RELACIONES ENTRE MATEMÁTICAS Y FINANZAS

Santiago Carrillo Menéndez
Antonio Sánchez Calle
Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Las opciones financieras y los contratos a plazo han sido utilizados desde mucho antes de disponer de los instrumentos matemáticos que permiten su tratamiento riguroso. En Holanda, antes de la famosa "crisis de los tulipanes[1]" del siglo XVI, las opciones de compra eran un instrumento habitual[2] como lo han sido desde hace mucho tiempo los contratos a plazo en el mercado de la naranja en el Levante.

Incluso en la segunda mitad del siglo XX, el auge de los productos derivados ha precedido y estimulado el desarrollo de los instrumentos matemáticos que han permitido su valoración y uso sistemático. A la vez dicho desarrollo ha sido un acicate para los mercados.

No es este el lugar para una historia de la matemática financiera, en gran medida por hacer, sin embargo conviene destacar que el proceso que desembocó en la célebre *fórmula de Black-Scholes* contó con hitos muy destacados.


LA SPÉCULATION

En la Francia de principios del siglo XX existía una actividad bursátil importante estimulada, entre otras cosas por la deuda perpetua emitida por el gobierno para financiar la guerra de 1870. Para poder modelizar los precios de los activos bursátiles *Louis Bachelier* fue el primero en introducir lo que después se ha conocido como *movimiento browniano*.
El punto débil de su obra fue considerar el movimiento browniano (y no su exponencial, el movimiento browniano geométrico) para la modelización de los precios, lo que en teoría podía llevar a precios negativos. Para relativizar esta afirmación recordaremos que modelos similares has estado vigentes hasta hace muy poco en los modelos de la curva de tipos. Aunque hayan pasado más de cien años, la obra de Bachelier sigue llamando la atención por la modernidad de su enfoque.

Jalones importantes fueron también los trabajos de *Boness, Samuelson*. Los artículos de *Black* y *Scholes* y de *Merton*[3] abrieron un periodo de una extraordinaria creatividad que se extendió a lo largo de los años setenta y ochenta y supusieron un verdadero hito en la matemática financiera al combinar, de hecho, los cinco elementos básicos que han estado presentes desde entonces en toda la teoría:

- El uso de los modelos lognormales, anticipado por *Roy y Samuelson.*
- El principio de no arbitraje que permite valorar un derivado a partir de la cartera de replicación.
- La valoración riesgo-neutro que permite referirse exclusivamente al tipo libre de riesgo y no tener en cuenta la subjetividad del agente interviniendo en el mercado.
- El marco probabilista que ha supuesto la irrupción del Cálculo Estocástico en las finanzas.
- El enfoque usando las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

---

[1] Para más información el lector podrá consultar el libro de J. K. Galbraith
[2] Ver, por ejemplo, el libro de José de la Vega
[3] Ver bibliografía

Quizás el más sencillo de los productos derivados sea una opción de compra europea, también conocida como *call*. Para describir dicho producto, necesitamos tres elementos:

- Un subyacente (por ejemplo una acción o una unidad de una determinada mercadería como pueden ser el petróleo, el trigo o la electricidad) cuyo valor en el instante t designaremos como S_t.
- Un instante futuro T, llamado *fecha de ejercicio* o *vencimiento*.
- Una constante K llamada *precio de ejercicio*.

El titular de la call tiene entonces el derecho, pero no la obligación, de comprar en el instante T el subyacente al precio K. Pueden ocurrir dos cosas:

- A vencimiento se tiene $S_T > K$: en ese caso si el titular ejerce su derecho y compra el activo por K, puede vender inmediatamente en el mercado por S_T obteniendo una ganancia $S_T - K$
- A vencimiento se tiene $S_T \leq K$: en ese caso el titular no ejerce su derecho; no tiene sentido comprar por K algo que se puede comprar por S_T ($\leq K$) en el mercado. En este caso la ganancia obtenida es 0.

Se puede pensar entonces en la opción de compra como en un pago[4] $(S_T - K)^+$ que se recibe a vencimiento. Valorar el derivado es saber poner precio a ese pago.

Típicamente, en situaciones como la actual, para un vencimiento a tres meses y un precio de ejercicio igual al valor actual del subyacente ($K = S_0$), el valor de dicha opción (su *prima*) suele ser inferior al 10% del valor del subyacente.

El pago de esta prima, permite al titular de la opción garantizar un precio fijo (pactado ahora) a vencimiento. Permite eliminar la incertidumbre asociada a las fluctuaciones de los precios. En este caso la opción actúa como un seguro y es su función principal en los mercados financieros. Una compañía de aviación puede garantizarse, mediante el uso de opciones (o de contratos a plazo), un precio estable para el combustible mientras que otra puede obtener un tipo de cambio garantizado.

Sin embargo no debe pasar inadvertido otro aspecto de este tipo de productos. Esta call europea permite beneficiarse de las posibles subidas del valor del subyacente sin correr el riesgo de sufrir las pérdidas en que pudiera incurrir y todo ello por una inversión que representa sólo una fracción del precio de la acción (se habla entonces de *apalancamiento*). Por ello, las opciones son un instrumento también usado por los especuladores para multiplicar (apalancar) sus inversiones. En el caso del vendedor conviene diferenciar dos casos:

- Si se trata de una institución financiera, esta calculará el precio del derivado (el precio de su *cobertura*) al que añadirá un margen (su beneficio en la operación).
- En otro caso (por ejemplo si se trata de un particular) la venta de la opción puede ser una manera de cubrirse frente a una bajada intuida del precio del subyacente.

La opción de venta en una fecha fija T un determinado subyacente S_T a un precio fijo K se llama *put* y corresponde a un pago $(K - S_T)^+$. Con el fin de adaptarse mejor a toda una serie de perfiles de riesgo, las opciones han ganado en variedad y complejidad. Así aparecieron las opciones americanas (la opción puede ejercerse en cualquier momento hasta vencimiento), asiáticas (el valor S_T queda sustituido por una media de los valores del subyacente en una serie de fechas intermedias) y toda la rica familia de opciones exóticas[5].

[4] $(x)^+$ = máximo entre x y 0
[5] Ver el libro de Zhang.

2. MODELIZACIÓN Y VALORACIÓN

Los derivados de tipo europeo, aquellos cuyos derechos sólo se pueden ejercer a su vencimiento, T, están caracterizados por su *función de pago*. Por ejemplo, como se ha mencionado, para una opción de compra ese pago es $(S_T - K)^+$. Para otros derivados la función de pago puede ser de la forma $f(S_T)$, sólo dependiente de la cotización del activo en T, o, más generalmente, puede depender de todo lo que ha pasado con esa cotización, S_t , para t entre 0 y T ; por ejemplo podría depender de la cotización media del activo en ese periodo de tiempo.

Para poder decidir cuál ha de ser la prima que hay que pagar por un determinado contrato, su *valor*, hay que comenzar por qué es razonable suponer sobre S_t. Un modelo típico para la cotización del activo, S_t, es el siguiente:

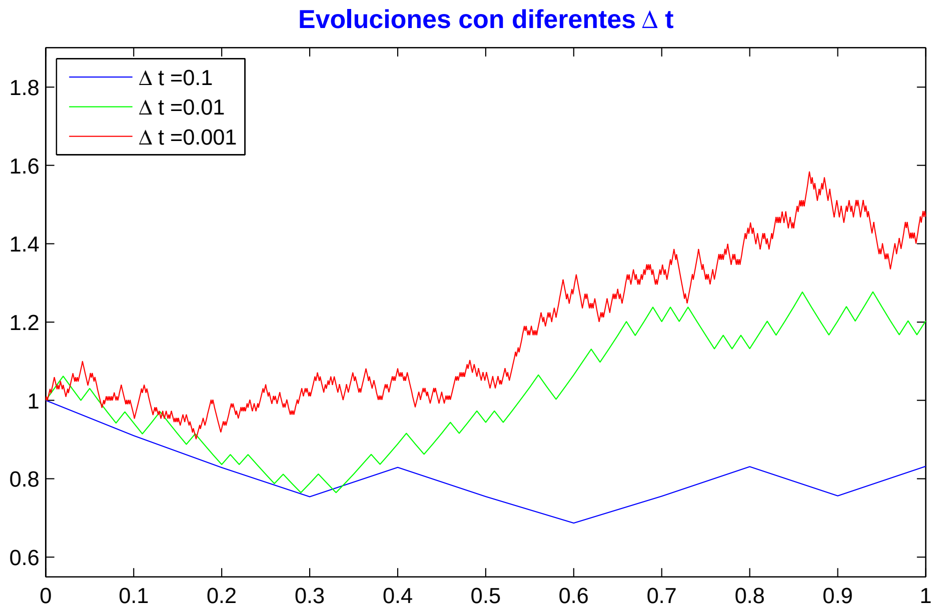
$$\frac{\Delta S}{S} = \texttt{comportamiento medio + oscilación aleatoria}$$

que, en su versión más sencilla, es

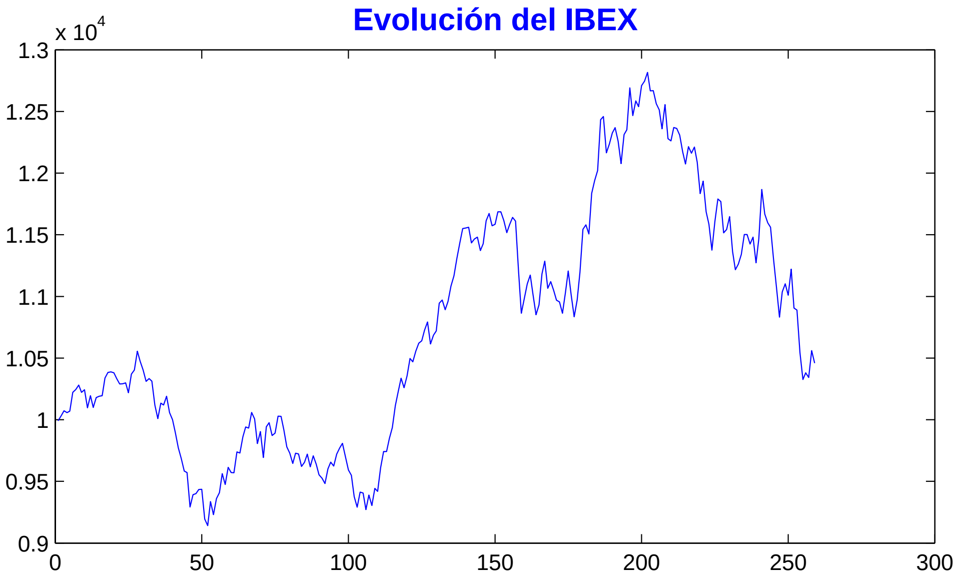
$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \equiv \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} X_t$$

con $\boldsymbol{\mu}$ el rendimiento medio anualizado del activo y $\boldsymbol{\sigma}$ su *volatilidad*, que mide la variabilidad de la cotización, y donde las X_t 's toman los valores +1 ó -1 con probabilidad 1/2 cada uno (misma distribución) y son *independientes* cuando corresponden a intervalos de tiempo disjuntos.

Estos son ejemplos de evoluciones para diferentes Δt 's:



y, como contraste, esta es la evolución diaria del IBEX, de mayo 1999 a mayo del 2000



Cuando se hace tender Δt a 0 se obtiene la *ecuación diferencial estocástica*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde W_t es un browniano.

Esa ecuación se puede resolver dando lugar a:

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}Z}$$

con Z una normal estándar, es decir, S_T es *lognormal*. Mirando datos históricos, por ejemplo, se puede hacer una estimación tanto de $\boldsymbol{\mu}$ como de $\boldsymbol{\sigma}$.

Eso da una respuesta a lo relativo al comportamiento de S_t pero ¿cómo se asigna un valor a un contrato cuyo pago en la fecha T es, por ejemplo, de la forma $f(S_T)$?

Una de las hipótesis básicas a la hora de asignar precio a estos contratos es suponer que en el mercado en cuestión *no existen oportunidades de arbitraje,* que quiere decir que "no se puede ganar dinero sin arriesgar". En lo que eso se traduce es en la siguiente regla:

Dos inversiones que el instante T den lugar a los mismos pagos sea cual sea la evolución del mercado han de costar hoy lo mismo.

El procedimiento para asignar precio a un pago $f(S_T)$ consiste entonces en reproducir ese pago comprando y vendiendo a lo largo del tiempo un número apropiado de unidades de activo, lo que no es obvio cómo hacer, pero es posible. Si se supone que en el mercado no hay oportunidades de arbitraje el producto derivado y la forma de reproducirlo han de tener el mismo valor en cualquier instante, en particular en $t=0$.

Eso lleva al siguiente hecho sorprendente (para activos que no pagan dividendos):

- Para valorar hay que cambiar a un "mundo distinto", uno en el que la evolución es

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

donde r es el tipo de interés (con composición continua) que se supone constante.

- En otras palabras, hay que suponer que el rendimiento instantáneo medio del activo es el mismo que el de una inversión sin riesgo; como poner el dinero en el banco.
- Esa nueva probabilidad en la que la evolución del activo es de esa forma se conoce cómo *probabilidad riesgo-neutro* y el valor de un derivado con pago $f(S_T)$ es

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathrm{RN}}\left[f(S_T)\right]$$

Aquí E^{RN} [ ] es la esperanza con respecto a la probabilidad riesgo-neutro (RN) y esperanza es el término matemático para la media.

En esos términos lo que dice la fórmula anterior es que hay que obtener la media de los pagos que se podrían recibir y calcular su valor hoy, es decir, *descontarlos*.

Puesto que en riesgo-neutro

$$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z}$$

con Z una normal estándar, ese valor es

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}z}) e^{-z^2/2}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}}$$

En el caso de una opción de compra se obtiene como valor la conocida *fórmula de Black-Scholes*:

$$S_0 N(d_+) - Ke^{-rT}N(d_-)$$

donde S_0 es la cotización actual del activo, $N(x)$ es la función de distribución de la normal estándar y

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\frac{S_0}{Ke^{-rT}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Una alternativa a los métodos probabilistas son las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Si para un derivado de tipo europeo con pago en T de la forma $f(S_T)$ denotamos por $V(S_t,t)$ su valor en el instante, entonces la función $V(S,t)$ satisface la *EDP de Black-Scholes*:

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV = 0$$
$$V(S,T) = f(S)$$

Si en lugar de un pago de la forma $f(S_T)$ se tiene un derivado cuyo pago, Y, depende de toda al evolución del activo hasta T sigue siendo cierto que su coste es *el valor medio, en riesgo-neutro, del pago descontado*

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathrm{RN}}[Y]$$

aunque ahora el enfoque de Ecuaciones en Derivadas Parciales sólo es posible en casos muy particulares.

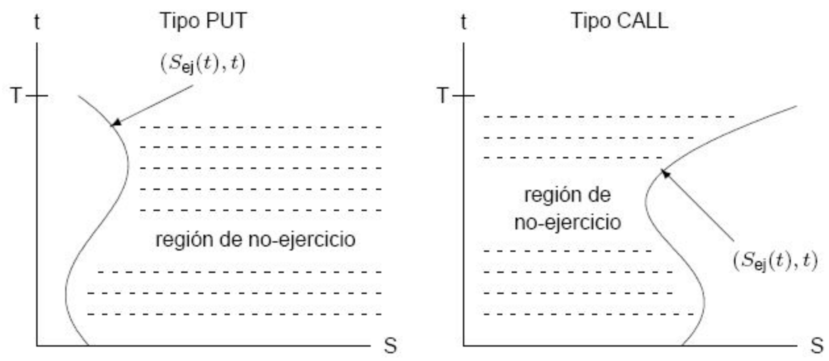
Aunque no se pueda calcular explícitamente ese valor esperado de *Y* se puede calcular un valor aproximado usando *simulación Montecarlo*, que consiste en:

- Se simulan evoluciones del activo acordes con la ecuación diferencial estocástica $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + dW_t$
- Para cada una de ellas se calcula el pago que se obtendría en *T* si la evolución del activo fuese la simulada
- Si y_i para i entre 1 y N son los resultados obtenidos entonces un valor aproximado de $E^{RN}[Y]$ es $\frac{y_1 + y_2 + \Lambda + y_N}{N}$

Una variante común de los derivados es que sean de *tipo americano.* Por ejemplo una *opción de venta americana* es aquella en el que el derecho a vender el activo por el precio *K* se puede ejercer en cualquier instante hasta vencimiento.

Aunque en ambos contextos (el probabilista y el de EDPs) se pueden expresar formalmente el valor de estos derivados el obtener el valor, incluso aproximado, para estos derivados es mucho más complejo:

- En el contexto del modelo probabilista lleva a considerar las (infinitas) estrategias posibles de en qué instante ejercer el derecho; el valor del producto corresponderá a elegir la estrategia óptima.
- En el contexto de EDPs lo que sucede es que el valor del derivado sólo satisface la EDP de Black-Scholes a un lado de la frontera de ejercicio, una curva $(S_{ej}(t),t)$ que separa la zona donde se debe ejercer de la zona de no-ejercicio. A la vez que se resuelve la EDP hay que buscar esa frontera de ejercicio, es un problema de frontera libre.



Todo lo anterior no es más que una pequeña muestra del uso de las Matemáticas en modelización y valoración basándose en la parte "más estable" de ese uso. Hay muchos otros contextos como los derivados sobre tipos de interés o los derivados de crédito, por ejemplo, donde la complejidad es mucho mayor a la hora de intentar reflejar en un modelo los comportamientos del mercado.

3. OTROS PRODUCTOS

Uno de los usos más habituales de los derivados es la cobertura del riesgo de mercado. En cuanto algo cotice, tarde o temprano aparecerá el uso de derivados (opciones o contratos a plazo) para cubrir este riesgo. Así han ido apareciendo derivados cada vez más exóticos sobre subyacentes distintos de los que fueron objeto de más atención hasta los años ochenta del pasado siglo.

Algunos de los ejemplos más llamativos de este hecho los podemos encontrar en los derivados de riesgo de crédito. Los *credit default swap* (o CDS) son un tipo de derivados usados[6] para cubrirse del *riesgo de contrapartida*. Típicamente, la situación de referencia es la siguiente: la parte A está en posesión de deuda emitida por la parte B, la *contrapartida*. Puede tratarse, por ejemplo, de un bono, de un préstamo o de la financiación por A de una operación de B quien tiene que devolverle el dinero adelantado.

Ante el temor de un *incumplimiento* por parte de B (impago, quiebra, entrada en mora, etc. ...) que pueda poner en cuestión el pago comprometido, A va a comprar una protección a un tercero, C. Para ello va a pagar una cantidad periódica a C a cambio del derecho de recibir de esta un pago si se produce dicho incumplimiento.

De nuevo, valorar este producto pasa por hallar el valor medio de su flujo final. Para ello es fundamental disponer de una modelización que tenga en cuenta las siguientes dinámicas:

- Incumplimiento por parte de una entidad determinada;
- Tipos de interés;
- Tasa de recuperación.

así como la estructura de dependencia de las mismas.

El mundo de los seguros ha dado lugar a toda una familia de derivados diseñados para cubrir riesgos específicos. Los *bonos catástrofe* (*cat bonds*) pueden ser un primer ejemplo de esta nueva generación de productos.

Un bono catástrofe[7] puede estructurarse de diversas maneras. Por ejemplo un cupón puede pagarse o dejar de pagarse en función de la ocurrencia de un determinado suceso catastrófico (lluvias torrenciales que dañen una cosecha, inundaciones, etc.). Un ejemplo de la primera de estas modalidades es el bono emitido para asegurar Disneyland Tokio frente a un posible terremoto.

El origen de este tipo de productos está en el huracán Andrew y el terremoto de Northridge (1994) que redujeron las capacidades de las reaseguradoras. Los bonos catástrofe aparecen como un mecanismos para transferir el riesgo a los mercados aportando un activo muy poco correlado con los activos financieros habituales (luego un factor de diversificación de las carteras, el sueño de todo gestor) que permite a las aseguradoras conseguir la liquidez necesaria para su negocio.

Con la misma filosofía, la compañía de seguros Allianz emitió en su día opciones sobre bonos catástrofe que le dan derecho durante tres años a emitir un bono si determinados sucesos se producen. Los inversores reciben un pago anual a cambio de su compromiso de compra. Una vez emitido el bono, tanto los cupones como el principal están "en riesgo" durante 3 años. Es una manera de garantizar el precio del reaseguro. La primera emisión (1998) fue de 150 millones de dólares y cubría los posibles desperfectos por vientos huracanados en Alemania.

En los Estados Unidos existen varios *índices sobre catástrofes*. Estos reflejan pérdidas aseguradas en determinadas zonas geográficas del país. Las opciones sobre estos índices se negocian en el CBOT desde 1995. La misma idea de transferencia a los mercados sustenta estas iniciativas.

Argumentos similares podrían aplicarse a otro tipo de subyacentes: climatología, emisiones de CO_2 u otros.

---

[6] En 2002 se negociaron, a nivel mundial, más de 2,3 billones nominales de dólares en derivados de riesgo de crédito.
[7] En 2003 este mercado de bonos ha alcanzado 1750 millones de dólares, un 42% más que el año anterior.

4. GESTIÓN DE RIESGOS

Como hemos señalado, una de las funciones básicas de los derivados es actuar como seguros frente al riesgo de mercado o de crédito. Sin embargo la gestión de riesgos tiene otra faceta que involucra modelos cuantitativos y precisa de la colaboración de personal con una sólida cultura matemática. Se trata del cálculo del capital económico o regulatorio, aquella parte de su capital que las entidades financieras han de tener invertida en instrumentos muy líquidos con el fin de poder hacer frente a posibles pérdidas por riesgo de mercado, riesgo de crédito o riesgo operacional.

El Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II)[8] y su próxima plasmación en normativa europea definen la manera de calcular dicho capital regulatorio, que es mediante la razón de McDonough:

$$\frac{FP}{RM + RC + RO}$$

donde FP designa lo que se denomina *fondos propios* y los sumandos del denominador representan el capital en riesgo por riesgo de mercado, de crédito y operacional. Lo que la normativa exige es que ese cociente sea al menos del 8% y, como hay cierta libertad en la forma de calcular los términos *RM*, *RC* y *RO*, las matemáticas pueden jugar un papel relevante.

De los tres tipos de riesgos mencionados, el de mercado puede ser el más conocido aunque el menos relevante en términos de capital. El capital en riesgo por riesgo de mercado viene dado por la fórmula:

$$C = \alpha VaR + \beta$$

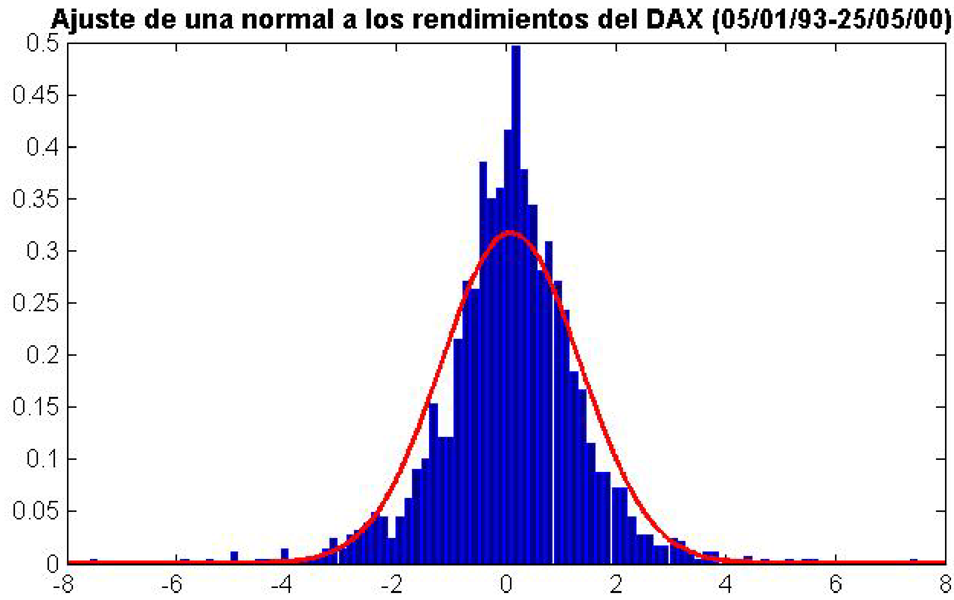
siendo, en principio, $\alpha = 3$, $\beta = 0$[9] y donde *VaR* denota el percentil del 99% de la distribución de las posibles pérdidas de la entidad en su cartera de mercado a 10 días vista. De manera intuitiva, no deberían superarse esas perdidas en más de uno cada 1000 días.

Lo típico es usar un modelo para la distribución de pérdidas basado en una variable aleatoria normal. El problema es que las series temporales de los rendimientos de los activos financieros exhiben *colas más pesadas* que las previstas por los modelos normales (ver figura). Lo que esto significa es que los eventos de grandes pérdidas se observan en la realidad con una frecuencia superior a la predicha por un modelo normal, en cuyo caso el VaR calculado con el modelo puede infravalorar muy seriamente el VaR real.

---

[8] Ver *Convergencia internacional de medidas y normas de capital*

[9] En realidad estos coeficientes pueden ser cambiados por el regulador si el modelo de medición no se ajusta a la realidad de la entidad.



Un tratamiento riguroso de estas situaciones pasa por el uso de lo que se conoce como *Teoría de Valores Extremos*.

Para el cálculo del capital en riesgo por riesgo de crédito Basilea propone como una posibilidad el uso de los *modelos de rating internos* que se dividen en básico y avanzado, dependiendo del número de parámetros que la entidad puede estimar por procedimientos propios en lugar de venir dados por el regulador. En el enfoque básico, la entidad tiene que estimar la *probabilidad de incumplimiento* (*PD*) de sus diferentes contrapartidas, mientras que en el avanzado tiene que estimar también la severidad o *pérdida en caso de incumplimiento* (*loss given default* o *LGD*), el vencimiento y los elementos de mitigación del riesgo de crédito.

La dificultad radica en la estimación de los dos parámetros críticos *PD* y *LGD* para la que los métodos estadísticos avanzados juegan un papel muy importante.

Además, uno de los inconvenientes mayores de estos modelos es su carácter unifactorial (comonotonicidad) que no tiene en cuenta la diversificación de la cartera por lo que se está trabajando seriamente en modelos más complejos que permitan paliar este defecto, aunque esto ya apunte a Basilea III

Por último, el riesgo operacional ha sido incorporado para el cálculo del capital económico en Basilea II e involucra de nuevo el cálculo de percentiles (del 99,9%) para distribuciones de pérdidas agrupadas en ocho líneas de negocio (administración de activos, banca comercial, banca minorista, intermediación minorista, finanzas corporativas, negociación y ventas, pagos y liquidación y servicios de agencia), y siete tipos de riesgos (fraude interno, fraude externo, relaciones laborales y fallos de seguridad en el puesto de trabajo, clientes, productos y prácticas empresariales, daños a activos materiales, incidencias en el negocio y fallos en los sistemas y ejecución, entrega y gestión de procesos).

En cada una de las 56 celdas de la matriz así definida, estas distribuciones de pérdidas se obtienen combinando un modelo para la frecuencia con la que ocurren dichas pérdidas y otro modelo para su cuantía. El capital regulatorio puede obtenerse a nivel global, teniendo en cuenta la (eventual) estructura de dependencias o obteniendo dicho percentil en cada celda y sumando los valores así obtenidos.

La distribución conjunta puede obtenerse de diversas maneras, pero los procedimientos tipo Montecarlo tienen la ventaja de permitir tener en cuenta el efecto de los seguros (que pueden rebajar hasta un 20% las necesidades de capital de la entidad) así como la estructura de dependencia antes mencionada.

Por los niveles de precisión requeridos y el número de factores implicados, el riesgo operacional plantea numerosos retos tanto de tipo estadístico como computacionales.

BIBLIOGRAFÍA

Bachelier, L.: *Théorie de la Spéculation*, Ann. Sci. Ecole Norm Sup. 17 21-86. Reprinted in *The random character of stock market prices*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1964) p.17-78.

Black, F. y Scholes, M.: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, 3 (1973), p. 637-654.

Boness, J.: *Elements of a Theory of Stock-Options Value*, Journal of Political Economy 72 (1964) p. 163-175.

Convergencia internacional de medidas y normas de capital (junio 2004) (Basilea II), http://www.bis.org/

Danielsson J.: *The emperor has no clothes: limits to risk modelling,* en Risk measures for the 21st century, editado por Giorgio Szegö, Wiley 2004.

Daníelsson J., Embrechts P. et al: *An academic response to Basel II*, Special paper nº 130. LSE Financial Markets Group.

Dewynne, J., Howison , S. y Wilmott, P.: *Option pricing: mathematical models and computation,* Oxford, 1993.

Hartmann-Wendels T., Grundke P. y Spörk W.: *Basel II and the effects on the banking sector*. Contribución a *Risk Management, challenge and opportunity*, 2ª edición. Editado por M. Frenkel, Ulrich Hommel y Markus Rudolf. Springer 2005.

Galbraith, J. K.: *Breve historia de la euforia financiera*.

Merton R.C.: *The Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Mangement Science 4 (1973) p. 141-83.

Roy, A.D.: *Safety first and the holding of assets*, Econometrica 20 (1952) p. 431-449.

Samuelson, P.A.: *Mathematics of speculative price*, SIAM Review a 15, 1-42 (1973).

Samuelson, P.A.: *Rational theory of warrant pricing*, Industrial Management Review 6 (1965) p. 13-21.

Vega, J. De la: *Confusión de confusiones,* Amsterdam 1688. Edición de UEM CEES, Madrid 2000.

Zhang, P.: *Exotic options*, 2ª edicción, World Scientific (1998).

Santiago Carrillo Menéndez es Doctor por la Universidad Pierre et Marie Curie y por la Universidad Complutense de Madrid. Es profesor del Departamento de Matemáticas de la U.A.M. desde 1976. En los 12 últimos años se ha dedicado a diversos proyectos de aplicación de las matemáticas a las finanzas y a la gestión de riesgos, en parte financiados por contratos con entidades financieras y el Ministerio de Industria. Desde 1998 es director del RiskLab-Madrid.

Antonio Sánchez Calle es Doctor por la Universidad de Princeton. Es profesor del Departamento de Matemáticas de la UAM desde 1989. Uno de sus campos de interés recientes es el de las matemáticas aplicadas a las finanzas.