

LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES. EL MÉTODO DE LOS CONTORNOS ACTIVOS GEOMÉTRICOS

Vicent Caselles

Alejandro Frangi

Departamento de Tecnología, Universitat Pompeu Fabra

1. INTRODUCCIÓN

El *procesamiento y análisis de imágenes* es una disciplina entre la ingeniería y las matemáticas que se encuentra en pleno desarrollo debido a sus numerosas aplicaciones científicas e industriales. Sin pretender ser exhaustivos, podríamos enumerar algunas: procesamiento de vídeo (con sus múltiples aplicaciones: vigilancia, control de tráfico, seguimiento de objetos en movimiento, etcétera) y la creación de herramientas para la post-producción de cine digital, el ámbito de las imágenes médicas (reconstrucción, interpretación y ayuda al diagnóstico), la fotografía digital, la visión estéreo y la reconstrucción tridimensional a partir de secuencias de vídeo, la restauración e interpretación de las imágenes tomadas por satélites, el reconocimiento de formas y la búsqueda de imágenes en la web, la compresión de imágenes, el procesamiento de superficies, la síntesis de imágenes y la simulación para videojuegos y un largo etcétera tanto en los temas de investigación básica como en las aplicaciones.

Debido a ello, la diversidad de conceptos, teorías, herramientas y algoritmos matemáticos que requiere y utiliza cubren casi cualquier rama de las matemáticas: el cálculo de variaciones, la modelización física apoyada en ecuaciones en derivadas parciales, la geometría (diferencial, integral, discreta...), la topología, las estructuras de datos, el cálculo de probabilidades y la estadística, la teoría de procesos estocásticos, el análisis armónico y la teoría del muestreo, la teoría de la información y la codificación, el análisis numérico y la optimización, la óptica, la teoría del color, y en general, la física, sin olvidar los aspectos de ingeniería e informática.

En uno de sus trabajos pioneros *Dennis Gabor* [G] proponía creación y utilización de herramientas de procesamiento de imágenes para mejorar la calidad de imágenes adquiridas con el microscopio electrónico. Entre otras cosas, este trabajo sorprende por su modernidad, pues en él se defiende la relevancia informativa de *los contornos o siluetas de los objetos de la imagen* y se proponen técnicas para su *realce* (basadas en ecuaciones en derivadas parciales) que han sido realmente estudiadas y comprendidas en los últimos 15 años. Esta línea de pensamiento tuvo su formulación explícita como programa de investigación en el libro *Vision* de *David Marr* [M] publicado en 1982 que ha guiado una parte fundamental de la investigación en procesamiento de imágenes guiado una parte fundamental de la investigación en procesamiento de imágenes dedicada a la *detección de contornos* y ha conducido a otros desarrollos en *segmentación de imágenes*.



Dennis Gabor

En este trabajo queremos exponer algunas técnicas recientes en segmentación de imágenes con la suficiente versatilidad y potencia para ser aplicadas en muchos ámbitos, entre los que destacaremos el de las imágenes médicas. Hablaremos de ello después de un breve recorrido por algunas de las ideas básicas de *Marr* [M].

Antes de nada, digamos *qué es exactamente una imagen* en nuestro contexto: *Una imagen* viene descrita por una función real de dos variables $u(x,y)$ que representa *la intensidad de luz* en el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de forma que el valor cero representa el negro y el valor máximo M ($=255$, por ejemplo) el blanco, mientras los valores intermedios son la *escala de grises*.

La *segmentación de imágenes* es uno de los temas fundamentales más estudiados y útiles en *procesamiento y análisis de imágenes*, sobre todo porque constituye el paso primero e inevitable para la mayoría de las tareas de análisis cuantitativo de imágenes. El objetivo de la segmentación es obtener una partición de la imagen en regiones coherentes como paso previo al análisis de su contenido. Por ejemplo, antes de analizar un tumor en una imagen de tomografía volumétrica, es necesario detectarlo y aislarlo del resto de la imagen. Antes de reconocer una cara en una imagen es necesario separarla del resto de la imagen.

Existen muchas técnicas distintas de segmentación de imágenes dependiendo del tipo de imágenes y de los objetivos deseados. La mayoría de ellas tienen su punto de arranque en la teoría de la detección de contornos de *Marr-Hildreth* [MH]. Según la hipótesis subyacente en esta doctrina, *la información relevante de una imagen está contenida en la traza que dejan en la imagen los contornos aparentes de los objetos físicos*. Si fotografiamos un objeto negro situado en un fondo blanco, podremos identificar este objeto por su silueta que forma una curva cerrada en la cual la intensidad de la luz $u(x,y)$ cambia bruscamente. Llamaremos a esta curva *un contorno*. La detección local de un contorno puede hacerse, a priori, usando el gradiente $\nabla u(x,y)$. En un punto de un contorno el gradiente posee un módulo grande $|\nabla u(x,y)|$ y una dirección v dada por el gradiente normalizado, $v = \nabla u(x,y)/|\nabla u(x,y)|$, que indica la dirección perpendicular a la silueta. Parece obvio que podemos *identificar los puntos del contorno como aquellos puntos x donde el módulo del gradiente $\nabla u(x,y)$ es grande*.

A pesar de su atractivo, esta conclusión es un poco precipitada y no siempre operativa. La razón principal es que, siendo las *imágenes digitales ruidosas* y posiblemente con artefactos, el cálculo del gradiente es una operación que plantea dificultades y los gradientes grandes no se organizan siempre en curvas ni delimitan siempre contornos de objetos reales. La necesidad de superar estas dificultades ha llevado al desarrollo de numerosas técnicas de recuperación, realce y detección de contornos.

Una de las ideas fundamentales que permite superar las dificultades anteriores, derivadas del ruido, es la de calcular el gradiente después de suavizar (filtrar) la imagen: asociamos a la imagen u una versión suavizada $u(t,x,y)$ dependiendo de un parámetro de escala $t > 0$ que mide cuánto la hemos suavizado. En la doctrina clásica de *Marr-Hildreth*, $u(t,x,y)$ se obtiene por convolución de la imagen u con un función (filtro) *Gaussiana* G_t de varianza $t > 0$. En este contexto, al parámetro t se le llama *escala* y mide el tamaño del entorno del punto (x,y) en el que vamos a promediar $u(x,y)$ para obtener $u(t,x,y)$. Este fue el inicio de la llamada *teoría de los espacios de escala* [L], que se identifica en términos matemáticos con la *teoría de las ecuaciones parabólicas lineales o no lineales* [AGLM], pero ésta es otra historia.

Los puntos de contorno a la escala $t > 0$ son aquellos puntos (x,y) tales que $\nabla u(t,x,y) \neq 0$ y el módulo del gradiente es máximo en la dirección del gradiente. De forma más precisa, según *Canny* [C], se dice que (x,y) es un punto de contorno a la escala $t > 0$ si la función $s \rightarrow |\nabla u(t,x,y) + s v|$ tiene un máximo en $s = 0$ y su valor supera un cierto umbral. Observe el lector familiarizado con el cálculo diferencial que en estos puntos $\langle D^2 u(t,x,y)(v), v \rangle = 0$ siendo $D^2 u(t,x,y)$ la matriz de las derivadas segundas de u en las variables (x,y) y v la dirección del gradiente $\nabla u(t,x,y)$; observe también que este operador diferencial podría usarse para el cálculo de los contornos. De hecho, la propuesta inicial de *Marr-Hildreth* era una simplificación computacional de este procedimiento, usando el *operador de Laplace* Δu en lugar del operador diferencial anterior. En cualquiera de los casos, esta teoría conduce a una *representación multiescala* de los contornos de una imagen, es uno de los paradigmas clásicos del procesamiento de imágenes y, actualmente, un enfoque casi ubicuo en una amplia variedad de problemas.

En la Figura 1 podemos observar la imagen de un *despacho* (izquierda) junto con los contornos de *Canny* calculados a la escala $t = 1$ (imagen central). Observemos que los contornos obtenidos no forman curvas cerradas y ésta es una característica de los métodos basados en el gradiente.

En el planteamiento mismo de la teoría anterior están implícitas las numerosas dificultades que plantea: Selección de las escalas adecuadas, organización de los puntos de contorno como curvas representando siluetas, robustez al ruido, etc. A pesar de ello, ha sido el motor para el desarrollo de otras teorías alternativas más adaptadas a los objetivos concretos que en cada caso se planteen. Algunas de ellas han abordado el problema como un problema de segmentación. Bajo este punto de vista, se pretende obtener una partición del dominio de la imagen en regiones (representativas de los objetos) separadas por curvas o contornos (siluetas) de la imagen. Entre estas teorías merece la pena destacar el modelo de *Mumford-Shah* [MS] que plantea el problema de la segmentación en el contexto de la teoría de aproximación de funciones: se aproxima la función intensidad $u(x,y)$ definida sobre un rectángulo Ω por una función regular a trozos $U(x,y)$ que admite discontinuidades en los contornos K de la imagen que representan las fronteras de los objetos visibles. La función $U(x,y)$ minimiza el funcional

$$\int_{\Omega \setminus K} |\nabla U|^2 \, dx dy + \int_{\Omega} (u - U)^2 \, dx dy + \lambda \ell(K)$$

donde $\lambda > 0$ y $\lambda(K)$ representa la longitud de los contornos K . Este modelo ha sido uno de los más estudiados en el contexto de la matemática aplicada en años recientes ya que combina cantidades cuya dimensionalidad es distinta (términos de longitud y de área) acoplados por un parámetro de escala λ que representa el peso dado a la complejidad de los contornos respecto a la fidelidad de la representación obtenida. De nuevo, la elección de la escala aparece como un problema fundamental y de nuevo la idea de representar los contornos de forma multiescala aparece como un auxilio en la tarea de su cálculo. Debido a ello, el uso práctico de este modelo plantea dificultades. La Figura 1(derecha) ilustra los contornos de la imagen *despacho* obtenidos con este modelo.

Otro punto de vista diferente fue introducido por *M. Kass, A. Witkin y D. Terzopoulos* en [KWT] que abordaron el problema de la integración de los puntos donde el gradiente de la imagen es alto proponiendo el modelo llamado desde entonces de los contornos activos. El planteamiento clásico consiste en deformar una curva inicial C_0 adaptándola a la frontera del objeto que se desea detectar (por ejemplo, el tumor en la ecografía de la Figura 2). La curva se deforma tratando de minimizar una energía y se espera que el mínimo de dicha energía ocurra en la frontera del objeto. Se trata de una técnica general que intenta ajustar un modelo deformable a alguna característica de la imagen [KWT].

Una diferencia fundamental entre las teorías de Marr-Hildreth y muchas propuestas recientes tales como el modelo de Mumford-Shah o el de Kass-Witkin-Terzopoulos es cómo se integra la información de contornos para dar lugar a una representación de alto nivel del objeto. La teoría de Marr-Hildreth pretende calcular los puntos de discontinuidad del nivel de gris y requiere de un paso posterior de integración de estos puntos para abstraer de ellos un objeto perceptual. En este sentido es un enfoque “*bottom-up*”. Las teorías de Mumford-Shah y de Kass-Witkin-Terzopoulos, en cambio, parten de un modelo genérico del objeto (i.e. una plantilla geométrica parametrizada de forma explícita o implícita) que es luego ajustado a los contornos (u otros descriptores genéricos) de la imagen hasta representar fielmente la instancia concreta del mismo. En este sentido, estas técnicas son técnicas “*top-down*”.

En este texto vamos a centrarnos en la idea básica del modelo [KWT] que ha sido reelaborada para adaptarla a las aplicaciones que ocurren en muchos contextos diferentes. En la sección siguiente vamos a explicar los desarrollos que ha motivado y que han llevado a la posibilidad de aplicarla con éxito a la segmentación de imágenes médicas.



Figura 1. Ilustración del detector de contornos de Canny y del modelo de Mumford-Shah. Izquierda: imagen original. Medio: contornos según Canny, es decir, los máximos del módulo del gradiente (que superan un cierto umbral) en la dirección del gradiente. No existe ningún umbral para el que los contornos sean cerrados y es necesario cerrarlos a posteriori. Derecha: contornos de la segmentación obtenida usando el funcional de Mumford-Shah con el valor de $\lambda = 60$. Los contornos obtenidos en este caso describen regiones.

2. EL MÉTODO DE LOS CONTORNOS ACTIVOS

Kass, Witkin y Terzopoulos propusieron un modelo variacional para ajustar una curva deformable C a los contornos de la imagen [KWT]. Como en todo modelo variacional, la solución minimiza una energía. La energía propuesta consta básicamente de dos términos, uno que controla la regularidad de la curva, y otro que la atrae hacia las fronteras de los objetos de la imagen.

Si $C(\tau):[0,1] \rightarrow R^2$ representa una curva plana parametrizada y $I:[0,a] \times [0,b] \rightarrow R$ es una imagen dada en la que queremos detectar la frontera de un objeto, *el modelo de contornos activos* (también llamados 'snakes') clásico [KWT] asocia a la curva C una energía dada por

$$E_{\text{KWT}}(C) = \alpha \int_0^1 |C'(\tau)|^2 d\tau + \beta \int_0^1 |C''(\tau)|^2 d\tau - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(\tau))| d\tau$$

siendo α , β y λ constantes reales y positivas (α y β determinan la elasticidad y rigidez de la curva, respectivamente). El primer y segundo términos del funcional determinan la regularidad de las fronteras que vamos a detectar y reciben el nombre de energía interna de la curva. El tercer término juega el papel de una energía potencial que atrae la curva hacia las fronteras de los objetos de la imagen y recibe el nombre de energía externa. Resolver el problema de contornos activos significa minimizar el funcional E_{KWT} para un conjunto de constantes α , β y λ dadas. Para minimizar E_{KWT} se utiliza generalmente el *método del descenso de la energía* (partiendo de una curva inicial C_0 la movemos siguiendo la dirección de máximo decrecimiento de la energía). El método de los contornos activos es capaz de localizar correctamente curvas que se encuentren cerca de la curva inicial C_0 . Sin embargo, como observamos en [CCCD] los términos de regularidad no implican que la curva extraída sea suave, de hecho para cualesquiera valores de α , $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$ y $\lambda > 0$ es capaz de extraer curvas con ángulos. Ello es debido a que *la regularidad de la parametrización no implica la regularidad geométrica de la curva*. Por otra parte, debido a que los términos de regularización no permiten a una curva romperse, no es posible detectar simultáneamente varios objetos, aunque la curva inicial los rodee a todos ellos. Ello obliga a gestionar directamente los cambios de topología de la curva que evoluciona cambiando su parametrización en el momento que se prevea una singularidad. Para evitar estos inconvenientes fueron creados los modelos geométricos de contornos activos [CCCD].

Los *modelos geométricos de contornos activos* están basados en la evolución de curvas o superficies por flujos geométricos, teoría que ha influido poderosamente en la comunidad de procesamiento de imágenes [AGLM,CCCD,S]. En dichos modelos, la curva o superficie se deforma según una velocidad que depende de parámetros *geométricos* intrínsecos y de la adaptación a los contornos de la imagen. Se trata de un flujo geométrico basado en la formulación por conjuntos de nivel del movimiento de curvas (resp. superficies) según su curvatura (resp. curvatura media) que requiere para su solución la teoría de soluciones de viscosidad [CIL]. La implementación numérica de estos flujos geométricos

se apoya en los trabajos de S. Osher y J. Sethian [OS] y permite *cambios automáticos de la topología* de la superficie que se deforma, así como la *detección simultánea de varios contornos* sin ningún procedimiento de seguimiento especial.

En el trabajo [CKS] analizamos la relación entre los modelos clásicos y geométricos de contornos activos para la detección de objetos en imágenes bi-dimensionales y propusimos el llamado *modelo geodésico de contornos activos*. Los contornos activos geodésicos minimizan la longitud de una curva en \mathbb{R}^2 dotado de una *métrica de Riemann* derivada de la imagen que asigna menos longitud a las curvas situadas en puntos de la imagen donde el módulo del gradiente de la intensidad es más grande. Para deducir este modelo consideremos el caso particular de la energía E_{KWT} obtenido tomando $\beta = 0$. Aunque esta elección pueda parecer arbitraria, nos va a permitir explicar la relación entre el modelo clásico y el modelo geodésico. Por otra parte, argumentamos que no es tan arbitraria: el efecto de regularidad proporcionado por el parámetro $\beta > 0$ no es del todo claro, ya que la regularidad de la parametrización de una curva no implica su regularidad geométrica. Todo esto fue discutido en detalle en [CCCD]. A su favor, observemos finalmente que el término correspondiente a β puede provocar un efecto de doblamiento ('bending') de la curva lo cual puede ser deseable si ésta ha pasado de largo por la frontera buscada y deseamos que regrese a la posición correcta. Ambos efectos, la regularización de la curva y la adaptabilidad a los contornos están incorporados de otra forma al modelo geodésico que vamos a presentar. Supondremos, pues, que $\beta = 0$. Sustituimos, además, el término de detección de contornos dado por la integral de $-|\nabla I|$ por la integral de una función decreciente del módulo del gradiente $g(|\nabla I|)^2$ tal que $g(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ y obtenemos el funcional

$$E_{\text{KWT}}^0(C) = \alpha \int_0^1 |C'(\tau)|^2 d\tau + \lambda \int_0^1 g(|\nabla I(C(\tau))|)^2 d\tau$$

Nuestro objetivo es minimizar E_{KWT}^0 para una cierta clase de curvas admisibles C . Observemos que en E_{KWT}^0 sólo cuenta la razón λ / α .

Como es fácil ver, el funcional E_{KWT}^0 no es intrínseco, depende de la parametrización de la curva. Esto puede ser considerado como algo no deseable ya que la parametrización de la curva no está relacionada directamente con las propiedades geométricas de la curva sino más bien con la velocidad a la que la recorremos. Motivados por una discusión sobre el comportamiento de los contornos ideales de una imagen, propusimos en [CKS], fijar el grado de libertad proporcionado por la libertad de parametrización fijando el nivel de energía del mínimo local como $E_{\text{KWT}}^0 = 0$ (hipótesis razonable para contornos determinados por discontinuidades de I). Entonces, utilizando el principio de Maupertuis de la mecánica clásica [DFN], puede verse que *la minimización de E_{KWT}^0 equivale a encontrar una geodésica en el plano de la imagen dotado con la métrica de Riemann $g_{ij} dx_i dx_j$ siendo $g_{ij} = g(|\nabla I|)^2 \delta_{ij}$* . Esto significa que la frontera del objeto buscada es una curva de longitud mínima para la nueva longitud. En otras palabras, nuestra propuesta consiste en minimizar

$$L_{\text{R}}(C) := \int_0^1 g(|\nabla I(C(\tau))|) |C'(\tau)| d\tau = \int_0^L g(|\nabla I(C(s))|) ds$$

donde L denota la longitud Euclídea de $C(\tau)$. Hemos transformado el problema en el cálculo de una geodésica en \mathbb{R}^2 con la nueva métrica $L_{\text{R}}(C)$. Comparando esta longitud con la longitud Euclídea vemos que la nueva longitud L_{R} se obtiene ponderando la longitud Euclídea ds por el término $g(|\nabla I(C(\tau))|)$, que recoge la información de los contornos de la imagen atrayendo la curva C hacia ellos, es decir, la nueva métrica toma en cuenta las características de la imagen. En la práctica tomamos

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + |\nabla(G_{\sigma} * I)|^2}$$

siendo G_σ un filtro Gaussiano de varianza σ^2 .

Si utilizamos el método de descenso de la energía para encontrar la geodésica de L_R , el flujo que minimiza L_R es [CKS]

$$(CM) \quad C_t = (g\kappa - \nabla g \cdot \tilde{N})\tilde{N},$$

donde κ es la curvatura de la curva C y \tilde{N} su normal unitaria. Mencionemos de pasada, que existe un análogo tri-dimensional de esta formulación para la segmentación de objetos en imágenes 3D que toma la forma

$$S_t = (gH - \nabla g \cdot \tilde{N})\tilde{N},$$

donde H representa la curvatura medida de la superficie S y \tilde{N} su normal unitaria. Para fijar ideas, consideraremos sólo el caso de curvas en \mathbb{R}^2 . La evolución de C puede formularse de forma implícita en términos de la evolución de los conjuntos de nivel de una función que ‘parametriza’ la curva (o, en su caso, la superficie). Dada una curva inicial C_0 , consideramos una función continua $u_0(x,y)$ tal que C_0 es un conjunto de nivel de u_0 . En la práctica suele suponerse que $C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : u_0(x,y) = 0\}$. Sea $u(t,x,y)$ una función tal que la curva $C(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : u(t,x,y) = 0\}$. Entonces, en términos de $u(t,x,y)$ la formulación implícita de (CM) está dada por la ecuación

$$(PDE) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(g(\mathbf{I}) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = g(\mathbf{I}) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla g(\mathbf{I}) \cdot \nabla u$$

con condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ y donde hemos escrito $g(\mathbf{I}) = g(|\nabla u|)$. El primer término de (PDE) representa el movimiento por curvatura euclídeo clásico ponderado por el factor $g(\mathbf{I})$. El término $\nabla g \cdot \nabla u$ dirige la curva hacia las fronteras de los objetos ya que $-\nabla g$ apunta hacia el centro de la frontera y dirige la propagación de la curva hacia el valle de g . El nuevo término contribuye a la atracción de la curva hacia los contornos de la imagen, siendo de especial utilidad cuando hay variaciones de los valores del gradiente de la imagen a lo largo de los contornos buscados. Contribuye en particular a la detección de objetos no convexos. De todas formas, para facilitar la detección de objetos no convexos así como para mejorar la velocidad del proceso en las etapas iniciales, es frecuente introducir una fuerza constante dirigida hacia el interior (resp. exterior) si el objeto está dentro (resp. fuera) de la curva inicial. Dicho término es (un múltiplo $\nu > 0$ de) $g(\mathbf{I})|\nabla u|$ y minimiza el área (calculada en la métrica L_R) contenida en la curva C y corresponde a la fuerza de ‘balloon’ introducida en el contexto de los ‘snakes’ clásicos para hinchar o deshinchar la curva. Añadiendo este término al modelo (PDE) obtenemos finalmente

$$(PDEb) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(g(\mathbf{I}) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nu g(\mathbf{I}) |\nabla u|.$$

Aunque la adecuación del modelo a la detección de contornos sólo puede demostrarse en caso de contornos ideales [CCCD], en los cuales el módulo del gradiente es infinito, en la práctica el nuevo modelo funciona de manera satisfactoria en muchas imágenes y puede mejorarse y/o adaptarse a otros contextos, habiendo, de hecho, muchas propuestas ulteriores en este sentido. En cualquier caso, el esquema abstracto del planteamiento anterior se ha constituido en uno de los habitualmente utilizados en procesamiento de imágenes:

- i) *Se plantea el problema como el problema del cálculo de una geodésica en una variedad con una métrica de Riemann.*

- ii) Se utiliza la técnica de los conjuntos de nivel para formular el problema en términos de una ecuación en derivadas parciales de tipo geométrico.
- iii) Se resuelve el problema utilizando los métodos numéricos para la evolución de conjuntos de nivel.

3. LAS REGIONES ACTIVAS GEODÉSICAS

Una de los desarrollos posteriores más interesantes se produjo con la introducción de las llamadas regiones activas geodésicas [CV,PD] que proponen incorporar información estadística relativa a las regiones interior y exterior al contorno C . Este planteamiento es interesante sobre todo cuando el módulo del gradiente no permite identificar el objeto buscado. En el caso más simple de esta formulación se trata de encontrar la curva que represente el contorno de una región cuyo nivel de gris es relativamente homogéneo y contrastado con un exterior también homogéneo. En este caso se minimiza la energía

$$(GAR) \quad E_{GAR} := L_R(C) + \beta E(C, c_+, c_-)$$

donde $\beta > 0$ y

$$E(C, c_+, c_-) = \int_{\Omega} \int_{in(C)} |I(x', y') - c_+| dx' dy' dx dy + \int_{\Omega} \int_{out(C)} |I(x', y') - c_-| dx' dy' dx dy$$

e $in(C)$, $out(C)$ denotan respectivamente el interior y exterior de la curva C . El primer término es la métrica de los contornos activos geodésicos y los restantes son los términos que definen las regiones activas geodésicas y miden la homogeneidad de la imagen en el interior y exterior de C . Esta energía se minimiza respecto a C y las variables c_+ y c_- que, para el mínimo, coinciden con el valor mediano de I en el interior y exterior de C , respectivamente.

La formulación implícita del método de descenso de la energía aplicado a la energía (GAR) conduce a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = |\nabla \mathbf{u}| \operatorname{div} \left(\mathbf{g}(I) \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) + \beta |\nabla \mathbf{u}| M(I, \mathbf{u})$$

donde

$$M(I, \mathbf{u})(x, y) = |I(x, y) - c_-| - |I(x, y) - c_+|,$$

$$c_+ = \text{valor mediano}_{[u \geq 0]}(I), \quad c_- = \text{valor mediano}_{[u < 0]}(I).$$

Cuando la región interior a C no se identifica por un único parámetro estadístico (como algún valor medio del nivel de gris) sino por una serie de características $I^j, j=1, \dots, p$, calculadas a partir de la imagen I , es necesario extender el modelo de las regiones activas geodésicas al caso multicanal. La construcción de modelos de regiones activas geodésicas con vectores de características es uno de los más adaptados en el caso de la segmentación de imágenes médicas. La Figura 2 ilustra los resultados obtenidos en la segmentación de un tumor en una ecografía de mama usando el modelo (PDEb) y el modelo anterior de regiones activas geodésicas con un conjunto de canales dados por la respuesta de la imagen original a un conjunto de filtros de Gabor [AAC]. En este caso se encontrará una región cuyos descriptores o canales sean homogéneos en su interior y en su exterior, respectivamente. En la sección siguiente ilustramos la aplicación del modelo (GAR) a la segmentación de aneurismas en imágenes CTA.

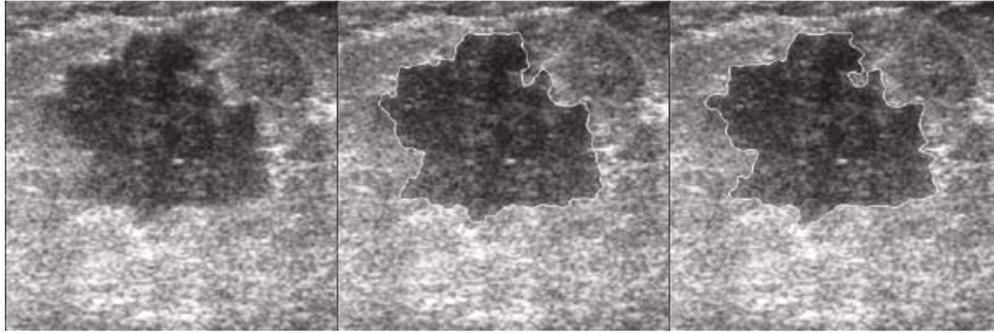


Figura 2. Segmentación de un tumor en una ecografía de mama. Izquierda: imagen original. Medio: resultado de la segmentación obtenido usando el modelo (PDEb). Derecha: resultado obtenido usando el modelo de las regiones activas geodésicas con un conjunto de canales dados por las respuestas de filtros de Gabor a la imagen original [AAC]. Este último resultado concuerda mejor con la segmentación manual proporcionada por un médico (Imágenes cortesía de Miguel Alemán).

4. APLICACIÓN: SEGMENTACIÓN DE ANEURISMAS CEREBRALES EN IMÁGENES DE ANGIOGRAFÍA POR TOMOGRAFÍA COMPUTERIZADA (CTA)

Los aneurismas cerebrales constituyen patología vascular con graves consecuencias. Estudios de incidencia realizados afirman que afectan a entre el 1.5 y 8% de la población general pudiendo presentarse a cualquier edad. La complicación más seria se produce con la ruptura del aneurisma provocando la muerte en un 36.2 % y serias consecuencias en el 17% de los pacientes debidas a hemorragia intracraneal, hidrocefalia y espasmos de las arterias cerebrales. En los últimos años, se vienen desarrollando procedimientos endovasculares mínimamente invasivos para el tratamiento de este tipo de problemas. Estas técnicas pueden aplicarse en las 48 horas posteriores a la detección del aneurisma reduciendo el riesgo de sangrado y son aplicables incluso en aquellos pacientes para los que la cirugía convencional es demasiado arriesgada.

El tratamiento del aneurisma con espirales implantables de Guglielmi (GDC) es probablemente el método más extendido de embolización permanente (ver Fig. 3). El método consiste en la colocación del espiral en el interior del aneurisma mediante un catéter introducido por la arteria femoral. El espiral coagula la sangre en el interior del aneurisma evitando así el flujo y la presión sanguínea en su interior impidiendo así la rotura de la pared arterial donde se encuentra localizado.

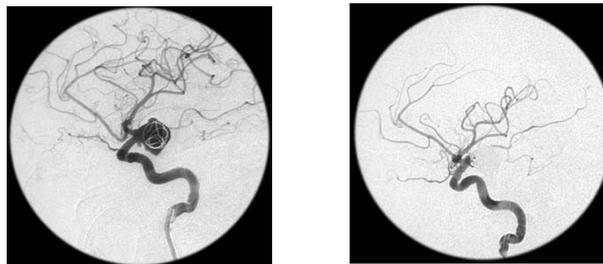


Figura 3. Aneurisma embolizado mediante un GDC. Izquierda, introducción del GDC en el interior del aneurisma mediante cateterización. Derecha, resultado de la embolización. La sangre del interior del aneurisma coagula impidiendo el flujo sanguíneo en su interior.

Una correcta colocación del GDC en el interior del aneurisma es crucial para el éxito del tratamiento por lo que es deseable conocer las dimensiones del aneurisma así como la morfología del árbol arterial que lo rodea. En particular, el conocimiento del diámetro máximo del cuello y la longitud de los ejes del aneurisma juegan un importante papel en la selección de los pacientes y planificación del tratamiento.

Para la extracción de estas medidas, sería deseable contar con técnicas computarizadas que permitiesen una extracción precisa de la morfología tridimensional del aneurisma y su posterior cuantificación. Para este fin se ha utilizado la técnica de segmentación basada en modelos deformables implícitos pues presenta una gran flexibilidad ante la segmentación de estructuras complejas y ha sido utilizada anteriormente en la segmentación de estructuras arteriales.

Como hemos descrito en la sección anterior, las regiones activas geodésicas permiten que la evolución de la superficie esté gobernada por características más elaboradas que el gradiente de la imagen. En algunos casos, podemos definir características que permiten identificar con mayor precisión cada uno de los tejidos presentes en estas imágenes (e.g. lumen vascular, hueso y fondo de la imagen). Tales ideas han sido desarrolladas en varios trabajos [HF,HSF,CHFPPB] en los que propusimos modelar los tejidos o bien con los coeficientes de una descomposición de Taylor local y multiescala de la imagen o bien con los invariantes Cartesianos diferenciales multiescala. Estas características son los canales \mathcal{I} de los que hemos hablado en la sección 3. El uso de técnicas multiescala en esta aplicación es muy apropiado ya que éstas permiten modelar la variabilidad en el calibre vascular observable entre diversas ubicaciones del árbol cerebral y entre individuos. Las técnicas propuestas en estos trabajos dan lugar inmediatamente a un incremento importante en la dimensionalidad del espacios de características (e.g. existen 5 invariantes lineales Cartesianos de hasta segundo grado en 3 dimensiones y tomando 10 escalas se obtienen espacios del orden de 50 características). No obstante, no todos los tejidos de la imagen están caracterizados por los mismos tipos de propiedades. Es por ello que propusimos complementar el método anterior con un proceso de selección de características que escoge, para cada tejido, el subconjunto de propiedades de la imagen que aporta mayor discriminación para el tejido en cuestión. De esta forma es posible reducir la complejidad de la técnica y optimizar la capacidad de reconocer cada tejido y guiar eficientemente la superficie en evolución.

En la Figura 4 se muestra un ejemplo de cinco imágenes de aneurismas cerebrales con los modelos de aneurisma obtenidos a partir de la segmentación de éstas. Se observa que la topología de estas estructuras puede ser compleja así como que las imágenes pueden ser bastante ruidosas y contener otras estructuras colindantes que actúen como distractores para el proceso de evolución de las superficies (e.g. la presencia de huesos). Para ilustrar el uso ulterior de estos resultados, en la Figura 5 incluimos visualizaciones de dos variables hemodinámicas (los esfuerzos de corte y el índice de oscilación de esfuerzos) que pueden derivarse de combinar esquemas numéricos de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes con los modelos geométricos segmentados y con algoritmos de preprocesado de superficies y mallado volumétrico para obtener mallas numéricas de tetraedros [CCAPMF]. La convergencia de métodos de procesamiento de imágenes, geometría computacional y mecánica computacional de fluidos constituyen un interesante avance que permitirá poder pasar de imágenes diagnósticas a variables cuantitativas de la morfología y hemodinámica vascular personalizadas y que abrirán las puertas a un diagnóstico avanzado computerizado, una mayor comprensión *in silico* de los fenómenos hemodinámicos subyacentes a la patología e, eventualmente, a poder planificar de forma eficiente y objetiva las intervenciones mínimamente invasivas que constituyen la base de la terapia de esta patología.

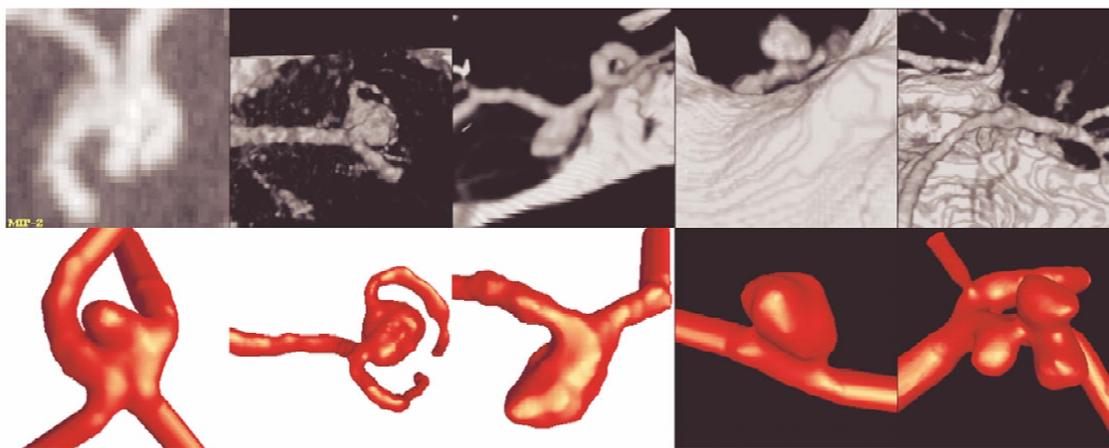


Fig 4: Aneurismas cerebrales en imágenes de CTA. Fila superior: renderizado volumétrico de regiones de interés en torno a los aneurismas en las imágenes de CTA. Fila inferior: renderizado de superficie de los modelos geométricos reconstruidos a partir de la segmentación representados mediante superficies trianguladas [CHFPPB] (Cortesía de J.R. Cebral, George Mason University).

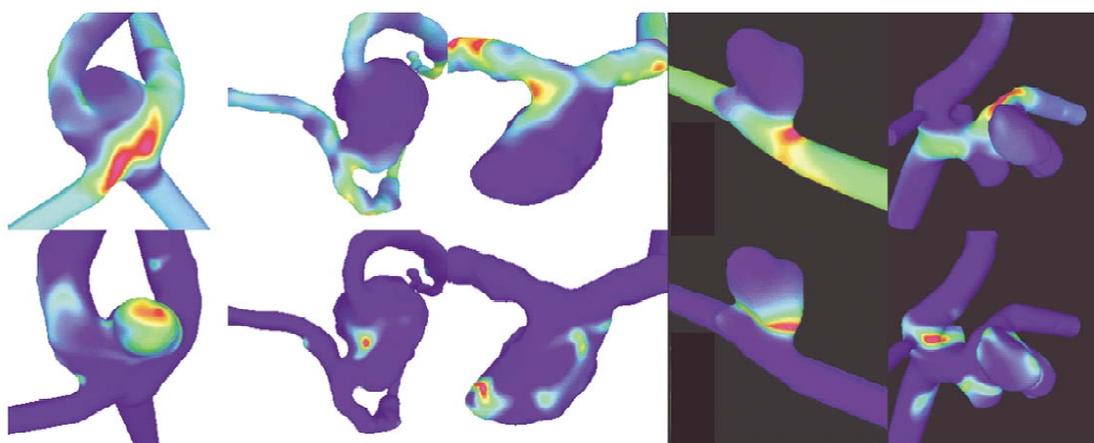


Fig 5: Los modelos geométricos obtenidos mediante procesamiento de imagen pueden utilizarse para la construcción de modelos hemodinámicos numéricos que permiten explorar variables hemodinámicas personalizadas y su relación con los mecanismos que conducen a la ruptura de los aneurismas. En la fila superior se visualizan la magnitud de esfuerzos de corte sobre la pared vascular y en la fila inferior el índice de esfuerzo oscilatorio que representa la variación del esfuerzo de corte durante el ciclo cardíaco. Algunas hipótesis indican que zonas de mayor esfuerzo de corte podrían estar asociadas con las zonas más propensas a la ruptura [CHFPPB] (Cortesía de J.R. Cebral, George Mason University).

Agradecimientos: Queremos agradecer a Adolfo Quirós y a Juan Luis Vázquez sus valiosas sugerencias para la redacción de este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- [AAC] M. Alemán, L. Álvarez, and V. Caselles. Texture-Oriented Anisotropic Filtering and Geodesic Active Contours in Breast Tumor Ultrasound Segmentation. Prepublicación.
- [AGLM] L. Álvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing, Arch. Rat. Mech. and Anal. 16, IX (1993), pp. 200-257.
- [C] J.F. Canny. A computational approach to edge detection. IEEE Pattern Anal. Machine Intell. 8, pp.679-698, 1986.
- [CCCD] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, F. Dibos. A geometric model for active contours. Num. Mathematik 66, pp. 1-31, 1993.
- [CKS] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro. Geodesic Active Contours. Inter. Journal Computer Vision, 22(1), 61-79, 1997. (y Proc. ICCV 1995, pp. 694-699).

- [CKSS] V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro and C. Sbert. Minimal Surfaces: A Three Dimensional Segmentation Approach. *Num. Mathematik*, 77, no 4, pp. 423-451, 1997.
- [CHFPPB] J.R.Cebral, M. Henández, A. Frangi, C. Putman, R. Pergolesi, J. Burgess. Subject-Specific Modeling of Intracranial Aneurysms.
- [CCAPMF] J.R. Cebral, M.A. Castro, S. Appanaboyina, C. Putman, D. Millan and A.F. Frangi (2005). Efficient Pipeline for Image-Based Patient-Specific Analysis of Cerebral Aneurysm Hemodynamics: Technique and Sensitivity, *IEEE Trans on Medical Imaging*. 24(4):457-67.
- [CHFPPB] J. R. Cebral, M. Hernández, A. Frangi, C. Putman, R. Pergolizzi, J. Burgess (2004) Subject-specific modeling of intracranial aneurysms, *Medical Imaging 2004: Physiology, function, and structure from medical images*, Proceedings of SPIE vol. 5369:319-327.
- [CIL] M.G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27, 1-67, 1992.
- [CV] T. Chan and L. Vese. An active contour model without edges. *Scale-Space Theories in Computer Vision*, Springer Verlag 1999, pp. 141-151.
- [DFN] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications I*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [G] D. Gabor. *Information Theory in Electron Microscopy*. Laboratory Investigation, 1965.
- [GM] F. Guichard and J.M. Morel. Introduction to Partial Differential Equations on image processing. Tutorial, ICIP-95, Washington.
- [HBHSF] M. Hernández, R. Barrena, G. Hernandez, G. Sapiro and A.F. Frangi. Pre-clinical Evaluation of Implicit Deformable Models for Three-dimensional Segmentation of Brain Aneurysms in CTA. *Medical Imaging 2003: Image Processing*, Milan Sonka, J. Michael Fitzpatrick, Editors, Proceedings of SPIE vol. 5032:1264-74.
- [HSF] M. Hernández, G. Sapiro, A.F. Frangi (2003), Three-dimensional segmentation of brain aneurysms in CTA using non-parametric region-based information and implicit deformable models: Method and evaluation. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI'03*, R.E. Ellis, T.M. Peters (Eds). *Lecture Notes in Comp. Science*, vol. 2879, Springer Verlag, pp. 594-602.
- [HF] M. Hernández, A.F. Frangi (2004) Geodesic active regions using non-parametric statistical regional description and their application to aneurysm segmentation from CTA, In *Medical Imaging and Augmented Reality (MIAR)*, G.-Z. Yang and T. Jiang (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3150 - Springer Verlag, Berlin, Germany, pp. 94–102, 2004.
- [KWT] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision* 1, pp. 321-331, 1988.
- [L] T Lindeberg *Scale-Space Theory in Computer Vision*. The International Series in Engineering and Computer Science Springer; New York, 1993.
- [M] D. Marr. *Vision*. W.H. Freeman and Company, 1982.
- [MH] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. *Proc. Royal Soc. London, B*, 207 (1980), 187--217.
- [MS] D. Mumford and J. Shah. Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. vol. XLII No.4, 1989.
- [OS] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *J. Comp. Physics* 79, 12--49, 1988.
- [PD] N. Paragios and R. Deriche. Geodesic Active Regions for Supervised Texture Segmentation. *Proc. Int. Conf. Computer Vision, Curfu, Greece*, 1999.
- [S] G. Sapiro. *Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis*. Cambridge University Press, 2001.



Vicent Caselles es Catedrático de Matemática Aplicada en la Universitat Pompeu Fabra y lidera el grupo de Procesamiento de imágenes en el Departamento de Tecnología. Su área de trabajo es el procesamiento de imágenes y las ecuaciones en derivadas parciales.

Email: vicent.caselles@upf.edu



Alejandro Frangi es Investigador Ramón y Cajal en la Universidad Pompeu Fabra y lidera el Grupo de Imagen y Computación (www.cilab.upf.edu) en el Departamento de Tecnología. Su área de trabajo es la segmentación de imágenes médicas basada en modelos y el corregistro de imágenes médicas.

Email: alejandro.frangi@upf.edu