha_a > 0$  entonces en una vecindad de  $(p, t)$ ,  $P$  coincide con  $E_{L(A')}$  y por lo tanto (excepto por un difeomorfismo) es localmente un segmento (abierto o semiabierto con extremo  $(p, t)$  según si  $0 < t < 1$  ó  $t = 0, 1$ ).

Supóngase que  $\alpha_{\bar{a}} = 0$  para algún  $\bar{a} \in A'$ . Entonces, denotando  $A'' = \{ a \in A' : \alpha_a \neq 0 \}$  tenemos  $(p, t) \in E_{L(A'')}$  y por lo tanto  $(p, t) \in Z$ , el conjunto de bifurcación. También sabemos que por  $(p, t)$  pasan solamente  $E_{L(A')}$  y  $E_{L(A'')}$  y que  $A'$  difiere de  $A''$  tan solo en una actividad, es decir, todo  $a \in A'$  distinto de  $\bar{a}$  tiene un  $\alpha_a$  positivo. Localmente la figura 23 representa la intersección en  $(p, t)$  de  $E_{L(A')}$  y  $E_{L(A'')}$ . Está claro que, localmente,  $P \subset E_{L(A')} \cap E_{L(A'')}$ . Desde  $(p, t)$  podemos seguir  $E_{L(A')}$  en dos direcciones, ¿en qué se diferencian? Muy sencillo, en una dirección  $\alpha_{\bar{a}}$  se hace negativa mientras que en la otra  $\alpha_{\bar{a}}$  se hace positiva. Solo la región donde  $\alpha_{\bar{a}}$  se hace positiva pertenece a  $P$  (es decir, solo ésta región satisfará las condiciones de no negatividad del equilibrio; un nivel negativo de actividad no es posible; obsérvese que, localmente, las actividades que no están en  $A'$  son irrelevantes puesto

que si se operan dan pérdidas). Por lo tanto, solamente una de las direcciones pertenece a  $P$ . Consideremos ahora  $E_{L(A)}$  desde  $(p, t)$ ; también tenemos dos direcciones. En una  $p.\bar{a}$  se hace positivo mientras que en la otra se hace negativo. Para mantenernos en  $P$  hay que seguir la dirección en que  $p.\bar{a}$  es negativo (recordemos que  $\bar{a}$  se opera a nivel cero).

Resumiendo: si  $(p, t) \in Z$ ,  $P$  es también, localmente, un segmento (excepto por un difeomorfismo "quebrado").

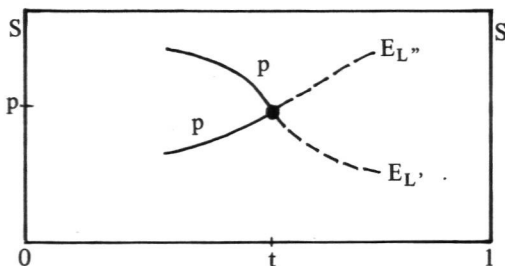


FIG. 23

Para  $(p, t) \in P$  las actividades que están equilibradas  $\{a \in A: p.a = 0\}$  se denominarán la *base* en el punto  $(p, t)$ .

Comiencese la computación (véanse las secciones 3 y 4) en el punto  $(\bar{p}, 0)$  ( $\bar{p}$  es el equilibrio único de  $h$ ) y sigamos  $P$ . Puesto que por construcción la base en  $(\bar{p}, 0)$  es vacía, ello es localmente equivalente a seguir  $E_L(\phi) = E\{0\}$ . Seguimos pues  $E\{0\}$  hasta alcanzar un punto de bifurcación  $(p, t) \in Z$ . En él una actividad  $a \in A$  pasa a estar equilibrada ( $p.a = 0$ ) y la incorporaremos a la base. Saldremos de  $(p, t)$  siguiendo  $E_{L(a)}$  en la dirección donde el nivel de actividad de  $a$  se hace positivo; es decir, nos mantenemos en  $P$ . Y así sucesivamente; siempre nos mantenemos en  $P$  y entre puntos de bifurcación (de los cuales hay un número finito) seguimos una ecuación diferencial como la de la sección 4 (entre puntos de bifurcación tenemos formalmente una economía de intercambio). Los puntos de bifurcación corresponden a un cambio de base definido sin ambigüedad: o bien se abandona una actividad porque su nivel de operación se ha hecho nulo o bien se incorpora una nueva actividad que ha pasado de no ser provechosa a estar equilibrada.

Los mismos argumentos de las secciones 3 y 4 pueden aplicarse aquí para persuadirnos que la computación terminará con un punto  $(p', 1)$  y por lo tanto nos dará un equilibrio  $p'$  para  $(A, f)$ , véase la figura 24.

Examinemos más detenidamente porque los ciclos no son posibles. Supongamos que hay un ciclo y sea  $(p, t)$  el primer punto que es revisitado en el proceso de computación. Deben haber entonces tres ramas de  $P$  coincidentes en  $(p, t)$  puesto que si la rama de entrada por segunda vez coincidiera con la rama de entrada o de salida la primera vez algún punto distinto de  $(p, t)$  hubiera sido revisitado con



anterioridad a serlo  $(p, t)$ . Pero en una vecindad de  $(p, t)$ ,  $P$  es un segmento.

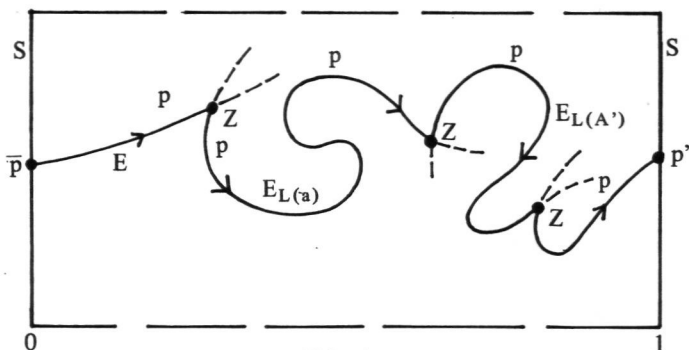


FIG. 24

Contradicción (véase la figura 25). Por lo tanto no hay ciclos. Esta idea, tan simple, tan fundamental y tan distinta de los argumentos basados en gradientes, se remonta a Lemke-Howson (6), el artículo seminal de toda la literatura combinatoria sobre la computación de puntos fijos (véase Scarf (9)).

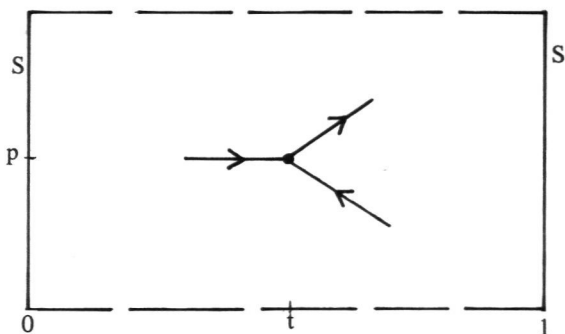


FIG. 25

6.— Observaciones finales.

1) El mecanismo propuesto en la sección 5 es computacionalmente pesado. Entre puntos de bifurcación es el mismo que en la sección 4. Pero es que además para reconocer si se ha llegado a un punto de bifurcación es preciso en cada iteración, (i) evaluar  $p.a$  para todo  $a \in A$  (esto podría hacerse descentralizadamente), (ii) resolver el sistema de ecuaciones que nos permite verificar  $\alpha_a > 0$  para todos los  $a$  de la base.

2) No hay ninguna dificultad en resolver numéricamente (de forma aproximada) el sistema de ecuaciones diferenciales de la sección 5 aunque, como es el caso, tenga un cierto número finito de puntos de discontinuidad (los puntos de bifurcación).

3) Podríamos preguntarnos: como en el caso de la programación lineal, ¿no podría concebirse un algoritmo que cubriese el caso degenerado?. Quizás sí pero el problema carece de importancia ya que en general, y a diferencia de la programación lineal (pero como en la programación no lineal) encontrar una solución exacta en un número finito de iteraciones no es posible. Soluciones aproximadas están en la naturaleza del problema. Otra cosa sería si  $f$  fuese lineal.

4) El mecanismo *siempre* funciona. El precio que se paga es la envergadura computacional. Si se dispone de información adicional sobre  $A$  o  $f$  ésta *debe ser* explotada. Cómo, habrá que verlo en cada caso. De momento no tenemos ninguna sugerencia a hacer excepto notar que disponemos de una gran libertad en la elección de la función inicial  $h$ . Por ejemplo, si la tecnología es de Leontief con un solo factor de producción, los precios de equilibrio son computables con relativa facilidad (el *método directo* en Mas-Colell (7)) mientras, comparativamente, el procedimiento de este artículo será muy lento y miópico.

5) El lector se habrá dado cuenta que, puesto que lo hemos computado, hemos demostrado la *existencia de un equilibrio*, a partir de nuestras hipótesis y de los teoremas matemáticos del hiperplano separante y de la función implícita (basado a su vez en el teorema de punto fijo para contracciones). Pero, ¿acaso no es bien sabido que los teoremas de punto fijo para funciones continuas (Brouwer) son indispensables para demostrar resultados generales de existencia? y ¿no son éstos más complejos que los primeros (en el sentido que los primeros pueden derivarse de los segundos y no viceversa)? La respuesta es afirmativa en ambos casos. La explicación de la paradoja aparente son las condiciones de regularidad. Para obtener un resultado *general* de existencia a partir de las conclusiones de este artículo es preciso que toda economía sea aproximable por una que es regular. Mientras éste es un hecho cierto su demostración requiere la utilización del Teorema de Sard que es profundo y del cual es sabido se puede derivar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer (véase Milnor (8)).

*Universidad de California  
Berkeley*

## BIBLIOGRAFIA

- 1.—ARROW, K y L. HURWICZ (1960), Decentralization and computation in resource allocation, en R. Pfouts, ed *Essays in Economics and Econometrics*, The University of North Carolina Press.
- 2.—DEBREU, G (1959), *Theory of Value*, John Wiley.
- 3.—DEBREU, G (1970), Economies with a finite set of equilibria, *Econometrica* 38.
- 4.—EAVES, C. y H. SCARF (1976): The solution of systems of piecewise linear equations, *Mathematics of Operation Research* 1, 1.

- 5.—LANGE, O, (1938). On the economic theory of socialism, publicado en B. Lippincott ed., mismo título, University of Minnesota Press.
- 6.—LEMKE, C y J. HOWSON (1964): Equilibrium points of bimatrix games, *S.I.A.M. Journal*, 12.
- 7.—MAS-COLELL, A. (1974). Algunas observaciones sobre la teoría del tâtonnement de Walras, *Anales de Economía*, 21 - 22.
- 8.—MILNOR, J. (1965). *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, Virginia.
- 9.—SCARF, H. (1973). *The Computation of Economic Equilibria* (con T. Hansen) Yale University Press, New Haven.
- 10.—SMALE, S. (1976), Convergent process of price adjustment and global Newton methods, *Journal of Mathematical economics*, 3.