FACULTAD DE PSICOLOGÍA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN PSICOLOGÍA

TESIS DOCTORAL

Sistemas Matemáticos de Símbolos, Registros Semióticos de Representación, en ingresantes a Ingenierías.

Autor: Eduardo Lacués

Directores: Juan Antonio Huertas Martínez y Leonora Díaz.

Octubre 2018

Agradecimientos

A Laura, mi mejor mitad, protagonista de todos mis proyectos.

A Marcos y a Ismael, la parte más importante de nuestro proyecto de vida con Laura, que cada día me interpelan para ser mejor, y por quienes tengo permanente motivo para agradecer.

A Juan Antonio, ejemplo de generosidad ofrecida gratuitamente a quien pueda necesitarla, y de compromiso crítico con calidad académica.

A Leonora, implicada de muchas maneras con la gente de su tiempo y lugar, militante por hacer de la Educación Matemática un instrumento para el bien común.

A los profesores del Programa de Doctorado que supieron desafiarme y contribuyeron a que aprendiera y disfrutara al hacerlo.

A quienes en la Universidad Católica del Uruguay me invitaron a cursar una Maestría en Educación, programa pionero en Uruguay en esa época, que me permitió el reencuentro con la vida académica.

A Walter (en cuya casa Juan Antonio me invitó a participar de esta aventura) y Magdalena, los amigos con quienes comenzamos el Departamento de Matemática de la UCU, ámbito donde pude concretar los estudios de este proyecto.

A mis compañeros del Departamento de Matemática de la UCU, animosos en la tarea de educar en Matemática con la mirada puesta en la excelencia.

A cada uno de los que, con una pregunta, una palabra de interés, un empujón o un rezongo, me ayudaron a mantener en foco este proyecto y continuar hasta concretarlo.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1 INTRODUCCIÓN

1.1 PRESENTACIÓN Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo indagó acerca de la relación entre los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS) y los Registros Semióticos de Representación (RSR), su enseñanza, su aprendizaje y uso por ingresantes a carreras en Ingeniería, evidenciados en sus desempeños en tareas matemáticas.

Los orígenes históricos de los SMS y los RSR son casi contemporáneos y aunque existen diferencias teóricas entre ambos, tienen puntos de coincidencia importantes.

Para los fines de este trabajo, y por motivos que se presentarán en la Sección 2.3, se considerarán SMS y RSR como construcciones teóricas con semejanzas suficientemente amplias como para tratarse como equivalentes, y al mencionar una de ellas se entenderá que la referencia es a cualquiera de las dos.

Estos desarrollos teóricos aparecieron en Matemática Educativa hace unos treinta años; resultaron de una búsqueda de respuestas al estudio de las especificidades que tiene el problema de la representación en Matemática, cuyos primeros intentos de solución pueden rastrearse hasta Aristóteles y Diofanto, y pasar entre otros por Leibniz y su notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada. Con ella, Leibniz abordaba tempranamente una de las características deseables de cualquier representación: debe evocar algo de lo que representan. En este sentido, una de las preocupaciones de Leibniz era desarrollar instrumentos de pensamiento adecuados al quehacer matemático, en particular, los que sirvieran para construir argumentos y justificar los resultados en forma rigurosa.

Los SMS constituyen instrumentos cognitivos (Kaput, Representation Systems and Mathematics, 1987) (Kaput, Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987) (Duval, Sémiosis et pensée humaine [Semiosis and human thinking], 1995) (Duval, Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, 1998) a través de los cuales se realizan gran cantidad de actividades matemáticas: se representan en diferentes formas las entidades con las que se trabaja; se condensan grandes cantidades de información en formatos que simplifican su articulación, su organización conceptual y su estructura lógica; se comunican argumentos y se construyen razonamientos; se abordan procesos como los de generalización a partir del reconocimiento de patrones, reconocimiento de casos particulares de enunciados generales, formulación de analogías; se construyen modelos de aspectos parciales de la realidad, cuyos resultados una vez interpretados permiten diseñar dispositivos o acciones, anticipar y cuantificar fenómenos y orientar el desarrollo teórico (ya sea en Matemática internamente o en otras ciencias).

Si bien los problemas de representación en Matemática aparecen en todos los niveles de enseñanza, desde el preescolar hasta el superior, es en la transición entre el pensamiento aritmético-algebraico, más próximo a la ejecución de procedimientos rutinarios y algoritmos de cálculo, y el pensamiento matemático avanzado, caracterizado por los procesos de formalización y organización lógica que conforman el rigor matemático, donde empieza a ser esencial la experticia en el uso de diferentes formas de representación para aprehender los conceptos matemáticos.

La transición entre la enseñanza media y la universidad suele ser abrupta, y las dificultades de los estudiantes incluyen el lenguaje matemático y sus notaciones, así como el reconocimiento de la necesidad de demostraciones y los procesos para su construcción (Moore, 1994).

Éste es uno de los motivos por los que se eligió el primer año de carreras de Ingeniería como escenario para los estudios que se realizaron, dado que es en la transición entre la enseñanza secundaria superior y la universitaria inicial donde se hace manifiesto este cambio de enfoque sobre la Matemática, su naturaleza y sus usos.

La segunda razón es que los contenidos matemáticos de las asignaturas[1] de estas carreras, de las que se eligieron tres, son muy diversos, lo que permite en cada caso enfocarse en distintos aspectos del uso de las representaciones, mientras que otros quedan relativamente relegados.

En el caso de Álgebra Lineal, la preeminencia del registro algebraico es muy grande. Son frecuentes, entre otros, las siguientes situaciones: la utilización de notaciones apropiadas (subíndices, supraíndices, concatenaciones de signos que constituyen una unidad simbólica) para expresar situaciones generales; la condensación en expresiones simbólicas muy escuetas de conceptos muy complejos; la necesidad de reconocer

[1] En este trabajo, se utilizan como sinónimos "asignatura" y "curso". La palabra "grupo" se refiere cada una de las unidades en que administrativamente resultan separados los estudiantes para participar de la enseñanza.

diferentes partes de una cierta notación para conseguir la articulación de estas formulaciones generales con los procedimientos concretos que se realizan.

Este ámbito se caracteriza, además, por el hecho de que pueden construirse representaciones geométricas que sólo en algunos casos permiten interpretar todas las posibles instancias de un cierto problema (la naturaleza de un sistema lineal de ecuaciones, compatible o no, y en el primer caso, determinado o no, puede interpretarse geométricamente sólo cuando el sistema tiene dos o tres incógnitas).

Los cursos iniciales de Cálculo estudian principalmente funciones en una variable y es posible desarrollar el trabajo en la mayoría de los temas en más de un registro de representación (algebraico-analítico, gráfico, verbal, numérico). Por este motivo, la posibilidad de articulación de diferentes registros de representación es mayor en este ámbito que en el de Álgebra Lineal. Por otro lado, aunque algunas de las notaciones usadas en Cálculo presentan complejidades similares a las de Álgebra Lineal, muchos resultados relevantes son expresables con relativamente mayor sencillez.

En cursos de Matemática Discreta los temas de Lógica son objeto de enseñanza explícita, lo que no ocurre en general en los de Álgebra Lineal o Cálculo. Esta característica y el interés en estudiar los contextos de enseñanza de Matemática y su relación con la apropiación de habilidades en el uso de estas estructuras motivó la elección de este curso.

Teniendo esto en cuenta, resultó relevante buscar respuesta a algunas interrogantes que vinculan SMS con el aprendizaje de Matemática y la planificación y desarrollo de la enseñanza. Entre estas preguntas están las que siguen:

1) La enseñanza planificada intencionalmente de manera que se hagan explícitos aspectos del uso de los SMS ¿puede contribuir al desarrollo de habilidades en su uso y concomitantemente, al aprendizaje de los contenidos matemáticos?

2) Habilidades en el uso de SMS desarrolladas en relación con el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos ¿son susceptibles de ponerse en práctica al trabajar con otros, o están ligadas al contenido original?

3) En ausencia de enseñanza intencional, como resultado de las actividades matemáticas en el aula, ¿se adquieren destrezas relacionadas con diferentes aspectos del uso de los SMS o con el reconocimiento de estructuras deductivas?

4) En una tarea sobre un cierto contenido matemático, ¿qué relación existe entre el SMS utilizado y la dificultad de la tarea?

5) Dependiendo de la representación utilizada, ¿reconocen o interpretan los aprendices estructuras lógicas subyacentes a las actividades matemáticas?

Se realizaron tres estudios consecutivos, diseñados con el cuidado de alterar tan poco como fuera posible el desarrollo de la enseñanza y los procesos de evaluación habituales. Las excepciones a esta decisión la constituyeron los casos en los que se aplicaron estrategias de enseñanza específicas para ser evaluadas en relación con los aprendizajes conseguidos, como ocurrió en el primer estudio, y en menor medida, en el segundo.

Se tomó esta determinación con la pretensión de que los resultados obtenidos no sólo proporcionaran elementos para la discusión teórica; se deseaba que, en el caso de que las intervenciones de enseñanza que formaron parte de algunos de estos estudios se pudieran relacionar con mejoras en los aprendizajes, los instrumentos desarrollados para estas intervenciones pudieran integrarse a las prácticas de enseñanza.

Esta decisión impuso restricciones. En algunos casos, limitó el tamaño de la muestra; en otros no permitió controlar todas las variables (por ejemplo, profesor); en ocasiones obligó a realizar determinadas observaciones en momentos específicos del desarrollo de los cursos (en instancias de evaluación de la asignatura, entre otros).

A continuación, se presentan en forma resumida estos tres estudios.

1.2 ESTUDIOS REALIZADOS

Para el primero se optó por un diseño con un grupo experimental y otro de control, con intervención en el grupo experimental.

Tuvo como escenario dos asignaturas semestrales cada una de ellas con dos grupos. En un curso de Álgebra Lineal, en uno de los grupos designado al azar como experimental, se propusieron tareas diseñadas con la finalidad de enseñar el uso de SMS y su relación con habilidades matemáticas como los procesos de generalización a partir del reconocimiento de patrones o la ejecución de algoritmos; en el otro, el de control, se desarrolló una enseñanza similar a la práctica tradicional de semestres anteriores, sin poner énfasis en estos aspectos.

Las tareas habían sido puestas a prueba en un estudio preparatorio, desarrollado con otros estudiantes (Lacués, Enseñanza y aprendizaje de los Sistemas Matemáticos de Símbolos, 2011).

Para estudiar el efecto de la intervención se estudiaron los desempeños en un test inicial y en otro final. Ambos fueron diseñados para esta instancia, y se contó como insumo con la información recogida en el estudio preliminar.

Los grupos experimental y de control no mostraron diferencias en el pretest, pero sí la hubo en el postest, a favor del grupo experimental.

Se efectuó un estudio adicional con estos mismos datos. Los estudiantes fueron clasificados en tres categorías de acuerdo con los resultados del test inicial: bajos, medios y altos.

Al desagregar a los participantes, se encontró que los integrantes de la categoría alta mejoran significativamente, en tanto los de las restantes no mejoraron su desempeño en el test final, lo que podría ser explicado teóricamente como se discute en la sección de conclusiones[2].

Los estudiantes de este curso de Álgebra Lineal participaban simultáneamente de uno de Cálculo separados en los mismos grupos. En los grupos de Cálculo no se realizó intervención alguna.

[2] Páginas 100-101.

Para estudiar la eventual transferencia al trabajo con contenidos de Cálculo de las habilidades desarrolladas sobre los de Álgebra Lineal, se compuso un test con base en actividades habituales en la primera asignatura, que fueron propuestas en diferentes instancias a lo largo del curso. Se recogieron evidencias de transferencia en los desempeños del grupo experimental y no en el de control.

Con este estudio, se abordó la búsqueda de respuesta a las cuestiones 1 y 2 anteriores. Respecto de la primera, se estudió el efecto de la intervención diseñada en la adquisición de habilidades en el uso de SMS para desarrollar actividades matemáticas como las de formulación de generalizaciones a partir de patrones detectados en casos particulares. Respecto de la segunda se indagó acerca de si las habilidades conseguidas se ponían en juego en situaciones similares en contextos matemáticos diferentes.

Algunos de sus resultados llamaron la atención sobre la importancia de las estructuras deductivas en los procesos analizados, lo que se detalla al presentar estos resultados[3], y esta fue una de las motivaciones para el diseño de los otros dos estudios.

El segundo se desarrolló en un grupo de una asignatura de Cálculo con los propósitos de averiguar acerca del uso que hacen los estudiantes de las estructuras lógicas, en particular del condicional y de las reglas de inferencia con las que se vincula, y de la relación entre el grado de dificultad de la tarea en relación con el SMS utilizado.

Se plantearon preguntas usando los contenidos matemáticos de imagen y preimagen de un elemento o de un conjunto por medio de una función, en los RSR algebraico y gráfico, acerca de las nociones de condición necesaria o suficiente.

La elección de estos contenidos estuvo motivada por su relevancia para el tratamiento de la noción de límite de una función en un punto, tema central en el curso de Cálculo y de cuyas dificultades para su aprendizaje existe una amplia literatura.

Las preguntas se organizaron en dos cuestionarios (uno gráfico y el otro algebraico), de ocho ítems de múltiple opción con cuatro alternativas de respuesta y sólo una correcta; en cada caso, cuatro ítems estaban formulados en forma de condición suficiente y los restantes cuatro como condición necesaria. La fiabilidad de los cuestionarios fue estudiada con un Alfa de Cronbach.

[3] Página 73.

Se consideraron dos variables independientes (tipo de condición, tipo de representación), cada una de ellas con dos valores (necesaria-suficiente, gráfica-algebraica, respectivamente) y una variable dependiente (rendimiento en los cuestionarios).
Resultó así un diseño multifactorial 2x2. Para el análisis de los resultados se usó un ANOVA de medidas repetidas intrasujeto y sus interacciones y un test t de Student para muestras relacionadas.
Se encontró que la noción de condición necesaria resulta más sencilla a los estudiantes y que ellos se desempeñan mejor en un registro gráfico. La combinación condición necesaria-representación gráfica es la que resulta más fácil.
Con esto se atendió a responder las cuestiones 4 y 5.
La restante interrogante, la 3, fue el objetivo principal del tercer estudio, que también se relacionó con las respondidas en los dos anteriores. Se retomó el tema de las estructuras lógicas y el de su enseñanza, y se eligieron dos cursos, uno de Matemática Discreta y otro de Cálculo, porque para el diseño del estudio era importante contar con dos conjuntos disjuntos de estudiantes, que resultaron ser los conformados por los que cursaban las respectivas asignaturas.
El estudio estuvo dividido en dos partes.
La primera sección la constituyó un análisis documental de libros de texto y apuntes de estudiantes, tratando de encontrar evidencias acerca del lugar que se da en la enseñanza a las estructuras deductivas. Se revisaron textos usuales de las dos asignaturas mencionadas, y apuntes de estudiantes participantes en estos cursos tomados en asignaturas de Matemática en su último año de bachillerato, previamente a su ingreso a la universidad.
La segunda parte buscó establecer el grado de uso de estructuras deductivas por parte de los alumnos ingresantes y su eventual evolución debida a su participación en las asignaturas señaladas, donde en una de ellas (Matemática Discreta) los contenidos de Lógica son objeto de enseñanza explícita, mientras que en el otro (Cálculo) sólo se utilizan a propósito de la enseñanza de otros contenidos.
Se uso un diseño pre-postest sin intervención. El test inicial fue el mismo, administrado a los estudiantes en una instancia generalizada de diagnóstico al ingreso a la universidad. El test final fue diferenciado por asignatura, utilizando algunos de los ítems del inicial

complementados con otros sobre contenidos específicos de cada asignatura, y se propuso en diferentes instancias de evaluación de cada curso.

Se utilizó una prueba t de Student para muestras relacionadas para estudiar la evolución de cada grupo, y otro para muestras independientes para comparar los grupos al comienzo y al final del curso.

Se encontró que los estudiantes del grupo de Matemática Discreta mostraron una mejora significativa en tareas relacionadas con el reconocimiento y uso de las estructuras deductivas, en tanto los de Cálculo mantuvieron su desempeño inicial.

Por otro lado, la comparación inicial mostró diferencias significativas a favor del grupo de Cálculo, mientras que en el final no se constatan estas diferencias. Esto puede interpretarse en el sentido de que la enseñanza intencional en temas de Lógica ayudó a compensar la diferencia inicial.

Finalmente, el estudio documental encontró evidencias de tratamiento explícito de las estructuras deductivas en los textos de Matemática Discreta, pero casi no aparecen en los textos de Cálculo ni en los apuntes de los estudiantes.

Para el desarrollo de estos estudios se organizó un marco teórico con dos grandes temas: el de los sistemas de representación y el de las estructuras deductivas.

En el primero se trataron los SMS y los RSR, mencionando vínculos con otras visiones. En ambos casos, se ubicaron los orígenes y el desarrollo que han tenido, se expusieron algunos ejemplos para mostrar sus alcances y sus limitaciones y se señalaron algunas de las críticas que han recibido. Finalmente, se establecieron sus relaciones con la Matemática Educativa, se compararon estas perspectivas teóricas y se cerró este desarrollo con un resumen de las dificultades que presentan tanto SMS como RSR para el aprendiz.

En el segundo, se comenzó por revisar el trayecto histórico de la noción de condicional, desde su aparición entre los megáricos hasta el siglo XX. A continuación, se discutió el problema del reconocimiento de que una sentencia condicional es asimétrica, en el sentido de que antecedente y consecuente no pueden intercambiarse sin modificar el significado de la sentencia, lo que da origen a la necesidad de distinguir entre condición necesaria y condición suficiente. La relación de este asunto con algunos aspectos del aprendizaje y de la enseñanza de Matemática fue abordada a partir de esta discusión, y se presentaron resultados de la investigación en Matemática Educativa en torno a este tópico.

Los vínculos entre el marco teórico y la pertinencia y diseño de los estudios se indicaron en varias instancias del desarrollo.

La presentación de informes de cada uno de estos estudios se colocó a continuación de este marco teórico, dando los detalles de acuerdo con las características metodológicas respectivas. En algunos casos se ampliaron algunos temas entre los tratados de la presentación del marco teórico, por su pertinencia específica en relación con el estudio en cuestión. Al final de cada informe se dio cuenta de los resultados registrados con una acotada reflexión acerca de sus consecuencias.

Estos informes parciales se complementaron con una sección de conclusiones, en la que se establecieron vínculos entre ellos con la finalidad de dar respuesta a las preguntas planteadas considerando el conjunto de evidencias recogidas.

También se enumeraron cuestiones que quedaron abiertas en este trabajo, indicando posibles direcciones para encaminar otros estudios.

Entre ellas, pueden mencionarse las siguientes: la necesidad de diseñar intervenciones didácticas diferenciadas para atender la diversidad de desarrollos individuales que presentan los estudiantes ingresantes a la universidad; la importancia de incluir en el currículo como objetos de enseñanza las estructuras deductivas, posiblemente no limitando esta inclusión al área de Matemática; la relevancia de incluir estrategias de enseñanza que estimulen en los estudiantes el desarrollo de competencias y actitudes favorables a una forma de trabajo matemático que incluya la articulación de un repertorio de representaciones.

Algunas de estas interrogantes pueden ampliarse a otros ámbitos: ¿cuál es la atención prestada a estos asuntos en la formación inicial de profesores de Matemática?; ¿cómo presentar en los textos de Matemática instancias en las que a la vez que se tratan los contenidos propios del área se incluyan tanto el reconocimiento como el uso de los SMS y de las estructuras lógicas que forman parte integrante de esos contenidos?

2 MARCO TEÓRICO

2.1 SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SÍMBOLOS, REGISTROS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN Y PRÁCTICAS REPRESENTACIONALES EXTERNAS

Hace cuatro décadas, Palmer (1977) declaró que la psicología cognitiva tenía la necesidad de definir la noción de representación. Su insatisfacción con el estado de la situación en ese momento derivaba del hecho de que no existía un significado preciso del término representación, y en particular, de representación cognitiva. Su propuesta planteó reconocer la existencia de dos mundos, uno representado y otro representante, que se relacionan entre sí, de manera que uno de ellos, el representante, se ubica en lugar del otro, el representado.

Siguiendo con su exposición, para disponer de un sistema de representación es necesario atender a los cinco aspectos siguientes:

a) ¿Cuál es el mundo representado?

b) ¿Cuál es el mundo representante?

c) ¿Cuáles aspectos del mundo representado van a ser modelados?

d) ¿Cuáles aspectos del mundo representante constituyen el modelo?

e) ¿Cuáles son las correspondencias entre los dos mundos?

Denis (1991) propone varias propiedades que caracterizan a los sistemas representacionales, de las que se destacan las dos siguientes.

La primera, coincidente con la descripción de Palmer (1977), es que una representación ocurre cuando un conjunto de objetos es re-expresado en términos de otros objetos en una forma sistemática de correspondencia, que podría ser parcial. Las pruebas de esta correspondencia son las instancias de preservación de las relaciones existentes entre los objetos representados, que se manifiestan entre los correspondientes representantes.

La segunda es que en los procesos de representación la información asociada a los objetos iniciales sufre transformaciones cualitativas al establecerse en los finales; esta información podría resultar presentada de diferente manera, o incluso, alguna podría perderse.

No es el objeto de este trabajo discutir el problema de la representación desde una perspectiva psicológica. Sin embargo, Palmer (1977) es la referencia teórica asumida por algunos autores cuando se plantea este problema en relación con la Didáctica de la Matemática, y los dos aspectos señalados por Denis aparecen como centrales en la mirada desde la Educación Matemática.

Su influencia puede encontrarse, entre otros aspectos, en el señalamiento de que no es la totalidad del mundo representado lo que es referido en el representante. El proceso de representación implica seleccionar qué aspectos del mundo representado serán los que se elijan para construir lo que constituye el modelo representante y cuáles serán los elementos de este último que servirán a la finalidad de ponerse en lugar de los primeros.

Esta selección es de la mayor relevancia. En efecto, en ella no solamente se establece qué elementos del mundo representado se tendrán en consideración y cuáles se descartarán, sino además quiénes en el mundo representante se pondrán en lugar de los primeros y cuáles son los nexos que se tomarán en cuenta entre los elementos de cada mundo. De esta forma, la selección destaca ciertos aspectos de interés y eventualmente oculta otros.

Más adelante, al discutir las nociones de Juego de Cuadros (Douady, 1984) y de Registro de Representación Semiótica (Duval, 1998), se discutirá el rol que tiene la elección del mundo representante, para mostrar que la aprehensión de un objeto matemático requiere de la articulación de diversas representaciones[4].

La definición de SMS fue establecida por Kaput (Representation Systems and Mathematics, 1987) como un sistema de representación, apelando explícitamente al sentido que Palmer (1977) había expresado.

En esta definición, es central la noción de esquema simbólico, caracterizado como el par formado por una colección de caracteres y otra de reglas que establecen la forma en que pueden combinarse, ordenarse o transformarse estos caracteres. La colección de reglas conforma la sintaxis del esquema simbólico.

Un sistema de símbolos es una terna formada por esquema simbólico (mundo representante), un campo de referencia (mundo representado) y una correspondencia entre ellos, que podría no ser biunívoca. Cuando el campo de referencia es una estructura matemática, se tiene un Sistema Matemático de Símbolos.

[4] Sección 2.2.

Cuando se habla de Sistemas Matemáticos de Símbolos, la ubicación del adjetivo "Matemáticos" calificando al sustantivo "Sistemas" es deliberada y pretende poner énfasis en que no son los símbolos los que se consideran matemáticos, sino los sistemas que integran ciertos símbolos y una lengua vernácula.
Ésta es la posición que defiende Puig (2003) al señalar que quien dota de significado al texto es el sistema y no los signos ni la lengua por sí mismos. Enfatiza de este modo la necesidad de considerar no los signos de manera individual, sino la entidad constituida por un conjunto de signos (no necesariamente lingüísticos) junto con una cierta lengua vernácula. Las configuraciones que se producen en este sistema cobran sentido en un proceso social por el que se van produciendo consensos en la actividad matemática. Al presentar algunas ideas de Leibniz en relación con el desarrollo del Cálculo Diferencial y de Lógica, se volverá sobre esta idea[5].
La noción de "símbolos compartidos" es presentada por Kaput : *"... parece enteramente razonable afirmar que existen símbolos compartidos y funcionan en un nivel colectivo, y sus propiedades compartidas y referentes pueden ser objeto de discusión sistemática*"[6]. (Kaput, Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987, p. 171).
Con esta noción, parece asumir una postura filosófica que sirva para dar cuenta de dos procesos duales y complementarios, el de la comunicación con otros y el de funcionamiento cognitivo individual. Esta interpretación es consistente con reconocer que los SMS tienen un componente social, que integra al individuo a una red de significados compartidos, pero que a la vez media en sus procesos cognitivos.
Se suma a esto el reconocimiento explícito de un trayecto histórico de los SMS, que va modificando su estructuración como consecuencia de la discusión acerca de sus usos.
En esta visión los SMS resultan una construcción tanto social como individual. Culturalmente, tienen una estabilidad que viene dada por el uso de la comunidad matemática. Individualmente, median en el aprendizaje y modifican el funcionamiento cognitivo. En ambos casos, la construcción de nuevos SMS es uno de los medios principales por los que se desarrolla la Matemática.
Siguiendo con la presentación de Kaput (Representation Systems and Mathematics, 1987), hay dos procesos cognitivos que pueden asociarse a los SMS: por un lado, la

[5] Páginas 27, 28, 40, 46.
[6] "…it seems entirely reasonable to assert that shared symbols exist and function at the collective level, and that their shared properties and referents can be the subject of systematic discussion." Traducción del autor.

lectura de la información presentada en un SMS y la codificación de información en cierto SMS; por otro, la elaboración o producción de nueva información una vez que la antigua ha sido codificada. Esta última actividad, a su vez, está dividida en dos: la elaboración sintáctica, en la que el ejecutante se limita a la manipulación de símbolos de acuerdo con las reglas válidas para el caso; y la elaboración semántica, en la que el individuo es capaz de razonar con las entidades representadas por el SMS.

Goldin y Kaput (1996) desarrollaron esta distinción entre elaboración semántica y sintáctica. Tomando como ejemplo los SMS algebraico y gráfico cartesiano, señalaron que el vínculo entre una gráfica y una ecuación (por ejemplo, entre una recta y una ecuación de primer grado en dos variables) que es establecida por el ejecutante de una tarea constituye una relación semántica. Estos vínculos tienen un carácter individual, dado que son mediados por la experiencia personal del ejecutante: cada individuo puede poner en juego otros SMS, o fijar la atención en aspectos parciales de las representaciones usadas, en el proceso de ejecución de la tarea, postura que es retomada por Steinbring (2006).

Por otro lado, este mismo proceso requiere para su desarrollo del reconocimiento de que ciertos signos individuales se han organizado de una forma aceptable, y la aceptación de que estas organizaciones pueden ser modificadas de acuerdo con ciertas reglas (una ecuación lineal en dos variables puede escribirse como $ax+by+c=0$, $y=mx+n$, $x=py+q$, entre otras, y se entenderá que representan la misma entidad si y sólo si se dan ciertas relaciones entre los parámetros a, b, c, m, n, p y q. Aspectos como estos últimos constituyen la sintaxis de la representación.

En el ejemplo planteado, cada SMS tiene reglas para su propia elaboración sintáctica. En algunos casos, existe la posibilidad de interpretar reglas de uno de los sistemas en términos de las reglas del otro. Estas interpretaciones constituyen de nuevo parte de las relaciones semánticas.

Esta distinción es crucial, porque sirve como marco para analizar el problema de la construcción del sentido. En efecto, la sola competencia para ejecutar algoritmos en forma estrictamente sintáctica, que en muchos casos es el indicador utilizado para evaluar los desempeños en Matemática, no puede ser considerada como suficiente evidencia de haber conseguido construir significados: una persona puede llevar a cabo rutinas de cálculo tipificadas, y no ser capaz de adecuar estas rutinas a casos similares, o no poder anticipar resultados basándose en argumentos sobre el campo de referencia, o no lograr interpretar los resultados obtenidos en términos del mundo representado.

Los SMS resultan ser mediadores para construir significados. Harel y Kaput (1991) destacaron el rol que juegan en la formación de entidades conceptuales, su papel en la presentación de diversas estructuras matemáticas y la posibilidad de ser usados para construir conceptos. Llamaron la atención acerca de que la comprensión de ciertas nociones requiere que las entidades matemáticas puedan ser manejadas como objetos, de manera que puedan usarse en procesos que las involucran: "*La sintaxis ... específicamente estructura el lugar de los objetos notacionales materiales en un sistema físico coherentemente organizado. Este sistema está diseñado para apoyar un tipo dado de pensamiento.*"[7] (Harel & Kaput, 1991, p. 89).

La discusión anterior debe ser vinculada con la dualidad con la que se pueden concebir los objetos matemáticos, como procesos o como objetos. Este asunto ha sido objeto de una amplia discusión en Educación Matemática (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000).

Sfard (1991) señala que cuando esta concepción es operacional, como un *proceso*, la entidad tiene un carácter potencial, que existe como consecuencia de una serie de acciones; está constituida por una secuencia de instancias que la conforman; es dinámica, secuencial y detallada.

En cambio, cuando es vista estructuralmente, como un *objeto*, toma un carácter de existente; es percibida como una unidad susceptible de ser manipulada sin tener en cuenta sus detalles constitutivos; es estática, instantánea e integradora.

El desarrollo que Sfard (1991) plantea desde la concepción operacional hacia la estructural consta de tres fases.

En la primera, llamada en el sentido de Piaget *interiorización*, el aprendiz toma contacto con los procesos que eventualmente darán origen al nuevo concepto; estos procesos son operaciones cuya ejecución progresivamente aumenta la habilidad del ejecutante. Esto conduce a la segunda etapa, *condensación*, en la que secuencias relativamente largas de operaciones se comprimen en unidades más manejables. En esta instancia, el aprendiz se vuelve cada vez más capaz de pensar en el proceso como una totalidad, sin sentir la

[7] "the syntax…specifically structures the place of the material notational objects in a coherently organized physical system. Such a system is designed to support a given type of thinking."Traducción del autor.

necesidad de prestar atención a los detalles. La última fase, *reificación*, ocurre cuando la persona es capaz de concebir la noción matemática como una entidad acabada. Éste es un cambio de naturaleza ontológica, en la que de repente, y no progresivamente como en las etapas anteriores, puede verse algo ya familiar desde una nueva perspectiva, como una nueva estructura en la que se conjugan diversas representaciones en una sola construcción abstracta.

La importancia de trabajar con los conceptos matemáticos considerados como objetos reificados o encapsulados (Dubinsky, 1991) aparece al considerar el alivio que proporcionan a la memoria de trabajo, y notar que permiten simplificar la comprensión de conceptos complejos o focalizarse en la estructura de los procesos de solución de problemas.

A estas tres fases, Dubinsky (1991) agrega una cuarta, la construcción de esquemas: "*Un conjunto coherente de procesos y objetos puede ser reunido y convertido en un marco referencial para formar un esquema identificable.*" (Dubinsky, Dautermann, Leron, & Zazkis, 1994, p. 271) [8]. Una vez que se han completado procesos de reificación es posible relacionar coherentemente las entidades construidas en un nivel superior de abstracción, que permite la realización de nuevas acciones y el desarrollo de nuevos procesos (Clark, et al., 1997).

Dubinsky acuñó el acrónimo APOS (Actions, Processes, Objects, Schemes) para referirse a cuaterna formada por estas cuatro operaciones, enfatizando que no existe una secuencia lineal que las ordene, sino que interactúan entre sí en diferentes direcciones, dependiendo de factores como los contenidos matemáticos o el grado de desarrollo conceptual conseguido por el aprendiz.

Al comentar estos desarrollos, Radford (1998) llama la atención sobre una dualidad que Kaput (Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987) atribuye a los SMS: por un lado, éstos median en las actividades de comunicación gracias a su condición de ser compartidos por la comunidad; por otro, intervienen en el funcionamiento cognitivo individual de una forma que Kaput mismo refiere así: "*...con las anteriores acciones y estructuras cristalizadas en símbolos estables y concretamente manipulables, la mente es*

[8] "A coherent set of processes and objects can be collected together and *thematized* to form an identifiable *scheme*". Traducción del autor.

liberada para actuar o reflexionar sobre las anteriores acciones y estructuras de maneras novedosas, tal vez conduciendo a otro ciclo de construcciones matemáticas."[9] (op. cit. pag.162).

Planteos similares son realizados por Karmiloff-Smith (1994) cuando presenta el proceso de redescripción representacional, y por Pozo (2003) cuando señala que cada sistema externo de representación reconstruye la mente, a la vez que cuando se internaliza genera nuevas formas de conocimiento.

Es decir, en este proceso, los SMS se convierten en portadores de significados que resumen conjuntos (eventualmente ordenados) de acciones sobre objetos matemáticos, y pasan a ser a su vez susceptibles de representación.

El problema de la representación ha sido estudiado desde diferentes perspectivas en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de Matemática. Goldin y Janvier (Goldin & Janvier, 1998), poco más de una década después de los primeros desarrollos en esa área (Janvier, 1987) señalaban la existencia de al menos cuatro interpretaciones de los términos "representación" o "sistemas de representación" en relación con la enseñanza y el aprendizaje de Matemática:

a) Una situación externa físicamente estructurada, o un conjunto estructurado en el ambiente físico, que puede ser descrito matemáticamente o visto como materializando ideas matemáticas;

b) Una materialización lingüística o un sistema de lenguaje, donde se plantea un problema o la Matemática es discutida, enfatizando características estructurales tanto semánticas como sintácticas.

c) Una construcción matemática formal, o un sistema de construcciones, que pueden representar situaciones a través de símbolos o un sistema de símbolos, usualmente obedeciendo ciertos axiomas o conformando definiciones precisas, incluyendo construcciones matemáticas que pueden representar aspectos de otras construcciones matemáticas.

d) Una configuración cognitiva individual interna o un sistema complejo de tales configuraciones, inferidas del comportamiento o de la introspección,

[9] …"with the earlier actions and structures crystalized into stable concretely manipulable symbols, the mind is freed to act on or reflect upon the earlier actions and structures in new ways-perhaps leading to another cycle of mathematics buildings." Traducción del autor.

describiendo algunos aspectos de los procesos de pensamiento matemático o resolución de problemas.[10] (Goldin & Janvier, 1998, pp. 1-2)

Muchas investigaciones han ampliado y explorado estos ámbitos: estudiando compatibilidad entre constructivismo y SMS (Bennet, 1990); vinculando la función comunicacional de los SMS con la cognitiva (Radford, 1998), lo que se complementa con el señalamiento que hace Berger (2004) en el sentido de que el uso comunicacional de los signos evoluciona hacia una coincidencia entre los significados personales de los conceptos matemáticos y los sociales sostenidos por la comunidad matemática; poniendo énfasis en que diferentes representaciones aportan visiones complementarias (Arcavi, 2003), lo que se asocia con el éxito en resolución de problemas mediante la habilidad para articular diferentes representaciones (Even, 1998) (Hitt, 1998) (Gagatsis & Shiakalli, 2004), y con el aprendizaje a través de la generación de representaciones propias y consensuadas con los pares (Selling, 2015), cuestión que también ha sido estudiado en otras disciplinas (Pocoví & Collivadino, C., 2014); los desempeños de los estudiantes al usar en forma casi exclusiva un sistema de representación (algebraico o gráfico) han sido también reportados (Alcock & Simpson, 2004; 2005) mientras que la emergencia de objetos matemáticos y las dificultades asociadas con los procesos de conversión entre registros (en el sentido de Duval (1998)) han sido también estudiados (Rojas, 2015).

La presentación anterior explica por qué los SMS pueden considerarse como una clase particular de sistemas externos de representación. Por sistema externo de representación se entiende cualquier combinación consensuada de signos que sirve para describir alguna entidad, refiriendo algunas características de lo representado a través de algunas particularidades en la configuración simbólica que se está usando como representante.

Al referirse a los procesos de adquisición de sistemas de representación externa, Martí y Pozo (2000) señalan cuatro aspectos distintivos de los sistemas externos de representación:

"a) An external, structured physical situation, or structured set of situations in the physical environment, that can be described mathematically or seen as embodying mathematical ideas;
b) A linguistic embodiment, or a system of language, where a problem is posed or mathematics is discussed, with emphasis on syntactic and semantic structural characteristics;
c) A formal mathematical construct, or a system of constructs, that can represent situations through symbols or through a system of symbols, usually obeying certain axioms or conforming to precise definitions--including mathematical constructs that may represent aspects of other mathematical constructs;
d)An internal, individual cognitive configuration, or a complex system of such configurations, inferred from behavior or introspection, describing some aspects of the processes of mathematical thinking and problem solving." Traducción del autor.

a) Existen en forma independiente de su creador.

b) Poseen permanencia en el tiempo, al ser marcas hechas sobre algún soporte material.

c) Están desplegados en el espacio, no en el tiempo, a diferencia del lenguaje hablado o gestual.

d) Constituyen estructuras organizadas consensuadamente.

Las características indicadas explican alguna de sus funciones, como la comunicativa; por otro lado, permiten anticipar algunas de las dificultades para su apropiación por parte de los aprendices, ligadas al carácter hasta cierto punto arbitrario de la organización de cada sistema de representación externa: "Cada sistema de representación externa tiene sus propias restricciones sintácticas para distribuir espacialmente las informaciones explicitadas externamente… Los componentes explícitos de una representación externa están limitados no solo por los límites del espacio en que deben desplegarse sino también por los propios límites de la mente humana". (Pozo, 2003, p. 176).

Esta noción de representación ha recibido críticas. Sherin y Lee (2005), trabajando en particular en temas de Física, han señalado la dificultad que existe al tratar de aplicar este tipo de análisis a un texto escrito o al lenguaje hablado, debida ésta al problema de reconocer cuáles son los mundos representante y representado, y los aspectos de cada uno en consideración.

Para ejemplificar estas dificultades, proponen como ejemplo considerar la Segunda Ley de Newton: la fuerza ejercida sobre una partícula es igual a su masa multiplicada por su aceleración. En este caso, no es sencillo identificar cuáles son los mundos representado o representante.

Otro ejemplo que muestran es el de una gráfica para representar una función. Aquí el problema consiste en determinar qué aspectos del mundo representante son relevantes para dar cuenta de los aspectos del mundo representado. Si se quiere pensar en los máximos o mínimos de la función, deben buscarse puntos sobre la gráfica; en cambio, si se pretende determinar intervalos de monotonía, hay que identificar ciertas porciones de la gráfica. Una dificultad más grande se encuentra al intentar relacionar la variación de la función con algún aspecto de la gráfica: para eso es necesario ejecutar ciertas acciones sobre la gráfica (construir ciertos segmentos cuyos extremos están sobre la gráfica y tomar en cuenta su inclinación). Es decir, la gráfica misma no proporciona explícitamente un elemento que sea el que sirva para explicitar este aspecto de la función, es necesario construir deliberadamente instrumentos que permitan esta explicitación.

Por esos motivos, proponen abandonar esta perspectiva teórica, lo que los lleva a discutir la noción de representación externa. Cuestionan la posibilidad de dar una definición satisfactoria que contemple una caracterización de los procesos por los cuales se construyen significados a partir de las representaciones matemáticas.

En lugar de pretender dar una definición de representación externa, prefieren dar otra de lo que llaman "prácticas representacionales externas", como una clase de actividad humana que involucra tres conjuntos:

a) el primero, de marcas externamente realizables, organizadas temporal y espacialmente;

b) el segundo, de convenciones acerca de la forma en que estas marcas son construidas y desplegadas, y también acerca de la forma en que estas marcas se relacionan con otras formas de actividad;

c) el tercero, de convenciones acerca de las acciones asociadas con cada organización de marcas.

Estos conjuntos se construyen consensuadamente entre los participantes en las prácticas, y a la vez, la participación en estas prácticas es lo que contribuye a dotar de sentido a las organizaciones de marcas, porque permite al participante aprender a distinguir diferencias o variaciones en los arreglos.

Los propios autores admiten que deben precisarse los límites para que una actividad humana sea considerada como una práctica representacional externa. Para caracterizarlas, proponen que puedan identificarse en la actividad los siguientes elementos:

a) Registros: las organizaciones de marcas pueden ser miradas como agrupaciones de suborganizaciones de marcas de muy diversas maneras; cada una de estas posibles agrupaciones es un registro, y permiten hacer temporalmente relevante un aspecto de la organización de marcas cuya interpretación está en consideración.

b) Formas simbólicas: en el proceso de dar significado a la organización de marcas, se establecen relaciones entre registros y esquemas conceptuales propios de la disciplina; cada una de estas relaciones es una forma simbólica.

c) Géneros interpretativos: la interpretación de una organización de marcas no es un proceso de simple traducción, sino que involucra un acto creativo por parte del intérprete, que logra articular las formas simbólicas y razonar en torno a ellas, generando algún elemento nuevo; estas formas argumentales pueden agruparse según ciertos patrones, cada uno de los cuales se llama género interpretativo.

d) Máximas interpretativas: en los procesos de interpretación de organizaciones de marcas, el autor de la organización y el intérprete deben compartir algunas convenciones acerca de registros y formas simbólicas; cada uno de estos consensos constituye una máxima interpretativa.

Los puntos de vista presentados ayudan a situar el problema de la apropiación por parte de los estudiantes (en nuestro caso, universitarios) de los objetos matemáticos con los que toman contacto a través de los signos (palabras, símbolos matemáticos) que integran el discurso matemático.

Este discurso está conformado en torno a un conjunto de consensos que dota de un significado preciso y compartido por la comunidad matemática a las expresiones que se usan para comunicar resultados, construir o interpretar modelos de aspectos parciales de la realidad o argumentar en torno a la validez de enunciados en Matemática. Estos acuerdos han sido obtenidos en el transcurso de procesos históricos a veces muy prolongados y que paradojalmente son transitorios, en la medida que el abordaje de nuevos problemas hace necesaria su modificación.

Asumiendo una perspectiva vygotskiana, Radford (2010) destaca que nuestra comprensión de los objetos de conocimiento se hace posible a través del encuentro con otros, de nuestro involucramiento con la comprensión que los demás tienen de estos objetos, y con la mediación de artefactos culturales como la escritura y el lenguaje.

En la clase, junto con este discurso disciplinar, coexisten otros, asociados con la intención de enseñar y de aprender, que no necesariamente son concurrentes, sino que en ocasiones presentan divergencias tan marcadas que suponen un obstáculo en la aprehensión de los saberes por parte de los aprendices. Por ejemplo, Durand-Guerrier (2003) y Crespo, Farfán y Lezama (2010) indican que las nociones de estudiantes y profesores acerca de las estructuras deductivas pueden diferir, lo que incide inevitablemente en la comprensión de la idea de demostración y de rigor matemático.

Dado que los problemas que han dado origen a estas formas de representación suelen ser ajenos a los estudiantes, es difícil que las estructuras comunicativas que finalmente han sido consensuadas sean visibles para los estudiantes y pueden resultarles artificiales.

Si bien la preocupación que genera esta situación es de larga data (Kieran, 1992) la dificultad que implica para cada principiante apropiarse de este discurso para usarlo de modo competente es de las menos atendidas desde la enseñanza de las Matemáticas.

En la Didáctica de la Matemática se ha desarrollado el concepto de representación específicamente relacionado a la construcción de conocimiento matemático. Como se verá en las secciones siguientes, este desarrollo contiene elementos tanto de la teoría de los sistemas de símbolos como de la propuesta de las prácticas representacionales externas.

2.1.1 DESARROLLO HISTÓRICO DE LOS SMS

Las prácticas de enseñanza de Matemática han constituido una cultura específica de uso de símbolos, en la que letras, signos o diagramas, es decir, SMS se usan en forma ritualizada dando sentido social y cognitivo a estos elementos (Steinbring, 2006). En este proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1997) el conocimiento matemático es introducido de manera interactiva, de manera que se trata de simplificar los procesos de lectura a través de reglas que frecuentemente entran en conflicto con la estructura conceptual y epistemológica de la Matemática.

La dificultad que implica para cada principiante apropiarse del discurso matemático para usarlo competentemente es de las menos atendidas desde la enseñanza de la Matemática. A principios de los noventa, Carolyn Kieran (1992) presentó una síntesis del desarrollo histórico de los sistemas simbólicos algebraicos (uno de los sistemas de representación más extensamente usado en Matemática), y analizó resultados de investigación disponibles hasta ese momento en torno a su enseñanza. A partir de la evidencia recogida, una de las conclusiones a las que arribó es que, tanto desde la enseñanza como desde los libros de texto, existe una desatención a este problema. Más aún, señala que desde el momento en que los libros de texto son la principal referencia de los profesores, sobre todo de los novatos, no es extraño que lo que no figure en ellos no aparezca en las prácticas de aula.

Con un enfoque similar, otros autores (Dubinsky, Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, 1991), (Schoenfeld, 1994) (Artigue M. , 1995) han puesto en cuestión que las prácticas tradicionales, centradas en enseñar rutinas de cálculo, estimulan en los estudiantes desempeños memorísticos y repetitivos, desperdician oportunidades para generar instancias en las que reconozcan estrategias de resolución de problemas, y no ayudan a que vinculen los procesos intuitivos o creativos con los de construcción de demostraciones formales. Dubinski es categórico al respecto: "*el objetivo, tal como es presentado y defendido por el profesor, es que el estudiante desarrolle habilidades en procedimientos de cálculo, los demuestre en exámenes y pase de grado*" (Dubinsky, 1991, p. 117)[11].

[11]" ..the goal, as presented and defended by the teacher, is for the student to develop skills in computational procedures, to display on examinations, and to get a good grade"." Traducción del autor.

En su descripción histórica, Kieran (1992) sitúa el comienzo de la etapa simbólica, a fines del siglo XV, con el trabajo de Vieta sobre una traducción al latín de los documentos de Diofanto; esta etapa la última de las tres en la que separa la historia de la evolución del simbolismo algebraico. De acuerdo con su relato histórico, el trabajo de Diofanto constituye el final de la primera, que ella llama retórica y está caracterizada por una ausencia total de formalismo, y el comienzo de la segunda, en la que comienzan a usarse símbolos para representar entidades. Ésta se extiende hasta el siglo XV, cuando en Europa comienzan a elaborarse métodos generales para abordar la resolución de diferentes problemas algebraicos a partir de los procedimientos diofánticos.

Una de las tareas que Kieran (1992) señala como casi ausentes de los textos son los que llama problemas de generalización con respuestas abiertas. Un ejemplo es la consigna: *A usted se le dan la suma y la diferencia de un par de números cualesquiera: muestre que siempre puede encontrar cuáles son esos números".*

Una respuesta dada en el marco del método retórico sería como ésta: Si sumo los dos números que me han dado obtengo el doble de uno de los debo hallar (concretamente del minuendo), por lo que dividiendo entre dos esta suma obtengo ese número; luego restando este número hallado al que me dieron como suma de los dos que debía encontrar, tengo el segundo número buscado.

Usando métodos diofánticos, podría actuarse así: represento mediante letras, pongamos a y b, los números a hallar; me doy un par de números como la suma y diferencia, digamos 10 y 6; planteo entonces x+y=10 y x-y=6; resuelvo para x poniendo 2x=16 por lo que x=8; finalmente pongo y=10-8=2.

Con los métodos modernos, como Vieta hubiera planteado, la situación se formularía eligiendo letras no sólo para las incógnitas sino para las cantidades dadas y escribiendo $\begin{array}{l} x + y = p \\ x - y = q \end{array}$ y al resolver resulta $\begin{array}{l} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{array}$.

En el planteo anterior se aprecia una progresión característica del uso de los SMS, que podría equipararse con los procesos de filogénesis y ontogénesis, y que incide en los procesos que son necesarios para la adquisición de pericia en su uso. En tanto se está limitado al marco retórico, la búsqueda de solución está próxima al control directo del ejecutante, ya que éste puede permanentemente estar refiriéndose a las entidades (los números, en esta primera etapa histórica) que de una forma u otra integran su problema.

Sin embargo, la formulación verbal de situaciones complejas se complica al extremo que podría ser muy confuso expresar los procesos que se siguen.

En una etapa como la de Diofanto, la representación de los procesos se ha hecho a través de símbolos, pero aún no se expresan éstos en toda su generalidad. Por eso, el ejecutante mantiene una cierta proximidad con el proceso de solución del problema, que, si bien no es tan directa como en la etapa retórica, conserva ciertos elementos, como el mantenimiento de los datos numéricos, lo que transforma el proceso en una solución para ese caso, aun cuando pueda vislumbrarse lo que sería una generalización.

En la etapa simbólica, la distancia entre el ejecutante y la tarea ha aumentado, al extremo de que en cierto punto los algoritmos que utiliza pueden ejecutarse sin referencia a los entes que originaron el modelo; los procesos que se siguen pueden plantearse en términos abstractos: ya no se opera con números, sino con variables.

En este punto, el mismo procedimiento se convierte en objeto de generalización, de manera que pueda extenderse a otros sistemas.

Cuando se trate el desarrollo histórico del condicional, en la sección 32.4.1[12], se volverá sobre este tema, para considerar los intentos de sistematizar formas de razonamiento en términos de una estructura simbólica formal.

Una visión complementaria de este proceso histórico lo presenta Morris Kline (1994). Plantea que con los trabajos de Nicómaco (que posiblemente haya vivido entre los años 60 y 120 después de Cristo) se produce un cambio en el centro de interés de los matemáticos desde la Geometría hacia la Aritmética, lo que hace posible el comienzo de los trabajos en Álgebra. En este contexto, indica como descollante la figura de Diofanto de Alejandría, del que se conocen pocos datos, al extremo que incluso la época en que vivió es objeto de polémica. Es posible que haya desarrollado su trabajo en el siglo III después de Cristo.

Con Diofanto aparece por primera vez en forma sistemática el uso de símbolos para representar incógnitas o variables, así como las notaciones que modernamente utilizamos para representar potencias. Una cuestión interesante a destacar es que raramente aparecen potencias superiores a tres, lo que puede ser explicado por la fuerte adhesión de la Matemática griega clásica a interpretar geométricamente los resultados de las operaciones aritméticas: no hay forma de interpretar de esta manera un producto de cuatro o más

[12] Páginas 50-51

factores. En esta visión concuerdan Radford y Puig (2007) quienes señalan la persistencia hasta el Renacimiento de esta forma de justificación o interpretación de los procedimientos algebraicos con base en los geométricos.

A pesar de esto, el trabajo de Diofanto, precursor del Álgebra tal como la conocemos actualmente, se caracterizó por el intento de proporcionar soluciones enteramente algebraicas a los problemas que resolvió. Sin embargo, Kline (1994), entre otros, le critica por no haber desarrollado generalizaciones de los procedimientos que utilizó (su trabajo muestra, entre otras cosas, una colección de abordajes particulares a cada situación).

Esta crítica resulta demasiado severa si se tienen en cuenta dos argumentos que se exponen a continuación.

El primero es de carácter histórico. Gran parte de la obra de Diofanto se perdió con la destrucción de la biblioteca de Alejandría. Lo que se salvó pasó a través de los matemáticos árabes a Europa y recién entre los siglos XIII y XV se difundió en Europa, comenzando un nuevo desenvolvimiento a partir de otros problemas, como por ejemplo los originados en actividades comerciales. En este período de casi un milenio, poco avance independiente del aporte original de Diofanto fue hecho, pese a los registrados en algunas áreas, lo que es una muestra elocuente de la dificultad que implica el desarrollo de sistemas de símbolos apropiados para la actividad matemática.

El segundo argumento tiene que ver la característica de la Matemática que en el siglo XX llevó a definirla como “la ciencia de los patrones” (“the science of patterns”). En su desarrollo moderno la Matemática ha buscado permanentemente la elaboración de abstracciones que progresivamente van consiguiendo una mayor generalidad, que se traduce en algoritmos de mayor aplicabilidad o en procedimientos más ampliamente utilizables. Pero esa no fue una característica de la Matemática en los primeros tiempos de su construcción. Por lo tanto, que Diofanto no haya perseguido estos objetivos está encuadrado en las concepciones de su época. Este desarrollo del Álgebra permitió resolver un conjunto de problemas y abrió las puertas a otros nuevos.

En el marco algebraico, no hay instrumentos matemáticos que sirvan para describir apropiadamente los procesos de variación de una cantidad respecto de otra.

En esta encrucijada estaba la Matemática a fines del siglo XVII cuando se inició la construcción del Cálculo, cuyo desarrollo inicial fue liderado por el trabajo de Isaac

Newton, por un lado, y del de Gottfried Leibniz, aunque puedan encontrarse antecedentes en Pierre de Fermat.

A partir de problemas diferentes, ambos llegaron al desarrollar la idea de derivada, que resuelve el problema planteado antes, como límite de un promedio de cambios. Lo que nos ocupa aquí es el tema de las notaciones que cada uno uso para designar la derivada en un punto. Mientras Newton propuso que, si x designaba la cantidad, su variación se designaría con $\dot{x}$, Leibniz sugirió que si y era la variable (dependiente) cuyo cambio en relación la variable (independiente) x se quería denotar, entonces la notación sería $\frac{dy}{dx}$.

Hay que resaltar que la notación de Leibniz cumple con la condición señalada antes al referirnos a Kaput: evoca de manera clara el proceso por el cual la nueva entidad se construye. Un dato interesante a tener en cuenta es que el desarrollo del Cálculo fue más vigoroso en la Europa continental que en Inglaterra, y es posible que ello se deba en parte a las ventajas comparativas de la notación de Leibniz respecto de la de Newton.

Leibniz se destacó, además de sus múltiples contribuciones a la Matemática, por su decidido impulso al uso de SMS: *"La historia de Leibniz es la historia del desarrollo de la notación en concierto con el desarrollo de conceptos"*[13] (Kaput, 1994, p. 113). Así es que su "S" alargada, $\int$, para representar una integral procuraba hacer presente el proceso de sumar cantidades infinitesimales.

Pero hay un punto que es necesario resaltar: porque el lenguaje formal había sido construido teniendo en cuenta la representación de aspectos esenciales de lo representado, Leibniz confiaba en él como medio para guiar el pensamiento, en el que las operaciones sobre los símbolos producirían otros símbolos y otras relaciones entre ellos, de tal manera que se podría esperar que los resultados de las acciones ejecutadas sintácticamente (es decir, siguiendo tan sólo las reglas de transformación aceptadas como válidas) sobre cadenas de símbolos, resultaran ser correctas semánticamente (es decir, que las interpretaciones de estos resultados en términos de los referentes de los símbolos fueran consistentes con las propiedades de estos referentes).

Esto ocurre de manera notable, por ejemplo, en las reglas que permiten calcular derivadas de funciones construidas a partir de otras conocidas. Más aún, resultados obtenidos

[13] "The story of Leibniz is the story of the development of notation in concert with the development of concepts", traducción del autor.

sintácticamente podrían anticipar propiedades no inmediatamente visibles en el referente y de esta manera promover nuevas formas de comprender el objeto.

Existe un paralelo muy notable entre el planteo de Kaput acerca de la relativa sencillez que presentan los SMS que evocan claramente aspectos importantes del mundo representado y estas ideas de Leibniz acerca de la forma en que los SMS pueden servir para guiar el pensamiento. Aunque originadas en concepciones diferentes estas líneas argumentales terminan convergiendo. Al tratar el vínculo de los SMS con el funcionamiento cognitivo, se ampliará esta discusión[14].

Un resultado de este proceso histórico en Matemática es el que Romberg resaltó:

> "*(...) el poder de la Matemática reside realmente en que un pequeño número de símbolos y de afirmaciones simbólicas pueden ser utilizadas para representar un conjunto amplio de situaciones problema distintas. La identificación y la utilización de los símbolos puede organizarse en ámbitos como los enunciados simbólicos que caracterizan el ámbito, las tareas implicadas que deben llevarse a cabo, las reglas que deben seguirse para representar, transformar y realizar los procedimientos y el conjunto de situaciones que generalmente se han utilizado para crear los símbolos, las relaciones entre los mismos y las reglas significativas*" (Romberg, 1991, p. 374).

La descripción dada hasta ahora se ha limitado a marcar hitos históricos del desarrollo de los SMS. Esta perspectiva se completa a continuación con algunas referencias a los aspectos sociales involucrados en este proceso.

Radford y Puig (2007) pusieron el énfasis en que la construcción y adopción de sistemas simbólicos hizo posible uno de los mayores logros de la humanidad, la constitución del lenguaje algebraico, que a su vez condujo a la emergencia del pensamiento simbólico.

Luego de cuestionar la visión más extendida acerca de la relación entre filogénesis y ontogénesis, enunciada en la teoría de la recapitulación, propusieron una nueva forma de explicar esta relación, a través de lo que denominan "Embedment Principle":

> "*Principio Integrador: nuestros mecanismos cognitivos (percepción, abstracción, simbolización) están relacionados, de una manera crucial, a una dimensión conceptual histórica, ineluctablemente integrada en nuestras prácticas sociales y en los signos y artefactos que las median. En efecto, los contextos en los cuales*

[14] Páginas 40-41

pensamos están anclados en un ubicuo estrato de actividad cognitiva históricamente construida, al que somos atraídos, aunque no conscientemente" (Radford & Puig, 2007, p. 148) [15].

La aceptación de este principio tiene consecuencias didácticas, tanto en la planificación de la enseñanza como en el análisis de los procesos de aprendizaje.

"*Esta actividad histórica y cognitiva depositada en signos, el sistema semiótico que forman y las prácticas sociales que las median, ofrecen a nuestros estudiantes ciertas líneas de desarrollo conceptual, vectores maleables de crecimiento cognitivo que los estudiantes pueden perseguir y transformar en acuerdo con las actividades en las que se involucran.*"[16] (op. cit., p. 148).

Esto es, la actividad histórico-cognitiva asentada en signos, el sistema semiótico que forman y las prácticas sociales que mediatizan, ofrecen a los estudiantes direcciones de desarrollo y formas de apropiación del saber escolar del Álgebra.

En estas afirmaciones es posible reconocer proximidades a la propuesta de Sherin y Lee (Sherin & Lee, 2005). En efecto, las prácticas sociales podrían considerarse como un elemento que facilita la incorporación de formas consensuadas de interpretación (máximas interpretativas) de las actividades representadas en signos (registros).

Profundizando en esta misma posición, Steinbring (2006) insiste en que un signo matemático no es portador por sí mismo de significado, sino que éste le es atribuido a través de dos funciones diferentes, una semiótica que se refiere a que el signo está en lugar de algo representado por él, y otra epistémica que tiene que ver con el rol de ese signo en la construcción matemática. Para describir esta situación recurre a un diagrama que llama triángulo epistemológico, representado a continuación en la Figura 1, que modela las interacciones entre el objeto representado, el símbolo que lo representa y el concepto matemático.

[15]" …our cognitive mechanisms (e.g. perceiving, abstracting, symbolizing) are related, in a crucial manner, to a historical conceptual dimension ineluctably *embedded* in our social practices and in the signs and artifacts that mediate them. Indeed, the contexts in which we think are anchored in an ubiquitous stratum of historically constituted cognitive activity from which we draw in a fundamental way – even if not consciously." Traducción del autor.

[16] "This historical cognitive activity deposited in signs, the semiotic system that they form, and the social practices that they mediate offer our students certain lines of conceptual development, malleable vectors of cognitive growth that the students can pursue and transform in accordance to the activities they engage with." Traducción del autor.

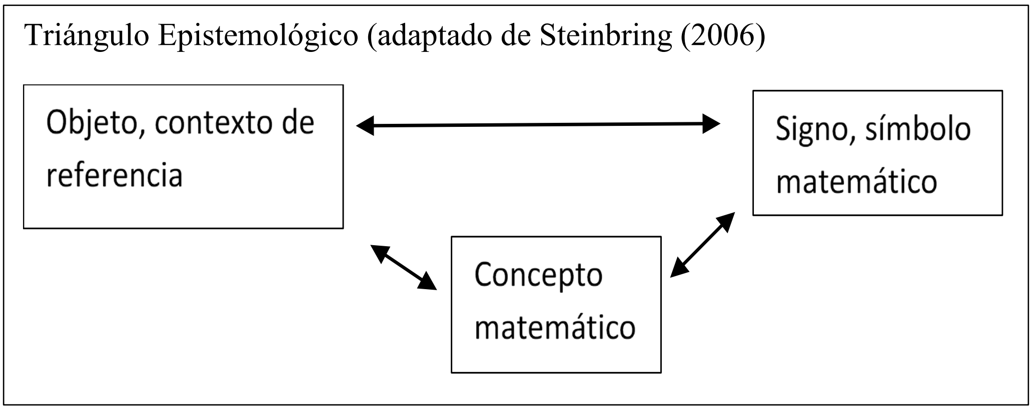

Figura 1: Triángulo Epistemológico

Las interacciones entre dos de los vértices están mediadas por el tercero, lo que convierte al triángulo en una unidad que, además, dependen el aprendiz. Es éste, en interacción con otros, quien activamente realiza las acciones que establecen las relaciones entre los vértices. Esta actividad no está representada en el triángulo, es un elemento ajeno a él que termina construyendo los vínculos entre los vértices.

El logro de experticia en el uso de SMS por los aprendices permite tomar distancia de las formas más concretas de formulación de los problemas. Llevado a un extremo, esto puede significar que los estudiantes sean capaces de ejecutar algoritmos correctamente, sin tener en cuenta los problemas a los que esos algoritmos originalmente dieron respuesta.

El hecho de que los algoritmos puedan ser aislados totalmente de cualquier contexto, tanto extra como intra-matemático, comporta el riesgo de confundir la habilidad en la ejecución de rutinas de cálculo con la comprensión conceptual del problema, que incluye, entre otros elementos, la interpretación de los significados de los símbolos utilizados y de las relaciones que con su uso se establecen entre las entidades involucradas.

En este sentido, vale la pena destacar que otra de las características que los SMS comparten con el lenguaje, es que muchos de sus significados dependen del contexto en el que se formulan las sentencias. En cada caso, las propiedades que se resumen en esos sistemas son diferentes, y para cada aprendiz constituye un problema identificar, a partir del contexto en el que están siendo usadas, cuáles son las pertinentes.

2.1.2 ROL DE LOS SMS

Romberg (1991) destaca que cualquier actividad matemática puede incorporar en su desarrollo procesos de invención, abstracción, demostración y aplicación. En el desarrollo de tareas matemáticas de cierta complejidad, como la generación de conjeturas, la construcción de generalizaciones a partir del reconocimiento de patrones, la deducción de enunciados a partir de otros tomados como premisas o la formulación de modelos, entre otras, los SMS desempeñan el rol de representar las entidades matemáticas involucradas en la tarea, y las relaciones que se establecen entre ellas. El aprendizaje de Matemática requiere un compromiso del aprendiz con el trabajo de simbolizar: "*... el mecanismo de producción y de uso, subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los 'objetos' de la adquisición conceptual es crucial para el conocimiento.*" (D'Amore, 2004, p. 95).

Las reglas sintácticas de construcción y de transformación de expresiones simbólicas están frecuentemente inspiradas en las propiedades de esas entidades, pero en otros casos estas reglas son las que proporcionan nuevas formas de interpretación semántica.

En otro orden, las formulaciones simbólicas permiten una gran economía de representación, lo que acarrea una enorme simplificación del trabajo matemático; una parte importante del poder de la Matemática para obtener sus resultados reside precisamente en la posibilidad de representar situaciones de una diversidad muy grande con relativamente pocas formulaciones simbólicas.

Retomando y ampliando el debate planteado entre posiciones extremas, por un lado, la que establece que un desempeño exitoso en la ejecución de algoritmos es suficiente evidencia de un aprendizaje significativo en Matemática, y por otro, la que afirma que las habilidades de cálculo están hasta cierto punto separadas del conocimiento conceptual, pueden agregarse otros elementos.

Al referirse a esta discusión, Berger (2004) asume una postura basada en las nociones de Vygotski (1986) (1994) para definir lo que llama uso funcional de los signos. Entiende por signo no simplemente un símbolo, sino un conjunto de ellos, como pueden ser una gráfica, una definición o un algoritmo. Sostiene, coincidiendo con Kaput (1987), que los aprendices usan nuevos signos con dos finalidades: una, comunicativa, en la que el estudiante usa el signo para interactuar con otros (pares, profesores) incluso aunque su comprensión del signo sea incompleta o inmadura; otra, conceptualizadora, en la que el signo sirve como un elemento con el que organiza sus ideas matemáticas, mediando además en un proceso de socialización al compartir significados del signo con otros actores, incluso con la comunidad matemática.

En este sentido, afirma que el uso funcional de los signos, a la vez de ser condición necesaria para la construcción de significados matemáticos, se constituye en productor de al menos parte de esos significados.

Este uso funcional de los signos se da a través de diferentes clases de actividades, entre las que se cuentan, entre otras, ejecución rutinaria de algoritmos, aplicaciones (tanto internas en la disciplina como en la construcción de modelos fuera de ella), procesos de resolución de problemas, reconocimiento y representación de patrones.

Esta misma línea es asumida por Radford (2000) al estudiar la forma en que estudiantes principiantes usan símbolos y los dotan de significados al realizar tareas de generalización de patrones. Declara que su posición teórica, coincidente con la mencionada de Berger (2004) está basada en dos ideas principales: la primera, siguiendo a Vigotsky, es que el funcionamiento cognitivo no sólo está ligado con el uso de los signos sino que además se afectado por este uso; la segunda es que los signos que un individuo usa forman parte de un sistema cultural simbólico trascendente al individuo.

Insistiendo en esta segunda idea, Roth y Radford (2010) proponen considerar la noción de Zona de Desarrollo Proximal propuesta por Vygotski (1978), no como una relación unidireccional en la que el aprendiz progresa gracias a su interacción con alguien más experimentado o capaz, sino como otra simétrica en la que ambos aprenden (posiblemente, acerca de diferentes cuestiones).

Como mediadores en esta interacción, además del lenguaje aparecen gestos corporales. Cuando se discuta acerca de las diferencias entre las representaciones algebraica y gráfica, se planteará una posible explicación basada en este señalamiento acerca del rol de la gestualidad[17].

En otra dirección, reportes como el de Gagatsis y Shiakalli (2004) ponen el foco en el papel que juegan los SMS en los procesos de resolución de problemas. Han señalado que la habilidad para resolver tareas matemáticas relacionadas con la noción de función está asociada positivamente con la de articular diferentes representaciones, en particular, con

[17] Página 100

los procesos de traducción o de conversión entre registros. El mismo enfoque ha sido seguido por Kaleff (2007) al utilizar los procesos de conversión como indicador de obstáculos cognitivos para la resolución de tareas en el marco de geometrías no euclidianas.

Estas bases teóricas y antecedentes explican por qué un elemento importante en los aprendizajes matemáticos se relaciona con la adquisición de pericia en el uso de los SMS, y permiten estudiar el problema de la apropiación de los SMS desde una nueva perspectiva, no tanto desde la pregunta ¿qué representan los signos?, sino ¿qué permiten hacer?, y esto último en el marco de los contextos socioculturales en los que se da la actividad.

En este sentido, entre las tareas diseñadas para el primer estudio figuraron algunas sobre procesos de generalización, y el rol que juegan los SMS para describir su resultado; en el segundo estudio, se exploró cómo diferentes representaciones inciden en el grado de dificultad de una tarea.

En relación con las dificultades en la adquisición de los SMS que se mencionaron antes, Rubinstein y Thompson (2001) presentan una serie de desafíos a los que se enfrentan los aprendices en su toma de contacto con los SMS: al tratar de verbalizar información presentada en un formato simbólico, resulta que puede ser necesario utilizar un discurso bastante extenso y difícil de articular correctamente; por otro lado, la misma formulación simbólica puede ser verbalizada de diferentes maneras, todas ellas equivalentes desde el punto de vista estrictamente matemático, pero que marcan matices de diferencia en el momento de planificar o ejecutar acciones; en ocasiones, las formulaciones simbólicas no se leen de derecha a izquierda, y los procesos de búsqueda a derecha e izquierda o hacia arriba y abajo para obtener una lectura correcta pueden ser engorrosos y depender de consensos que no se explicitan.

Algunos ejemplos de estas dificultades se muestran en la Tabla1.

Tabla 1: Algunas características problemáticas de los SMS

El mismo signo representa entidades diferentes.	0 y 1 representan, respectivamente: a) los enteros cero y uno, b) los neutros de la suma y del producto en un campo, c) los neutros de la suma y del producto en un álgebra de Boole.
	(a,b) representa: a) un intervalo abierto en el conjunto de los números reales (R), b) un par ordenado, c) las coordenadas de un punto en el plano, d) un vector en el espacio vectorial R2.
Símbolos diferentes representan la misma entidad.	(a,b) representa el conjunto $\{x \in R \,/\, a<x<b\}$.
	$(f \circ g)(x)$ y $f(g(x))$ representan la imagen de x por medio de la función compuesta $f \circ g$.
El mismo símbolo en una misma formulación tiene significados contextuales diferentes.	El primer par de paréntesis en $(f \circ g)(x)$ indica el resultado de una operación entre funciones (la composición) en tanto el segundo par señala que se está calculando la imagen de un elemento por medio de la composición indicada.
	La x en el denominador de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ indica que la variable respecto a la cual se deriva parcialmente es la primera, en tanto la x dentro del paréntesis señala la primera coordenada del punto donde se calcula esta derivada.
La verbalización de una formulación puede ser engorrosa.	La fórmula para las raíces de la ecuación de segundo grado, ax2+bx+c=0 es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que se lee: “las soluciones son el cociente entre el doble del coeficiente del término de segundo grado, de la suma o la resta del opuesto del coeficiente del término de primer grado con la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de este coeficiente y el cuádruplo del producto del coeficiente de término de segundo grado con el término independiente”.
La lectura de ciertas formulaciones requiere de procesos de búsqueda hacia izquierda y derecha, o de arriba abajo.	Expresiones algebraicas: $\frac{(x+1)x}{2+x^2}(x+3)$
	Símbolos que representan entidades específicas: $\lim_{x \to a} f(x) = b$
	Representación de teoremas: $_{A}(T)_{B}\ .\ (coord_{A}\ v)^{t} = (coord_{B}\ T(v))^{t}$

2.2 JUEGOS DE CUADROS, REGISTROS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

En forma casi contemporánea con Kaput (Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987), Regine Douady (1984) introdujo en su tesis doctoral la noción de "juego de cuadros" [18] para aludir a contextos de formulación de sentencias matemáticas y destacó la importancia de promover desde la enseñanza las competencias de los aprendices para transitar entre estos "cuadros" o "marcos". También asumió que las entidades matemáticas tienen un doble estatus, como herramientas o como objetos, y propuso un proceso por el cual el uso como herramienta de estas entidades conduce a la conceptualización del objeto.

Este énfasis en los procesos de traducción se justifica a partir de dos principios que ella sostuvo: el de que todo concepto matemático es susceptible de ser representado en más de un marco, y el de que estas representaciones no coinciden, dado que cada representación favorece la comprensión de algún aspecto del concepto, que posiblemente resulte menos claramente aprehensible en otra representación.

En esta dirección, las posiciones de Kaput (Representation Systems and Mathematics, 1987) y Douady (1984) coinciden en convenir que existen diferentes representaciones del mismo objeto matemático y que la articulación entre éstas es condición necesaria para el aprendizaje.

Duoady (1986) avanzó en lo que quería decir al referirse a un marco, estableciendo que se conforma con objetos matemáticos, con las relaciones que existen entre ellos y las formulaciones que representan a unos y otras, y se manejó con ideas intuitivas a este respecto (marco físico, marco geométrico, marco algebraico, marco numérico, entre otros). En cada marco es posible identificar un SMS propio, característicos del marco.

Esta posibilidad de "jugar con marcos" es un aporte destacable de Douady, como señala Balacheff (2004), por la relevancia que se reconoce al hecho de que las discrepancias en los distintos marcos son las oportunidades para generar avances en la conceptualización de los objetos matemáticos, y por lo tanto, en los aprendizajes.

[18] Cuadro, marco y encuadre han sido usadas en español como traducciones de "cadres", originalmente usada por Duoady.

Una teoría acerca de la adquisición de experticia en el uso de SMS había sido planteada por Hiebert (1988) como una sucesión de procesos: conectar símbolos individuales con referentes, desarrollar procedimientos para manipular símbolos, elaborar procedimientos simbólicos construyendo rutinas de manipulación, usar símbolos como referentes para sistemas de símbolos más abstractos. Algunos de estos procesos ya estaban presentes en la tesis de Douady (1984).

Es posible que Raymond Duval (1995), (1998) al introducir la teoría de los Registros Semióticos de Representación, haya tenido en cuenta algunos de procesos anteriores, cuando dio mayor rigor a las nociones de juego de cuadros y una definición más precisa de lo que significa articular diferentes representaciones.

Un RSR es un sistema de representación en el que es posible ejecutar al menos estas tres operaciones: el reconocimiento de formulaciones simbólicas como representantes de ciertas entidades, la transformación de una formulación en otra dentro del mismo sistema (tratamiento) y la transformación de una formulación en un cierto sistema en otra de otro sistema (conversión).

Para Duval "*las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y funcionamiento*" (Duval, 1998, p. 175).

Denomina sémiosis al proceso de construcción de una representación semiótica, en tanto noésis es la construcción conceptual de un objeto, y señala que ambas son inseparables, en tanto no es posible la noésis sin la sémiosis. Más aún, la conceptualización se consigue cuando se logra articular diferentes registros del mismo objeto, a través de las operaciones de conversión.

En esta visión, la paradoja cognitiva (Duval, 1998, p. 175) es el conflicto cognitivo existente entre distinguir el objeto representado de sus representaciones semióticas, cuando no es posible acceder al objeto sino a través de sus representaciones semióticas (Duval, 2006).

En cada registro RSR se configura una terna que incorpora los signos propios del registro, las reglas de tratamiento y las referencias que permiten los procesos de traducción entre registros.

Las reglas de tratamiento establecen las condiciones mediante las cuales dos formulaciones en el mismo registro son equivalentes, es decir, representan la misma entidad. Las reglas de transposición de términos en una ecuación algebraica son un ejemplo: permiten cambiar la forma de una ecuación manteniendo las mismas soluciones. Las operaciones de tratamiento son, desde un punto de vista matemático, las más importantes, porque los cálculos o deducciones dependen de las sustituciones internas. Sin embargo, dado que podrían resultar más complejas cognitivamente en un RSR que en otro, tratamiento y conversión van juntas en cualquier actividad matemática de cierta complejidad (Pino-Fan, Guzmán, Font, & Duval, 2017).

Las operaciones de conversión dan cuenta de los procesos de traducción que permiten el "juego de marcos", es decir, la posibilidad de establecer similitudes, tal vez parciales, entre las representaciones en diferentes registros del mismo concepto matemático. Se presenta a continuación una ejemplificación de esta discusión.

Admitiendo que una recta en un sistema de ejes cartesiano es una representación gráfica de una ecuación lineal, la representación de dos rectas en el mismo sistema cartesiano puede interpretarse como la representación de un sistema de ecuaciones lineales. No necesariamente un sistema de ecuaciones tiene por representación gráfica un par de rectas. En lo que sigue se asume que un sistema de ecuaciones lineales tiene como representación gráfica un par de rectas.

El opuesto de la razón entre el coeficiente de la variable representada en el eje de abcisas y el de la representada en el eje de ordenadas se asocia con la inclinación de la recta.

Dos rectas con diferentes inclinaciones se cortan en un único punto, pero la identificación de este punto gráficamente puede ser una tarea imposible.

Diferentes inclinaciones de las rectas se traducen en ausencia de proporcionalidad entre los respectivos pares de coeficientes de cada recta, lo que algebraicamente asegura solución única en el sistema, que además es fácilmente obtenible por medios algebraicos (procesos de conversión).

Igual inclinación en las rectas significa rectas paralelas y por tanto con intersección vacía. A su vez esto se traduce en proporcionalidad entre los pares de coeficientes ya mencionados, pero aquí solo esta condición no garantiza que no exista solución: la existencia de dos rectas en la representación es consecuencia algebraica de otras relaciones entre los coeficientes que son las que permiten, en conjunción con la anterior, establecer que no hay solución.

El comentario anterior apunta a mostrar el alcance y las limitaciones de cada RSR y, además, la ausencia de una total semejanza entre dos de ellos. Pone de relieve que cada uno puede ser mejor que el otro para resolver algunas de las tareas que se asocian con la representación, y que, además, no existe una total similitud entre ambos.

Duval (1998) realza un aspecto de importancia didáctica: la coordinación entre registros no es natural ni ocurre espontáneamente; podría no ser estimulada en los aprendices por una enseñanza que ponga énfasis en los contenidos conceptuales y descuide los asuntos referidos a su representación, llevando a lo que llama "*encasillamiento de los registros de representación*" (Duval, 1998, p. 187).

D'Amore (2004) pone el foco en que los procesos de representación semiótica, tratamiento y conversión dan cuenta de lo que se quiere decir con construir conocimiento matemático: …"*¿Qué quiere decir 'Construcción de conocimiento en Matemáticas', sino precisamente la unión de estas tres acciones sobre los conceptos*….? (D'Amore, 2004, p. 99).

La mirada de Duval tiene puntos de aproximación a la de Sherin y Lee (Sherin & Lee, 2005). En particular, los procesos de conversión no son vistos como una traducción literal de un registro de representación en otro (Guzman, 1998), dado que en general no existen isomorfismos totales entre los diferentes registros de representación semiótica, y deben seleccionarse elementos de cada uno para establecer paralelismos, de manera similar a como deben construirse registros para interpretar organizaciones de marcas.

En la posición de Duval (1995) debe reconocerse, como señala Kaleff (2007), la asunción de que las entidades matemáticas son de carácter abstracto, y por lo tanto, el acceso a ellas sólo se puede hacer a través de sus representaciones. Más aún, sólo la disponibilidad simultánea de representaciones en diferentes registros semióticos y la capacidad de articularlos a través de las operaciones referidas antes permite la adecuada conceptualización.

Esta puntualización ha encontrado constataciones en diferentes investigaciones. La emergencia de objetos matemáticos a partir de sus representaciones semióticas es indagada por Rojas (2015), que encuentra que las dificultades en estos procesos se asocian a las de articulación entre diferentes registros; Gagatsis y Shiakali (2004) han estudiado esta cuestión asociada con la resolución de problemas en el ámbito de la noción de función; las dificultades para articular diferentes registros han sido estudiadas en el contexto de cursos de Cálculo para estudiantes de Ingeniería (Gutiérrez & Parada, 2017). En otro orden, Duval (1998) destaca que las dificultades para aprender el pensamiento matemático frecuentemente están ligadas a que se pretende enseñar Matemática como si la sémiosis fuera una operación de inferior categoría que la noésis.

Esto converge con la posición de Kieran (1992) respecto a la constatación de que los SMS no suelen ser objeto de enseñanza explícita. Cuando se enseñan, frecuentemente se lo hace de manera independiente de los problemas que causaron su origen o de una reflexión sobre sus usos y ventajas, y existen evidencias de que su uso no se aprende como efecto colateral de la ejecución de tareas matemáticas tal como informa Vega (1995).

2.3 SMS y RSR

Existen características de los SMS y los RSR que aproximan los planteos de James Kaput y Raymond Duval, así como también diferencias.

El primer elemento común es la necesidad de contar con formas simbólicas reconocibles: en Duval (1998) se mencionan sistemas como el numérico, el algebraico, el gráfico, el textual, entre otros, en los que se pueden identificar ciertas configuraciones como válidas, en el sentido de que están construidas de acuerdo a ciertas reglas que las legitiman; la noción de esquema de símbolos de Kaput (Representation Systems and Mathematics, 1987) juega un rol similar.

Estos sistemas permiten operaciones internas y otras que les vinculan con sistemas similares.

Para Duval (1998) el tratamiento y para Kaput (Representation Systems and Mathematics, 1987) la sintaxis son las operaciones internas. Como ejemplos de tratamiento se mencionan: en el lenguaje natural la paráfrasis y la inferencia, la reconfiguración en el caso geométrico, y las diferentes formas de cálculo (numérico, algebraico, proposicional) propias de contextos específicos (Aritmética, Álgebra, Lógica). Como ejemplos de sintaxis, se citan los sistemas de numeración y sus reglas de concatenación, los sistemas algebraicos y se señala la especificidad de las reglas para gráficas, ejes cartesianos o diagramas.

Un caso que presenta Kaput (Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987) es especial por sus características en relación con Matemática y es el de las funciones que preservan ciertas estructuras. Por ejemplo, un homomorfismo entre grupos puede ser considerado como un SMS. Para esto, tomamos como mundo representado (o campo de referencia) al dominio del homomorfismo, como esquema simbólico (o mundo representante) a su codominio, y al propio homomorfismo como la correspondencia entre ambos. En este caso, la sintaxis está dada por la estructura de grupo del codominio.

Un caso extremo se tiene cuando el homomorfismo es un isomorfismo. En este caso, sintaxis y semántica se convierten en intercambiables, en el sentido de que cada regla de transformación en uno de los objetos tiene un correlato único en el otro.

Las operaciones que vinculan diferentes representaciones del mismo objeto son llamadas conversiones por Duval (1998) y traducciones por Kaput (Representation Systems and

Mathematics, 1987). Es en estos procesos donde se hacen evidentes algunas de las características de los sistemas representacionales que son de interés desde el punto de vista didáctico.

Dado que cualquier representación selecciona los aspectos del objeto a representar y las correspondencias entre los aspectos representados y sus representantes, resulta que no necesariamente dos representaciones del mismo objeto pueden ser puestas en una correspondencia que permita describir los mismos rasgos del objeto.

Es por eso que Duval (2005) afirma que la aprehensión del objeto matemático, su conceptualización, sólo es posible si se cuenta con una diversidad de representaciones coordinadas entre sí mediante un conjunto de conversiones, al menos parcialmente.

Kaput (Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987) acepta que diferentes SMS que representen un mismo objeto podrían no ser puestos en correspondencia (biunívoca), y señala una consecuencia didáctica de esta situación: la discusión entre conocimiento procedimental y conocimiento conceptual puede establecerse en términos de sintaxis y semántica.

El primer tipo de conocimiento está atado a las manipulaciones que se pueden desarrollar con las cadenas de símbolos, es decir, a las transformaciones aceptadas como correctas en el esquema simbólico en uso. Así aparece un par, procedimental-sintaxis. El otro par puede construirse como conceptual-semántico, es decir, el concepto se construye a partir de las correspondencias que se pueden establecer entre él (como campo de referencia) y los esquemas simbólicos que lo representen, y las que existan entre estos.

En el vínculo entre los SMS o los RSR con el funcionamiento cognitivo existen también coincidencias.

Al analizar los orígenes del Cálculo Diferencial, Kaput (1994) distingue las diferentes concepciones de Newton y Leibniz, señalando que éste mostró desde el comienzo de su desarrollo y mantuvo persistentemente una preocupación por la búsqueda de un lenguaje que pudiera conformarse como una guía para el pensamiento, de la manera que lo hace un dibujo para la geometría o las fórmulas para el álgebra.

Enfatizando este punto, destaca que Leibniz uso las notaciones formales para derivadas o integrales como operadores (de hecho, uno inverso del otro) que actuando sobre ciertos símbolos permitía la construcción de otros nuevos. La notación así manipulada se convirtió en una forma de descubrimiento de nueva propiedades o resultados (que posteriormente deberían ser chequeadas): *"Dado que la sintaxis del cálculo (en una variable) es coherente y consistentemente construida en su notación operativa, podemos estar confiados en que el resultado de acciones guiadas sintácticamente sobre cadenas de símbolos será correcto semánticamente. Ésta es la genial contribución de Leibniz"*[19] (Kaput, 1994, p. 131).

En el mismo sentido, Duval (1998) menciona al menos tres papeles de los RSR: el desarrollo de las representaciones mentales; el cumplimiento de funciones cognitivas como la objetivación, la comunicación y el tratamiento; la producción de conocimientos. En este último rol la similitud con Kaput (1994) es manifiesta: "*…las representaciones semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida que pueden hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes…*" (Duval, 1998, p. 176).

Estas coincidencias son las que han llevado a considerar semejantes las nociones teóricas de SMS y RSR.

Existen diferencias, algunas de las cuales se enumeran a continuación:

a) La cuestión filosófica de la naturaleza de los objetos matemáticos, y la necesidad de distinguir el objeto de sus representaciones.

b) El problema de la génesis de los sistemas de representación y cuál es la relación entre lo subjetivo y lo intersubjetivo de esta génesis.

c) El rol de la distancia cognitiva existente entre diferentes SMS o RSR representantes del mismo objeto.

d) La importancia relativa dada a las operaciones de tratamiento-sintaxis y conversión-traducción.

e) La relación entre SMS y RSR con el aprendizaje y con la actividad matemática.

Una discusión profunda de estas divergencias no se relaciona con el objetivo de este trabajo.

[19] "Given that the syntax of (single-variable) calculus is coherently and consistently constructed in its operative notation, we can be confident that the otcome of syntactically guided action on symbol strings wil be semantically correct. This is the genius of Leibniz contribution." Traducción del autor

2.4 SENTENCIAS CONDICIONALES Y ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS

En esta sección se aborda el estudio del condicional, en particular, su relación con los procesos deductivos y de construcción de demostraciones.

Es frecuente que se asocie Matemática con razonamiento, y se señale esta vinculación como una de las razones para justificar su inclusión en el currículo. Inglis y Simpson (2008) rastrean el origen de esta idea a partir de Thorndike y su Theory of Formal Discipline, al presentar hitos que en el siglo XX marcaron la evolución de la Matemática. Aunque hay evidencias que apoyan esta postura, (Attridge & Inglis, 2013) esta asociación es difusa, ya que no se distingue en ella qué clases de razonamiento (deductivo, inductivo, por analogía) se identifican con la Matemática, y suele confiarse en que el solo aprendizaje de la disciplina alcanza para desarrollar habilidades de razonamiento. Esta postura ha sido cuestionada, entre otros, por Bloch (2003) al señalar que la enseñanza del Cálculo suele desarrollarse sin vincularla al de los procesos deductivos.

Por otro lado, en la estructuración de la Matemática como ciencia, el razonamiento deductivo, entre otros, juega un rol central, en particular en los procesos de demostración que constituyen el núcleo del rigor matemático: "*Negación, implicación, cuantificación son tres conceptos que están en el corazón mismo de la actividad matemática…*"[20] (Durand-Guerrier, 2008, pág. 1).

Esta forma de razonamiento se basa en la estructura lógica del condicional, que ha seguido una trayectoria histórica peculiar hasta su consolidación en el siglo XX.

En la enseñanza de Matemática esta estructura deductiva tiene una presencia importante, manifestada en el discurso por el uso de expresiones tales como: "la propiedad tal es condición necesaria para la propiedad cual", "la ocurrencia de tal implica la de cual", "si tal entonces cual", "alcanza con tal para que cual", entre muchas otras. Estas expresiones forman parte del habla en el aula, tanto oral como escrita y de los estudiantes como de los profesores, y también de los libros de texto.

[20] "Negation, implication, quantification are three concepts which are at the very core of mathematical activity…" Traducción del autor.

Sin embargo, existen evidencias que muestran que los diferentes actores no comprenden lo mismo al formular las mismas expresiones, lo que tiene implicaciones en relación con la enseñanza y el aprendizaje (Durand-Guerrier, 2003), (Weber, 2004).

Un punto central es el de la adjudicación de valor de verdad a la estructura lógica del condicional, que fundamenta las formas de argumentación propias de la Matemática. Pero, como destacan Crespo, Farfán y Lezama (2010), no sólo éstas no son las únicas, sino que con frecuencia no son las usadas en el aula, ya que estudiantes o profesores utilizan otras.

Por otro lado, se han señalado muestras de las dificultades que enfrentan estudiantes universitarios para argumentar (Chávez & Caicedo, 2014), lo que está asociado con el uso de estructuras deductivas, y con los diferentes roles de los lenguajes coloquial y matemático (Ferrari P. , 2004). En este sentido, hay evidencias de que un manejo adecuado de estructuras deductivas en situaciones cotidianas abordables con el lenguaje coloquial puede no reflejarse en actividades donde sea necesario el uso de lenguaje simbólico (Stylianides, Stylianides, & Philippou, 2004). Esto fue tenido en cuenta al construir el cuestionario del pretest en el tercer estudio[21].

Las estructuras deductivas se incluyen, sin abarcarlas a todos, en las argumentativas, y algunos de los errores frecuentes, como la falacia abductiva, se basan en reglas de inferencia incorrectas (Crespo, 2007). En la sección siguiente se amplía la discusión sobre este aspecto, vinculándolo con el de la descripción de relaciones causales.

[21] Páginas 84-85

2.4.1 TRAYECTO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DE CONDICIONAL Y REGLAS DE INFERENCIA

En Cálculo Proposicional, dadas dos fórmulas bien formadas (fbf) A y B se define el valor de verdad de (A)→(B) poniendo que es falsa si y sólo si la fbf A es cierta y la fbf B es falsa. Las fbf A y B se llaman antecedente y consecuente, respectivamente, del condicional (A)→(B).

Los orígenes de la definición del valor de verdad de esta fórmula (llamada implicación material por Bertrand Russell a principios del siglo XX) pueden remontarse a Filón de Megara (Durand-Guerrier, 2003) cuyo trabajo se desarrolló alrededor del año 300 a.C., retomando y ampliando el de Aristóteles (384-322 a.C.).

Este último, al introducir los silogismos, había revelado una temprana preocupación por un aspecto no considerado hasta ese momento: la necesidad de cuantificar proposiciones. Además, Aristóteles fue un precursor en la introducción de signos para representar elementos dados, aunque desconocidos, de un cierto universo (Beth, 1965, p. 41).

Esta definición del valor de verdad la implicación material trae como consecuencia la generación de aparentes paradojas: a partir de una premisa falsa puede obtenerse cualquier conclusión; dadas dos fórmulas, siempre una es implicada por la otra.

Estos resultados, cuya justificación desde el punto de vista lógico no ofrecen dificultad, resultan anti-intuitivos. Posiblemente, una causa sea la característica de las prácticas deductivas usuales en los procesos de demostración en Matemática que asumen que las hipótesis son ciertas, lo que parece generar la idea de la necesidad de que sean ciertas, como se discute más adelante, a partir de la página siguiente.

Por otro lado, esta definición proporciona la base teórica para uno de los métodos de demostración más extendidos en Matemática, el de reducción al absurdo.

Este método consiste en transformar la prueba de una premisa A tiene una consecuencia B, en otra prueba que consista en conseguir que de la conjunción de A y la negación de B puede obtenerse una consecuencia D que sea siempre falsa (es decir, un absurdo).

En términos formales, $(A)\wedge(\neg B) \rightarrow (D)$ sólo es cierta en el caso en el que $(A)\wedge(\neg B)$ es falsa, porque D es falsa. Ahora bien, $(A)\wedge(\neg B)$ es falsa en cualquier caso excepto cuando si A y $\neg$ B son ciertas a la vez, es decir, cuando A es cierta y B es falsa.

En definitiva, $(A)\wedge(\neg B) \rightarrow (D)$ y $(A) \rightarrow (B)$ toman el valor falso exactamente en los mismos casos, lo que prueba la equivalencia de las dos fórmulas.

Cualquier cadena deductiva se basa en reglas de inferencias, como las llamadas modus ponens y modus tollens; siguiendo a Durand-Guerrier (2008), los filósofos estoicos, que continuaron la obra de los megáricos entre los años 300 y 200 a.C., establecieron estas reglas, respectivamente, de la siguiente manera:

"Si el primero, el segundo: el primero; por lo tanto, el segundo"

"Si el primero, el segundo: no el segundo; por lo tanto, no el primero"[22]

En términos formales, estas reglas pueden representarse, respectivamente, de la siguiente manera:

De las fbf $(A)\rightarrow(B)$ *y* A*, se concluye* B*:* $(A)\rightarrow(B),\ A \vdash B$.

De las fbf $(A)\rightarrow(B)$ *y* $\neg B$*, se concluye* $\neg A$*:* $(A)\rightarrow(B),\ \neg B \vdash \neg A$.

En el modus ponens, entonces, se plantea que de una sentencia condicional que se asume cierta, si además se sabe cierto el antecedente, puede concluirse que el consecuente es cierto. Asumir que el antecedente es cierto (es decir, la hipótesis es cierta) no es necesario para que el consecuente sea cierto; sin embargo, para poder afirmarlo a partir de la regla sí debe serlo. El uso reiterado de esta regla podría, por este motivo, inducir a la creencia de que es suficiente analizar lo que ocurre en este caso.

Esta creencia puede resultar estimulada, además, por una de las aplicaciones más frecuentes de las sentencias condicionales, la descripción de relaciones causales: "La concepción de los condicionales en los estudiantes suele ser causal…" (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010, p. 267).

Las sentencias con forma condicional usualmente son interpretadas en el sentido de que el hecho indicado en el antecedente es la causa de lo que se señala en el consecuente. En esta interpretación, sólo tiene relevancia establecer si una vez ocurrida la causa (es decir, si el antecedente es verdadero), ocurre o no el fenómeno descrito como eventual efecto (es decir, el consecuente es verdadero o es falso). En el primer caso, la sentencia expresa una relación correcta (es decir, se le asigna el valor cierto a la sentencia condicional)

[22] "If the first, the second; the first; therefore the second"
"If the first, the second ; not the second ; therefore not the first" Traducción del autor.

mientras que en el segundo la relación es incorrecta (o sea, la sentencia condicional es falsa).

Ésta es la clase de concepciones a las que Durand-Guerrier (2003) se vio enfrentada en su experiencia como docente en un curso de primer año universitario. Al proponer a sus estudiantes la determinación de los valores de una variable para los cuales una sentencia condicional resultaba cierta, encontró que sólo unos pocos incluían en la respuesta los valores de la variable para los cuales el antecedente resultaba falso. Incluso pudo constatar que muchos de los alumnos no se convencieron de que esta respuesta era correcta.[23]

En este sentido, es relevante la investigación de Alcock y Weber (2005) que destaca como uno de sus resultados que la aceptación de la validez de una argumentación descansa no sólo en su estructura deductiva, sino además en la existencia de razones contextuales suficientemente fuertes para aceptar que las reglas de inferencia usadas son correctas.

Al aplicar sentencias condicionales para describir relaciones causales, es irrelevante la consideración de lo que pasa cuando el hecho pretendido como causa no ocurre (es decir, el antecedente toma el valor falso) dado que no aporta a la descripción del fenómeno que se quiere estudiar.

En otro orden, la falacia abductiva mencionada al final de la sección anterior consiste en considerar como válida la siguiente regla de inferencia incorrecta: si se asumen como ciertas una sentencia condicional y su consecuente, entonces puede afirmarse que su antecedente es cierto. Parafraseando a los estoicos se formularía:

"Si el primero, el segundo: el segundo; por lo tanto, el primero".

Esta falacia surge de una confusión en el modus ponens entre los roles que juegan antecedente y consecuente en una sentencia condicional.

Las consideraciones anteriores permiten establecer una distinción, sutil pero importante, sobre la sentencia condicional (A)→(B).

Desde el punto de vista de la Lógica, como fbf, es una unidad. En este sentido, la definición de sus valores de verdad es clara e incluye el caso en que el antecedente A sea falso.

Sin embargo, cuando la sentencia se entiende como representando el hecho de que lo que se dice en A implica lo que se dice en B, se la está mirando como dos partes articuladas,

[23] Una de las preguntas del cuestionario usado en el estudio 3 está adaptada de la que usó Durand-Guerrier en su trabajo.

en la que la validez de la primera, A, tiene como consecuencia la validez de la segunda, B. De este aspecto no se ocupa la lógica, ni en el cálculo proposicional ni en el de predicados.

Retomando la descripción de la sección 2.1.1 acerca del desarrollo histórico de los sistemas de símbolos algebraicos, es interesante destacar que los primeros esfuerzos posteriores a Aristóteles por desarrollar procedimientos válidos de razonamiento tuvieron como motivación el establecimiento de una representación formal que permitiera reducir estos procedimientos a un sistema similar al algebraico.

La aparición de una Lógica Matemática (Kline, 1972) puede rastrearse hasta unos trabajos preliminares e incompletos de Descartes y, posteriormente, hasta Leibniz, quien hacia fines del siglo XVII pretendió comenzar a desarrollar un álgebra lógica, logrando algunos resultados, pero sin completar su propósito. Brunschvicg (1945) resalta el objetivo de Leibniz de desarrollar una "Simbólica" o "Característica", es decir, una forma de representación que sirviera como ámbito de razonamiento: "*Es de esta ciencia que dependería entonces el desarrollo de las diferentes partes de la Matemática.*" (Brunschvicg, 1945, pág. 227).

De acuerdo con Beth (1965, pp. 44-45), un sistema formal de lógica como el pretendido por Leibniz requería una terna constituida por una "characteristica universalis", un "calculus ratiocinator" y un "ars combinatoria".

La primera debía ser un lenguaje universal que permitiera expresar cualquier argumentación científica. Entre otras alternativas, un tal lenguaje podría organizarse sobre la base de un lenguaje natural, parcialmente formalizado a partir de establecer significados precisos para ciertos términos (que en el uso cotidiano pudieran tener una diversidad de acepciones), y complementado con la introducción deliberada de ciertos signos.

Es posible apreciar una gran semejanza entre este lenguaje universal y la postura de Puig (2003) en relación con los SMS.

El segundo elemento de la terna era pensado como un conjunto de reglas de inferencia, exhaustivo en el sentido de que debía proveer respuesta a cualquier pregunta acerca de si una cierta conclusión era obtenible a partir de un cierto número de premisas.

El tercer integrante tenía que proveer una teoría de la definición, es decir, un sistema de operaciones que permitiera construir nuevos conceptos a partir de otros previamente definidos.
En el siglo XIX, los trabajos de Augustus de Morgan y George Boole significaron avances importantes en ese sentido.
El trabajo de Boole permitió algebrizar el Cálculo Proposicional, reduciendo el problema de calcular el valor de verdad de una fórmula al de encontrar el valor de una expresión mediante reglas que modernamente se han convertido en los axiomas que definen un Álgebra de Boole (Glymour, 1997). Sin embargo, con ser importantísimo, el aporte de Boole no consiguió resolver el problema de manejar variables individuales y sus cuantificaciones.
Siguiendo a Kline (1972) un aspecto importante del trabajo de de Morgan fue introducir la idea de cuantificación, señalando que los términos pueden ser cuantificados. Con esto logró ampliar el conjunto de fórmulas válidas de silogismos. Esto tiene relación directa con uno de los aspectos indagados en este trabajo, por lo que se lo presenta a continuación.
La sentencia "Todos los A son B", en lógica aristotélica, tiene como consecuencia "Algunos A son B" y esto implicaría la existencia de algún A: "…en la transformación del predicado al sujeto hay una atribución de existencia, que puede no estar justificada por la naturaleza de las premisas" (Brunschvicg, 1945, pág. 107). Si no se establece esta condición de existencia, el silogismo llamado Darapti no es válido, lo que fue señalado por Mac Call por primera vez según establece Brunschvicg (1945, pág. 107). Ahora bien, la posibilidad de cuantificar términos permite explicitar esta asunción, y de esta forma clarificar este punto. Más adelante en esta sección, al tratar las definiciones modernas de la implicación material, se volverá sobre este asunto.
Retomando el desarrollo histórico, Peano (1895) en un trabajo destinado a analizar en profundidad los aspectos lógicos de la definición de límite de una función, manifestó una posición similar a la de Leibniz mencionada por Brunschvicg (1945): la lógica matemática tiene como objetivo el de representar todas las proposiciones matemáticas, utilizando el menor número posible de convenciones, para abreviar el trabajo de escritura y constituirse en un instrumento para el desarrollo del pensamiento.
En las posturas de Leibniz y Peano subyace la intención de usar representaciones simbólicas que sustituyan el lenguaje o, al menos, permitan condensar formulaciones

argumentales (posiblemente muy extensas) en secuencias simbólicas cuya sintaxis simplifique la comprensión de las relaciones de dependencia lógica presentes en el argumento considerado.

En el siglo XX, en el marco de la polémica sobre la fundamentación de la Matemática, Hilbert discutió acerca del rol de los signos en la construcción de las entidades matemáticas. En un trabajo de 1922 abordó el problema de la teoría de números y afirmó "*...son los signos mismos los objetos de la teoría de números.*" (Álvarez & Segura, 1993, p. 45).

Su caracterización de signo es relevante, dado que lo aproxima a la noción de representación externa que se ha descrito antes:

"Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en que se produce, de las variaciones insignificantes de su trazado, y que, en general y de manera segura, puede ser identificado. En este sentido, llamaremos el mismo signo a aquellos que tengan la misma forma." (Álvarez & Segura, 1993, p. 45)

También en el siglo XX, gracias a los trabajos de Frege, se pudo abordar este problema con éxito el problema de la cuantificación. Siguiendo a Glymour (1997), Frege, en desconocimiento de los avances de Boole, comenzó su programa consistente en reducir Matemática a Lógica. Su trabajo fue innovador, introduciendo las nociones de variable, función de símbolos, predicado de símbolos (o función proposicional) y cuantificador, creando lo que se conoce como Cálculo de Predicados.

Estos avances permitieron formalizar la definición de implicación material tal como actualmente la usamos, extendiéndola al Cálculo de Predicados, con la valoración que se presenta a continuación en las fbf que tienen ocurrencias del cuantificador universal o del existencial.

La fbf $(\forall x)((A)\rightarrow(B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A) \rightarrow (B)$ es cierta para cualquier instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en cualquier dominio.

La fbf $(\exists x)((A) \rightarrow (B))$ es cierta en un dominio si y sólo si $(A) \rightarrow (B)$ es cierta para alguna instanciación de la variable x en ese dominio; es cierta si es cierta en algún dominio.

La sencillez de estas definiciones opaca el hecho de que se consiguieron recién en el siglo XX, lo que debería llamar la atención acerca de la dificultad que implica su comprensión.
Retomando el tema del silogismo Darapti, en términos modernos éste podría plantearse preguntándose si la fórmula $(\forall x)\ ((A) \rightarrow (B)) \rightarrow (\exists x)\ ((A) \wedge (B))$ es una tautología, es decir, es cierta en cualquier asignación que se le haga.
Pero la fórmula $(\forall x)\ ((A) \rightarrow (B))$ resulta cierta si se asigna a A el valor falso (independientemente del valor de B), mientas que $(\exists x)\ ((A) \wedge (B))$ es falsa con esa asignación, por lo que resulta falsa $(\forall x)\ ((A) \rightarrow (B)) \rightarrow (\exists x)\ ((A) \wedge (B))$ para esta interpretación, y no es una tautología.
Es importante destacar que en muchas definiciones o demostraciones matemáticas están presentes, a veces de manera implícita, instancias de cuantificación. Esto contribuye en gran medida a las dificultades para su aprendizaje. Éste es el centro de la argumentación de Durand-Guerrier (2005) respecto de la necesidad de atender desde el punto de vista didáctico, a la presentación en términos de Cálculo de Predicados de las demostraciones en Matemática, y en particular, de los procesos de cuantificación presentes en ellas.
Para cerrar esta sección, se presenta una reflexión que fue motivadora para la realización de uno de los estudios. Teniendo en cuenta la relevancia de la noción de condicional en la actividad matemática, y las dificultades que se han superado hasta el establecimiento formal de la implicación material que el trayecto histórico bosquejado permite apreciar, puede preguntarse si la sola exposición de los estudiantes a la actividad matemática que se plantea en los diferentes cursos alcanza para que se apropien de este concepto, o si es necesario que éste sea objeto explícito de enseñanza.

2.4.2 CONDICIONES NECESARIA Y SUFICIENTE EN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Al problema de decidir si una función es sobreyectiva debe responderse argumentando si dado un elemento del codominio de la función, existe un elemento del dominio cuya imagen sea el elemento elegido.

En esta situación hay al menos tres señalamientos a hacer.

El primero es la presencia de cuantificadores, uno universal ("…dado un elemento…"), otro existencial. La aparición de este último es evidente, pero la del primero es más bien implícita.

El segundo punto destacable es la necesidad de articular el registro de representación en el que se está trabajando con las acciones que se requiere ejecutar para dar la respuesta.

En nuestro ejemplo, si la función viene dada por medio de una ecuación algebraica, se debe discutir la existencia de soluciones de una cierta ecuación dependiente de un parámetro. En cambio, si la función se representa por medio de una gráfica cartesiana donde se ubicó la variable independiente en el eje de abcisas, la cuestión es decidir si una recta paralela a este eje interseca a la gráfica cuando la ordenada de la recta recorre todos los valores del codominio.

El tercer elemento por señalar es la estructura lógica que está presente en la sentencia a analizar. En el ejemplo presentado, el conectivo que aparece es una conjunción: se interroga acerca de la existencia de un elemento que esté en el dominio y cuya imagen sea el elemento dado en el codominio. Como en el caso de los cuantificadores, este conectivo puede aparecer de manera poco explícita.

Otra situación similar es la que conforma la actividad para probar que una cierta función tiene límite en un punto. En el currículo de los primeros cursos de Cálculo en carreras en Ingeniería en Uruguay, este tema ocupa un lugar importante. En efecto, esta definición se usa para probar que ciertas funciones tienen un cierto límite en un punto, o para demostrar rigurosamente reglas que proporcionan procedimientos de cálculo para límites de sumas, productos, cocientes o composiciones de funciones, o para justificar resultados de interés intra-matemático, como la unicidad del límite en caso de existir.

En el proceso de usar la definición de límite para justificar la existencia de un cierto límite, es necesario y suficiente verificar que, si se quiere conseguir que la variable dependiente esté en cierto conjunto arbitrariamente elegido, alcanza con encontrar un conjunto adecuado en el que esté la variable independiente. Como antes, hay varias apariciones de cuantificadores y una estructura lógica basada en el conectivo condicional.

En efecto, la definición de límite de una función en un punto, tal como quedó establecida a partir de Cauchy, puede escribirse de la siguiente manera:

$\lim_{x \to a} f(x)=b$ si y solo si dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon$

Esta definición, leída en detalle, explicitando la traducción de algunos de los elementos simbólicos que aparecen en ella, puede redactarse diciendo:

> *La función f tiene límite b en el punto a si y sólo si dado ε positivo existe δ positivo de forma que, para cualquier x, si ocurre que la distancia de x al punto a es positiva y menor que δ resulta que la distancia de la imagen de x por medio de f al número b es menor que ε.*

Por lo tanto, afirmar que una función tiene límite en un punto es equivalente a decir que:

> *Existe un número b para el cual, dado ε positivo existe δ positivo de forma que, para cualquier x, si ocurre que la distancia de x al punto a es positiva y menor que δ resulta que la distancia de la imagen de x por medio de f al número b es menor que ε.*

En definitiva, pueden reconocerse tres instancias de cuantificación en esta definición, dos de ellas más bien explícitas ("dado $\varepsilon>0$", "existe $\delta>0$") y otra prácticamente oculta ("existe un número b"). Por otro lado, la sentencia cuyo valor de verdad debe ser analizado para decidir acerca de la existencia del límite es un condicional.

Ha sido señalado (Durand-Guerrier, 2005) (Morou & Kalospyros, 2011) que este "ocultamiento" de los cuantificadores está asociado con dificultades en la comprensión de los contenidos matemáticos y puede, por eso, inducir a errores en el desempeño de los estudiantes, en particular, en los procesos de demostración y en el uso de las sentencias condicionales, lo que en muchos países, entre ellos Uruguay, ocurre en el momento del ingreso a carreras universitarias en el área de ciencias o tecnologías.

Por su parte, un resultado central en Matemáticas es el que establece que el conjunto vacío, representado con la letra nórdica ϕ, está contenido en cualquier otro conjunto. Cuando se examina esta proposición desde la perspectiva de la definición de inclusión de conjuntos, queda claro que un condicional debe ser cierto cuando su antecedente es falso, sin que importe el valor del consecuente. En efecto, decimos que el conjunto X está contenido en el conjunto Y si y sólo si para cualquier a, si a es un elemento de X, entonces es un elemento de Y.

En términos formales, $X \subset Y \Leftrightarrow (\forall a)\ (a \in X \Rightarrow a \in Y)$. Concretada al caso en que X es el conjunto vacío ϕ, la expresión anterior queda: $\phi \subset Y \Leftrightarrow (\forall a)\ (a \in \phi \Rightarrow a \in Y)$.

Para que la proposición $(\forall a)\ (a \in \phi \Rightarrow a \in Y)$ sea cierta, debe ocurrir que $a \in \phi \Rightarrow a \in Y$ sea cierta para cualquier a.

Ahora bien, por definición, $a \in \phi$ toma el valor falso para cualquier a, en tanto $a \in Y$ puede ser tanto falso como cierto, dependiendo de a y de Y.

De aquí se concluye que ϕ es un subconjunto de cada conjunto.

Esta característica técnica de la definición del valor de verdad del condicional, necesaria internamente en Matemática, no forma parte de las concepciones habituales.

Esta constatación permite conjeturar plausiblemente que lo que hace sentido para el estudiantado, no toma por base un modo argumentativo aristotélico.

Es posible que esta sea la explicación para la siguiente situación, que se incluye dentro del silogismo Darapti. P. N. Johnson-Laird (1984) al presentar la existencia de una controversia acerca de la forma en que los humanos razonan, planteó el estudio de las respuestas que se recogen al extraer conclusiones a partir de silogismos. Uno de ellos, calificado como muy difícil, es el siguiente, en el que se pedía a estudiantes universitarios que extrajeran alguna conclusión, si había alguna, a partir de las sentencias:

a) Todos los apicultores son artistas.

b) Ningún químico es apicultor.

Johnson-Laird afirmó que "Algunos artistas no son químicos" es la conclusión a la que se arriba y destacó que ningún participante en el estudio la dio.

En términos del cálculo de predicados, tomando M(x) como x es apicultor, N(x) como x es artista y P(x) como x es químico, podemos formular el silogismo anterior usando una sentencia condicional de la siguiente manera:

$$(\forall a)\ (M(a) \rightarrow N(a)) \land \neg\ (\exists a)\ (P(a) \land M(a)) \rightarrow (\exists a)\ (N(a) \land \neg\ P(a)).$$

Sin embargo, esta fórmula no es una tautología, por lo que la conclusión propuesta no se deduce de las premisas, como se detalla a continuación:

I) Si se asume que no hay apicultores, (es decir M(a) toma el valor falso para cualquier a) entonces:

i) $(\forall a)\ (M(a) \rightarrow N(a))$ es cierto, porque el condicional $M(a) \rightarrow N(a)$ es cierto para cualquier a, porque su antecedente M(a) es falso para cualquier a.

ii) $\neg\ (\exists a)\ (P(a) \wedge M(a))$ es cierto, porque $(\exists a)\ (P(a) \wedge M(a))$ es falso, dado que la conjunción $P(a) \wedge M(a)$ es falsa para cualquier a, porque M(a) es falso para cualquier a.

iii) De acuerdo con i) y ii), $(\forall a)\ (M(a) \rightarrow N(a)) \wedge \neg\ (\exists a)\ (P(a) \wedge M(a))$ resulta ser cierto.

II) Si se asume que no hay artistas (es decir, N(a) es falso para cualquier valor de a)) o todos son químicos (o sea, P(a) es cierto para cualquier a y entonces $\neg$ P(a) es falso para cualquier a) resulta que la conjunción $N(a) \wedge \neg P(a)$ es falsa para cualquier a, con lo que $(\exists a)\ (N(a) \wedge \neg P(a))$ es falso.

III) Con esto, el condicional resulta falso.[24]

Es interesante notar que si se acepta que existen apicultores entonces la fórmula

$$(\forall a)\ (M(a) \rightarrow N(a)) \wedge \neg\ (\exists a)\ (P(a) \wedge M(a)) \rightarrow (\exists a)\ (N(a) \wedge \neg P(a))$$

resulta cierta, porque no es posible conseguir que el antecedente sea cierto y el consecuente falso.

En efecto, admitido que M(a) es cierto para algún a, digamos a_0, para que el antecedente sea cierto debe ocurrir que N(a) tome el valor cierto para a_0 ($(\forall a)\ (M(a) \rightarrow N(a))$ resultaría falso en caso contrario). Con este resultado, si fuera el consecuente falso, P(a) debería ser cierto para a_0 (de lo contrario $(\exists a)\ (N(a) \wedge \neg P(a))$ sería cierto). Por lo tanto, la fórmula $\neg\ (\exists a)\ (P(a) \wedge M(a))$ es falsa, dado que $P(a) \wedge M(a)$ queda cierta para a_0.

Aún en Matemática, las nociones de implicación y de prueba están principalmente asociadas a la consideración de los casos en los que las premisas, cuya conjunción constituye el antecedente, son ciertas. Tal como señalan Hoyles y Küchemann (2002) es necesario realizar una distinción entre la implicación material, asociada con el conectivo lógico condicional, y las proposiciones hipotéticas, en las que se analiza si una sentencia (la conclusión) es consecuencia lógica de otras (las premisas) a parti r de considerar cuál es el valor de verdad de la conclusión cuando todas las premisas con ciertas. El análisis

[24] Existen otras asignaciones para conseguir que esta fórmula sea falsa.

anterior del ejemplo propuesto por Johnson-Laird (1984) se encuadra dentro de este segundo esquema.

Aun cuando ambas nociones están indisolublemente ligadas (una proposición hipotética se formaliza como una implicación material) esta asociación no es clara para los aprendices, e incluso para los profesores (Durand-Guerrier, 2003).

Hasta aquí se ha manejado esta situación en el SMS propio del cálculo de predicados. Pero, como ha señalado Deloustal-Jorrand (2004), este mismo desarrollo puede ser realizado en el contexto de la teoría intuitiva de conjuntos (y, en caso de que la conclusión hubiera sido efectivamente consecuencia lógica de las premisas, se hubiera podido también obtenerla a partir de un razonamiento deductivo).

Al hacerlo, además, se ejemplifican los procesos de conversión entre registros (Duval, 1998), mostrando gráficamente con diagramas de Venn cómo representar sentencias condicionales a través de la inclusión de conjuntos. Como se verá, aparece aquí un caso de no isomorfismo entre las representaciones, dado que algunas de las consideraciones hechas al interior de un cierto registro difícilmente pueden equipararse a otras del otro.

Para este ejemplo, se toman el universo U como el conjunto de todas las personas, P como el de los químicos, N como el de los artistas, M como el de los apicultores.

La premisa "Todos los apicultores son artistas" queda representada por el hecho de que $M \subseteq N$.

La premisa "Ningún químico es apicultor" se representa por el hecho de que $P \cap M = \phi$.

La pretendida conclusión "Algunos artistas no son químicos" podría representarse como $N\text{-}P \neq \phi$ o, equivalentemente, como $N \not\subset P$.

En el caso $M \neq \phi$ (es decir, "existen apicultores" es cierto), como $M \subseteq N$ y $P \cap M = \phi$, entonces no puede ocurrir que $N \subset P$ (o sea, hay artistas que no son químicos), como se ve en el Diagrama 1.

Ahora consideremos el caso que $M = \phi$. Esto se representa en el Diagrama 2 con la ausencia de referencias a M (éste es un ejemplo de cómo cada registro de representación tiene limitaciones para dar cuenta de ciertos aspectos de lo representado: los diagramas de Venn no permiten, por su propia conformación, representar al conjunto vacío). Nada impide que $N \subset P$, lo que equivale a decir que "Todos los artistas son químicos" lo cual contradice la pretendida conclusión.

Diagrama 1 Diagrama 2

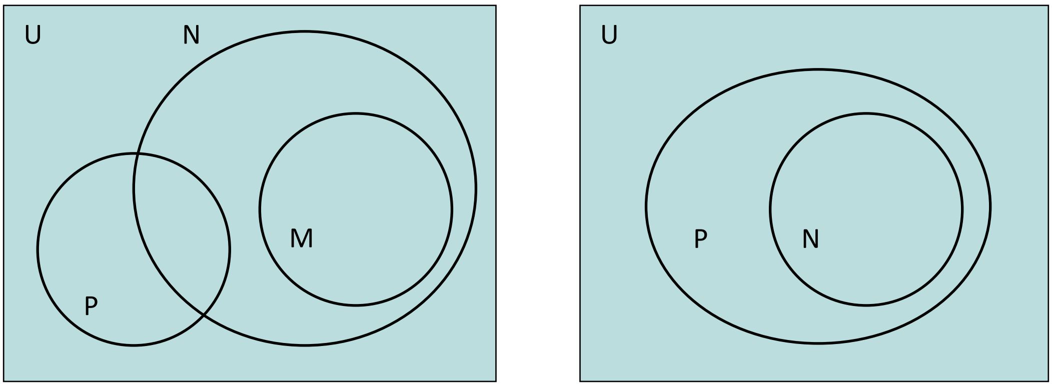

Figura 2: Diagramas de Venn para el silogismo Darapti

Es decir, lo que parece llevar al error que comete Johnson-Laird (1984) es la no consideración de un caso en el que una sentencia condicional es cierta porque su antecedente es falso.

Retomando la cuestión planteada en relación con la coexistencia de diversos discursos en el aula, el ejemplo anterior permite poner de relieve el hecho de la Lógica Matemática emergió como disciplina a fines del siglo XIX, como una necesidad en la búsqueda de soluciones a problemas internos a la Matemática (teoría de conjuntos, formalización del análisis, entre otros). Algunas de sus construcciones, como la definición del condicional, son concesiones obligadas por la necesidad de coherencia interna. Sin embargo, otras necesidades o diferentes entornos pueden dar lugar a otras maneras de argumentar. Es en este sentido que algunos autores (2010) destacan que la presencia de algunas formas argumentativas en el aula no puede explicarse a partir de la lógica aristotélica, que sin embargo es la que subyace a las matemáticas.

2.4.3 APROXIMACIONES SINTÁCTICA Y SEMÁNTICA.

Al considerar las ideas relacionadas con la deducción, pueden distinguirse dos aproximaciones: semántica o teoría de los modelos, y sintáctica o teoría de la demostración (o método de deducción natural).

Ambas toman como punto de partida el conjunto de fórmulas bien formadas, en general definidas recursivamente, y se diferencian sustancialmente en la manera en la que se establecen las formas deductivas válidas.

En la teoría semántica, el punto de partida es el del valor de verdad de una fórmula en las diferentes interpretaciones que ella puede tener. En esta perspectiva, una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de premisas si y sólo si en cualquier interpretación que haga ciertas simultáneamente a todas ellas, resulta también cierta la fórmula en cuestión.

Esta forma de plantear el problema se aleja de las prácticas usuales en Matemática y en el aula de Matemática, que son más próximas a la idea de demostración.

En la teoría sintáctica, se asumen axiomáticamente un conjunto de reglas de inferencia, que son las que permiten deducir una cierta fórmula de un conjunto de ellas. Este enfoque fue desarrollado a partir de 1930 por Gerhard Gentzen. En opinión de Cuena (1985): "*La variante que introduce el método de deducción natural es el manejo de las estructuras deductivas como un todo, definiendo reglas que permiten obtener estructuras deductivas correctas, pasando de unas estructuras a otras, partiendo de la única estructura correcta por hipótesis, $A \rightarrow A$*" (Cuena, 1985, pág. 51).

Esta aproximación es heredera de la tradición de Euclides, quien fue el primero en concebir la Matemática como una ciencia deductiva e inaugurar la noción de demostración como el criterio de verdad. Es, además, la forma en la que usualmente se procede al justificar enunciados a partir de axiomas o de otros ya establecidos, que se realiza también frecuentemente en el aula.

3 ESTUDIOS REALIZADOS

Los estudios realizados comparten la característica de haber sido diseñados con la intención de que se llevaran a cabo sin alterar las estructuras de enseñanza habituales en la institución educativa donde se implementaron, de forma que pudieran transformarse, en caso de resultar exitosos, en una práctica docente corriente. Esta decisión impuso algunas restricciones al diseño:

a) Imposibilidad de seleccionar un mismo profesor para los grupos experimentales y de control.

b) Necesidad de usar las instancias de evaluación de los cursos para proponer las pruebas.

c) Separación de los sujetos en grupos no formados al azar sino por razones administrativas, con lo que sólo pudo elegirse por sorteo un grupo como experimental y el otro como de control.

d) Acotación en el número de alumnos participantes en los estudios.

Los profesores a cargo de los cursos que estuvieron implicados en las diferentes instancias aceptaron explícitamente participar de cada experiencia y tuvieron una reunión previa con el investigador, en la que se explicaron las finalidades y se acordaron detalles como los plazos de entrega y devolución de las tareas. Se solicitó a los profesores que no introdujeran cambios en sus prácticas motivadas por el hecho de ser parte de una investigación.

También fueron estos profesores los que actuaron como pares en los casos en los que los instrumentos a utilizar fueron sometidos a evaluación interjueces.

El primer estudio es la continuación de otro (Lacués, Enseñanza y aprendizaje de los Sistemas Matemáticos de Símbolos, 2011), en el que preliminarmente se pusieron a prueba dos intervenciones didácticas con la finalidad de enseñar algunos de los usos de los SMS. Los resultados del estudio exploratorio sugirieron la conveniencia de focalizarse en una de las intervenciones, lo que llevó al diseño que se describe.

El segundo estudio se centra en la relación entre el uso de SMS y la comprensión de estructuras lógicas usuales en cursos de Matemática, en particular, las que se encuentran en torno a la definición de límite.

Algunas de las conclusiones de este estudio condujeron a analizar más profundamente las estructuras lógicas que manejan estudiantes al ingreso a la universidad, y también aspectos de su aprendizaje en los primeros cursos de Matemática que toman en su carrera. Éste es el tema del tercer estudio.

Las restricciones de diseño resultantes de las decisiones tomadas implican limitaciones a las conclusiones que de obtuvieron. Esto es discutido más adelante[25].

[25] Página 110

3.1 PRIMER ESTUDIO[26]

[26] Los resultados de este estudio están publicados en (Lacués, Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo, 2014)

3.1.1 APRENDIZAJE DE SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SÍMBOLOS EN ÁLGEBRA LINEAL Y CÁLCULO

3.1.2 RESUMEN

Este reporte presenta los efectos sobre los aprendizajes de un diseño didáctico con la finalidad de enseñar el rol de los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS) en un primer curso universitario de Álgebra Lineal. Adicionalmente se reporta la incidencia de esta intervención en el desempeño de los estudiantes en un curso de Cálculo.

Se clasificó a los estudiantes mediante un test inicial y se estableció que los estudiantes mejor calificados del Grupo Experimental (GE) consiguieron desempeños significativamente mejores que los correspondientes del Grupo de Control (GC). No hubo diferencias entre los estudiantes peor calificados de ambos grupos.

Los integrantes de GE tuvieron mejor desempeño que los de GC en la tarea de Cálculo.

Este resultado permite utilizar este diseño en grupos de estudiantes con buena calificación inicial, en tanto plantea el problema de buscar estrategias alternativas para enseñar a los de menor calificación.

3.1.3 HIPÓTESIS

Como resultado de la intervención didáctica en el curso de Álgebra Lineal, se esperaba que hubiera diferencias significativas en los desempeños de los grupos experimental y de control en el post-test. También se esperaba poder explicar estas diferencias a partir de la clasificación de los estudiantes según el resultado del pre-test, en dos categorías, rendimiento bajo, rendimiento alto.

En relación con la posibilidad de transferencia, se esperaba que, en las tareas propuestas a los estudiantes del curso de Cálculo, los que formaban parte del grupo experimental de la intervención en el curso de Álgebra Lineal tuvieran mejor desempeño que el del resto.

3.1.4 DISEÑO EXPERIMENTAL

3.1.4.1 SUJETOS

32 alumnos ingresantes en el año 2010 a carreras de la FIT.

Estos alumnos se distribuyen en dos grupos para la asignatura Álgebra Lineal. Mediante sorteo se seleccionó uno de los grupos de Álgebra Lineal como experimental (GE) y el otro como de control (GC). Estos grupos finalmente quedaron constituidos por 12 y 20 estudiantes respectivamente.

De los alumnos anteriores, 27 participaron del curso de Cálculo, 10 de GE y 17 de GC.

3.1.4.2 INTERVENCIÓN, INSTRUMENTOS Y MATERIALES

En el caso del curso de Álgebra lineal, se diseñó una intervención didáctica con la intención de enseñar aspectos del uso de los SMS. En un estudio anterior de Lacués (2011) se habían puesto a prueba dos intervenciones didácticas para enseñar el uso de los SMS en cursos de Álgebra Lineal. Aunque con ambas se constataron resultados favorables similares, se optó por la que se describe a continuación que resultó ser la que mejor funcionó y la de más fácil implementación.

Como parte del sistema de evaluación del curso, cada estudiante debe resolver en clase un conjunto de tareas, cada una de las cuales se refiere a los temas tratados durante la semana en curso. Estas tareas son corregidas en general por el profesor de cada grupo y se da a cada alumno la calificación obtenida en el plazo de una semana.

Para esta instancia se seleccionaron ejercicios que tuvieran como peculiaridad ser especialmente apropiados para ejemplificar alguno de los usos de los SMS.

Además, el profesor encargado de la corrección de las tareas fue el mismo, diferente de los profesores a cargo de los grupos. Esta decisión se tomó con la finalidad de minimizar la posibilidad de existencia de diferencias de criterios de corrección.

Los integrantes del GC recibieron sólo la calificación de la tarea, mientras que los del GE además fueron instruidos a través de comentarios del profesor que corrigió las tareas, indicando aciertos o errores cometidos en el uso de los SMS al resolver la tarea, o enfatizando de qué forma los SMS contribuyeron a la construcción y comunicación de la solución. A los estudiantes de GE, además, se les permitió hacer consultas adicionales al profesor corrector sobre los comentarios realizados.

Para estudiar los efectos de esta intervención se utilizó un procedimiento de pre-post test. El cuestionario usado para el test inicial consistió en diez preguntas de múltiple opción, con cuatro posibles respuestas y una sola correcta, clasificadas según el aspecto del uso de los SMS que fuera necesario para su resolución, de acuerdo con las siguientes categorías: traducción, traducción y tratamiento, reconocimiento.

Este cuestionario se incluyó en el diagnóstico al ingreso, entre ítems que indagaban sobre otras cuestiones.

Para confeccionar el post-test se agregaron cinco ítems al pre-test, referidos a temas tratados en el curso de Álgebra Lineal. El criterio para clasificar estos nuevos ítems fue el mismo que el del pre-test. Este cuestionario se planteó a los estudiantes en la misma jornada de la evaluación final del curso, una vez finalizada ésta. Por este motivo, esta instancia resultó ser muy larga y agotadora para la mayoría de los estudiantes y fue una concesión obligada por las restricciones al diseño enumeradas antes.

Para estudiar la transferencia de los aprendizajes obtenidos acerca del uso de SMS en Álgebra Lineal, se diseñaron dos tareas sobre aspectos del uso de SMS que habían sido tratados en la intervención didáctica en este curso, pero sobre contenidos tratados en el curso de Cálculo.

Estas tareas fueron propuestas a los estudiantes en una forma que ya había sido ensayada en otros momentos del curso, para evitar que fuera una situación novedosa para ellos. Consistió en dedicar la primera mitad de una clase a la resolución individual de las dos tareas, en tanto en la segunda parte se pidió a los estudiantes que, reunidos libremente en grupos de tres o cuatro, revisaran lo que habían hecho y escribieran un breve informe comentando lo que la discusión grupal había aportado a su comprensión de las soluciones de las tareas.

Luego se compararon los desempeños en la resolución de los ejercicios de los grupos formados, por un lado, por los estudiantes del GE que también cursaban Cálculo, y por otro el de los estudiantes de GC que también lo hacían.

3.1.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Teniendo en cuenta el número de alumnos que integraba cada grupo, se reconoció desde el inicio que existía una gran incertidumbre en los resultados que cualquier test estadístico pudiera arrojar.

Para efectuar el análisis de los resultados de los tests inicial y final se definieron diferentes variables, que se detallan a continuación:

a) Pretest indicó el promedio de respuestas correctas de cada estudiante en el test inicial.

b) Postest indicó el promedio de respuestas correctas de cada estudiante en el test final.

c) Dif se definió como el promedio de las diferencias entre el número de respuestas correctas de cada estudiante en los tests final e inicial en los ítems comunes a ambos cuestionarios.

d) Difcom es la diferencia entre Postest y Pretest.

La Tabla 2 muestra las medias de las variables definidas.

Tabla 2: Media de las variables Pretest, Postest, Preypost, Dif y Difcom

	GE	GC
Pretest	0,642	0,735
Postest	0,717	0,700
Dif	0,067	-0,055
Difcom	0,064	-0,072

La variable Pretest fue usada con dos finalidades distintas: por un lado, para establecer si existían diferencias significativas entre GE y GC al comienzo del curso; por otro, para clasificar a los estudiantes en dos grupos de rendimiento: bajo (hasta seis respuestas correctas, es decir, Pretest menor o igual que 0,6), alto (más de seis respuestas correctas, o sea, Pretest mayor que 0,6) en vistas a análisis posteriores, como se comentará más adelante.

Los resultados de Pretest mostraron que no existían diferencias significativas entre los grupos GE y GC. Tampoco se constataron diferencias significativas entre los respectivos subgrupos de rendimiento alto, por un lado, o de rendimiento bajo, por otro. Para este estudio se usó una prueba de Mann-Whitney.

Esto permitió considerar a los grupos y sus respectivos subgrupos como equivalentes al comienzo de la intervención, por lo que eventuales diferencias finales podrían atribuirse a ella.

Por un lado, interesaba estudiar la evolución de cada grupo. Una primera constatación a partir de la Tabla 1 es que GE mejoró su desempeño en el test final respecto al inicial, no sólo en las preguntas comunes a ambos cuestionarios, sino también al considerar el cuestionario final completo, en tanto GC empeoró.

En segunda instancia, se compararon (a través de la prueba de Mann-Whitney) las diferencias entre los desempeños de cada grupo en el post- test respecto al pre-test utilizando la variable Difcom. Concretamente, se encuentran diferencias significativas entre GE y GC en esta variable Difcom. La Tabla 3 dada a continuación resume estos resultados presentando la significación de las diferencias entre las variables en relación con los grupos o subgrupos mencionados. En ella se aprecia que la diferencia significativa entre ambos grupos puede asociarse a una diferencia en los rendimientos de los grupos altos, mientras que en los grupos bajos esto no ocurre.

Tabla 3: Niveles de significación para las diferencias en la variable Difcom en relación con los grupos GE y GC y sus respectivos grupos de rendimiento alto

	Difcom
GE-GC	0,049
GE-GC altos	0,019
GE-GC bajos	0,611

Se constató una evidencia en el mismo sentido con la variable Dif, que si bien no muestra diferencias significativas entre GE y GC ni entre sus subgrupos bajos, sí la registra en sus grupos altos.

Para el estudio de la transferencia a otros contextos de los aprendizajes conseguidos en Álgebra Lineal, se consideraron los desempeños de los estudiantes en dos tareas propuestas en el curso de Cálculo. Éstas trataban sobre algunos de los aspectos sobre cuya enseñanza se hizo énfasis, concretamente en trabajos de tratamiento (Tarea 1) o en la representación de generalizaciones (Tarea 2).

En la Tabla 4 se dan las medias y los niveles de significación de las diferencias de desempeño constatadas entre GE y GC.

En ellas se puede apreciar que, en ambas tareas, el desempeño de los integrantes de GE fue significativamente superior al de los de GC. Para establecer este resultado se utilizó un test de Student, considerando los resultados de cada grupo en las tareas como muestras independientes.

Tabla 4: Medias de las tareas de Cálculo y nivel de significación de las diferencias en relación con GE y GC

	Tarea 1	Tarea 2
Media de GE	1	0,75
Media de GC	0,65	0,47
Significación	0,017	0,008

La inexistencia de diferencias en el pretest entre GE y GC permite asociar las diferencias detectadas a la intervención didáctica desarrollada.

Un primer indicador, aunque débil, del éxito de la intervención es el resultado que marcó mejoras no significativas entre los desempeños de GE en los tests inicial y final, en tanto GC presentó un leve empeoramiento.

La existencia de diferencias significativas al comparar cuánto cambian GE y GC con la variable Difcom, al contrario que el anterior, es un resultado fuerte a favor de la intervención. Significa que en conjunto el grupo que recibe enseñanza intencional cambia más, y en sentido positivo, que el que sólo recibe la enseñanza tradicional.

3.1.6 ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LAS TAREAS

Cada una de las tareas propuestas a los estudiantes fue analizada por profesores de Matemática, que establecieron qué aspectos del uso de los SMS eran relevantes para obtener la solución.

Por otro lado, luego de corregidas las tareas se construyó para cada una un índice de los niveles de desempeño detectados, como forma de categorizar las soluciones y asignarles una calificación. Para cada estudiante se llevó un registro longitudinal de las calificaciones obtenidas, con la intención de registrar evidencias acerca de su evolución.

A continuación, se presentan tres de las tareas, junto con el análisis de los expertos y los niveles de desempeño. También se reseñan las recomendaciones que se hicieron a cada estudiante según el desempeño que hubiera mostrado.

3.1.6.1 TAREA 1

*Suponga que se define una operación * en el conjunto **R** de los números reales por medio de x*y=x+x.y-y, donde la suma, el producto y la resta son las habituales en **R**.*

*a) Pruebe que 0 es neutro a la derecha de esta operación, o sea, x*0=0 cualquiera sea x.*

*b) Averigüe si la propiedad conmutativa es válida para *, es decir, si x*y=y*x para cualesquiera x e y.*

*c) Halle, si existen, tres números reales a, b y c tales que (a*b)*c=a*(b*c).*

*d) Halle una condición necesaria y suficiente para x*y=y*x.*

Esta tarea plantea preguntas acerca de una ley de composición definida arbitrariamente, en términos de las operaciones usuales en el conjunto de los números reales.

Para resolverla, debe tenerse en cuenta dos conjuntos de reglas sintácticas, el de las operaciones habituales en los reales, por un lado, y por otro, la regla provista por la definición. Por lo tanto, en este problema se plantean solamente procesos de transformación en el registro algebraico, y no se requieren contenidos propios del curso de Álgebra Lineal, por lo que fue de las primeras tareas propuestas.

En este problema se identificaron los siguientes seis niveles de desempeño:

0 - No consigue aplicar la definición.

1 - Comete errores de cálculo.

2 - No extrae conclusiones de las ecuaciones que plantea, o las extrae en forma incompleta.

3 - Cree que es suficiente considerar la forma para decidir si dos expresiones son diferentes; no opera correctamente.

4 - Cree que es suficiente considerar la forma para decidir si dos expresiones son diferentes; opera correctamente.

5 - Opera correctamente y obtiene las conclusiones requeridas.

A los estudiantes del nivel 0 se les sugirió que comenzaran por tomar algunos pares de reales para efectuar con ellos la operación *, y explorar con esos ejemplos los enunciados de las partes a) y b).

A los que consiguieron el nivel 1 se los orientó para corregir sus errores y para que vieran cómo éstos afectaban sus posibilidades de completar la tarea.

A los que estuvieron en el nivel 2 se les interrogó específicamente sobre cuáles eran las conclusiones que podían extraer de los resultados que habían obtenido.

Tanto a los del nivel 3 como a los del 4 se les confrontó con ejemplos donde la forma algebraica de dos expresiones era diferente, pero ambas eran equivalentes. A los del 3, adicionalmente se les indicó cómo superar los errores cometidos.

A los del nivel 5 se les comentó que su solución alcanzaba un grado de calidad muy alto, y en algunos casos, se les sugirió explorar vías de solución diferentes de las ellos habían conseguido.

Los estudiantes que consiguieron hasta el nivel 2 parecen tener escasas competencias en el uso de los SMS, lo que hace que la enseñanza que se les planteó esté orientada a aspectos más básicos; entretanto los de los niveles a partir del 3 muestran un desarrollo que permite suponer que podrán aprovecharse de sugerencias más sutiles, como la de explorar soluciones alternativas o construir la noción de equivalencia entre expresiones.

Una constatación que pudo hacerse al considerar la sucesión de trabajos es que, en general, los estudiantes que tuvieron un desempeño bajo en estas primeras tareas no mejoraron demasiado a lo largo del curso, y consiguieron en general un promedio de calificación inferior al 0,5; en cambio, los que tuvieron buen rendimiento, consiguieron luego mantenerlo o superarlo, para obtener finalmente promedios superiores a 0,5.

Para la tarea que sigue se necesitan algunos de los contenidos que se enseñan en el curso de Álgebra Lineal (concretamente sobre álgebra matricial), por lo que fue propuesta promediando el semestre. Lo que se busca con esta tarea es estudiar el vínculo entre el uso de SMS y la capacidad para detectar un patrón y representarlo en forma general.

3.1.6.2 TAREA 2

a) Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ una matriz 2x1. Encuentre una matriz cuadrada, A, de orden 2 tal que $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$.

b) Tome ahora $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$*, una matriz 3x1. Encuentre una matriz cuadrada, B, de orden 3 tal que* $B\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

c) Plantee la situación análoga a las de las partes a) y b) para una matriz 4x1.

d) Generalice las situaciones anteriores a una matriz nx1, con n cualquiera. Explique los motivos de la elección de la notación que utilice, y trate de justificar en términos simbólicos los procesos que realice.

Esta tarea propone la construcción de una generalización a partir de casos particulares a través de la generación de una representación simbólica adecuada (introducción de subíndices); el trabajo se realiza dentro del registro algebraico y podría considerarse que consiste en la elaboración de una regla sintáctica, concretamente la que muestra que el producto de una cierta matriz por un vector tiene por resultado, invertir el orden en las coordenadas del vector.

La resolución de los tres primeras partes consiste en la construcción de una matriz. Si bien existe un procedimiento algorítmico para dar la respuesta, es bastante trabajoso aplicarlo, por lo que se espera que la respuesta sea dada apelando a algún procedimiento heurístico. La detección del patrón que resulta al observar los resultados conseguidos no parece presentar mayores dificultades. La generalización implica la introducción de un subíndice para representar un número desconocido de entradas en la matriz nx1, y en elaborar una regla sintáctica por la cual se indica cuál es el resultado del producto con la matriz que se pide hallar. Una vez hecho esto, para describir esta matriz se deberá usar un par de subíndices, indicando cuánto vale la entrada en la matriz correspondiente a cada par.

Los niveles de desempeño registrados fueron los siguientes:

0 - No consigue formular el problema.

1- No hay indicios de dónde obtiene el resultado; da notaciones simbólicas equivocadas.

2 - Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes, pero ni induce un resultado a partir de allí ni generaliza el planteo.

3 - No hay indicios de dónde obtiene el resultado de las dos primeras partes; induce una generalización y usa una notación correcta.

4 - Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes y luego induce el resultado de las restantes; no introduce subíndices.

5 - Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes y luego induce el resultado de las restantes; introduce subíndices; o plantea y resuelve un sistema para cada parte; usa notación adecuada.

A los estudiantes del nivel 0 se les detalló la solución de las partes a) y b) y se les mostró cómo podría conjeturarse cuál sería la de la parte c).

Los que integraban el nivel 1 fueron corregidos en las notaciones erradas, explicando dónde residía el error, y se les sugirió que reescribieran la solución conseguida explicitando cómo la habían conseguido y teniendo en cuenta las sugerencias sobre la notación.

A los que consiguieron el nivel 2 se les planteó la solución de la parte c) y se les dieron pautas para reconocer el patrón y escribir la generalización, en particular señalando la conveniencia de usar subíndices.

Los que lograron el nivel 3 fueron aconsejados para que expusieran cómo había resuelto las primeras partes.

A quienes llegaron al nivel 4 se le indicó cómo introducir los subíndices para representar la generalización.

A los del nivel 5 se les sugirió que exploraran el camino alternativo al que habían recorrido: si habían inducido la solución, que intentaran obtenerla formalmente a partir de la construcción de un sistema; si, en cambio, habían trabajado en base a la construcción de los sistemas se les pidió que se preguntaran cómo podían haber inducido el resultado.
Al igual que en la TAREA 1, podrían clasificarse los estudiantes en los que obtuvieron hasta el nivel 2 y en los que obtuvieron del 3 en adelante, y las consideraciones anteriores son pertinentes en este caso.
La siguiente tarea es de las últimas propuestas, debido a los contenidos matemáticos que requiere (noción de independencia lineal) que son tratados sobre el final del curso.

3.1.6.3 TAREA 3

Suponga que el subconjunto {u, v} del espacio vectorial V es LI. Para probar que el subconjunto {u, u+v} es LI se puede proceder así:

{u, u+v} es LI $\Leftrightarrow (\alpha u+\beta(u+v)=o \Rightarrow \alpha=\beta=0) \Leftrightarrow ((\alpha+\beta)u+\beta v)=o \Rightarrow \alpha=\beta=0)$

Pero como {u, v} es LI, resulta que $(\alpha+\beta).u+\beta v)=o \Rightarrow \alpha+\beta=\beta=0$ *y la única solución del sistema* $\begin{matrix} \alpha & + & \beta = & 0 \\ & & \beta = & 0 \end{matrix}$ *es* $\alpha=\beta=0$ *con lo que se prueba lo deseado.*

a) El problema análogo para tres vectores consiste en probar que si {u, v, z} es LI entonces {u, u+v, u+v+z} es LI. Adapte la solución anterior a este caso.

b) Formule y resuelva el problema correspondiente a cuatro vectores.

c) Analice los problemas anteriores y trate de detectar patrones en las soluciones que haya obtenido. Generalice la formulación y el proceso de solución del problema para una cantidad cualquiera de vectores. Explique la notación que elija para representar el problema, y sea tan detallado como crea necesario para establecer su argumento.

Para esta tarea no es posible mantenerse en el registro algebraico, sino que deben llevarse a cabo procesos de conversión, concretamente en la aplicación de la definición de independencia lineal.
El conocimiento del contenido matemático es aquí crucial para obtener la solución, lo que puede hacer más difícil reconocer el patrón para llevar adelante la generalización.
En este momento es importante hacer un comentario. El uso de los SMS no puede desvincularse del contenido matemático en el que se aplica. Es más, retomando a Duval

(1998), la construcción de adecuadas representaciones está asociada con el propio proceso de adquisición del concepto. Por esto, aunque el rol de los SMS pueda en algún aspecto ser similar en dos tareas diferentes (por ejemplo, construir una generalización), estos pueden tener que funcionar en diferente forma para conseguir la solución.

Los niveles de desempeño registrados fueron los siguientes:

0. Plantean las partes a) y b) pero no generalizan.
1. Comete errores al plantear la generalización.
2. Plantea una adecuada notación para la generalización, pero no termina de formularla.
3. Generaliza usando una notación inapropiada, sin subíndices o con subíndices para los vectores, pero no para los escalares.
4. Generaliza correctamente.

Al igual que en los casos anteriormente descritos, existe una marcada diferencia en el uso de los SMS entre quienes alcanzan los niveles hasta el 2 y los otros. Las sugerencias y comentarios efectuados a los estudiantes en este caso fueron similares a las anteriores, aunque se insistió con los de los niveles más bajos en la necesidad de revisar los contenidos matemáticos involucrados en la tarea.

Por otro lado, aunque las tareas 2 y 3 consisten en generalizaciones, la 3 registró un rendimiento menor que la 2. Esto puede tener varias explicaciones (por ejemplo, en el momento de la entrega de la tarea 3 los estudiantes estaban rindiendo las pruebas finales y eso debe haber afectado su dedicación), pero también es posible que el contenido matemático (álgebra matricial en una, independencia lineal en la otra) haya sido en parte la razón de esta disminución de rendimiento.

Al considerar como una explicación la existencia de dificultades asociadas con la definición de independencia lineal, resultó que una posible causa de estas dificultades es su estructura lógica, cuya aplicación requiere el estudio del valor de verdad de una sentencia condicional. Ésta fue una de las motivaciones para incluir estas estructuras en los siguientes estudios.

3.2 SEGUNDO ESTUDIO[27]

[27] Los resultados de este estudio conforman un artículo sometido a evaluación para su publicación.

3.2.1 PROPOSICIONES CONDICIONALES Y SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SÍMBOLOS

3.2.2 RESUMEN

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación en un curso de Cálculo de primer año en la universidad, diseñada para indagar acerca del uso que los estudiantes hacen de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) y su relación con los Sistemas Matemáticos de Símbolos en los que se presenta la información sobre estos enunciados (registro gráfico, registro algebraico). Las preguntas formuladas en esta instancia son similares a las que se deben responder en diversas actividades relacionadas con la noción de función. Se encontraron diferencias en el rendimiento de los estudiantes, que indican que las tareas sobre condición necesaria presentadas en el registro gráfico resultan significativamente más sencillas que las demás; hay indicios de un mejor rendimiento en tareas presentadas en el registro gráfico respecto de las correspondientes al algebraico y en las tareas sobre condición necesaria en relación con las respectivas sobre condición suficiente.

3.2.3 MOTIVACIONES PARA ESTA EXPERIENCIA

Además de los señalados antes, un elemento destacable que emerge del trabajo de Alcock y Simpson (2004; 2005) es la constatación de la existencia de dos clases de aprendices, aquellos que priorizan en su trabajo los aspectos de la representación algebraica, con poco o ningún apoyo en gráficas de algún tipo, y los que, en cambio, apelan principalmente a representaciones gráficas para visualizar las relaciones relevantes.

Cabe entonces preguntarse acerca de la relación entre la dificultad de una tarea matemática y el sistema de representación en el que ha sido planteada.

Por otro lado, en el discurso matemático del aula aparecen constantemente argumentos deductivos donde el reconocimiento de la relación entre dos enunciados (cuál es suficiente, necesario o suficiente y necesario para el otro) es crucial para establecer la validez del razonamiento en cuestión.

Adicionalmente, en la organización curricular de la enseñanza media superior en Uruguay el tratamiento de los temas de Cálculo diferencial tiene un sesgo hacia la adquisición de habilidades de cálculo, mientras que los cursos universitarios iniciales cambian el foco a aspectos conceptuales, donde las nociones de demostración y de rigor juegan un papel principal.

Por estos motivos, se eligió indagar acerca del uso de los estudiantes de las nociones de condición necesaria o condición suficiente en formulaciones condicionales, presentadas o bien en el registro algebraico o bien en el gráfico, en situaciones como las que deben abordar en tareas que se refieren a la definición de límite de una función en un punto.

Más específicamente, se decidió responder a las siguientes cuestiones:

1) ¿Qué uso de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) muestran ingresantes a la universidad?

2) ¿Qué registro de representación, gráfico o algebraico, presenta mayor dificultad en tareas con enunciados condicionales?

El marco conceptual para responder a estas preguntas está constituido, por un lado, por los aspectos ya destacados en la relación entre los SMS y la actividad matemática, y, por otro, con las nociones de condicional proporcionadas por la Lógica.

A continuación, se describe esta experiencia.

3.2.4 DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

3.2.4.1 PARTICIPANTES

Los participantes en esta experiencia fueron cuarenta estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería de la Universidad Católica del Uruguay (UCU), que asistían al primer curso de Cálculo.

Se eligió esta muestra teniendo en cuenta que el estudio de Cálculo puede considerarse el punto de partida para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

3.2.4.2 INTRUMENTOS

Para esta experiencia se prepararon dos cuestionarios de ocho ítems con 4 alternativas de respuesta cada uno.

Ambos cuestionarios fueron elaborados de manera que cuatro de las preguntas están formuladas como condición suficiente y las otras cuatro en modo de condición necesaria. En el llamado Cuestionario Gráfico (CG) las preguntas se referían a una función presentada a través de su gráfica cartesiana, de la que no se daba la fórmula algebraica. En el llamado Cuestionario Algebraico (CA) los ítems interrogaban acerca de una función presentada a través de su ecuación algebraica de la que no se daba la gráfica.

Los enunciados que se referían a cada condición usaban formatos diferentes, que se describen a continuación:

a) para la condición suficiente se usaron "para que ocurra Q es suficiente que P", "P alcanza para Q", "si P entonces Q", "cuando ocurre P resulta Q".

b) para la condición necesaria se usaron "para que sea P debe ser Q", "Q es necesaria para P", "sólo si Q resulta P", "para estar seguro de que sea Q, debe ser P".

Con el fin de garantizar que las preguntas estaban formuladas siguiendo las condiciones propuestas, dos profesores universitarios de Matemática clasificaron cada ítem según fuese de condición necesaria o suficiente.

Las alternativas de respuestas incorrectas fueron elegidas a partir de observaciones informales de situaciones de clase, en las que, a partir del uso del lenguaje oral de los estudiantes, se detectaron formas de interpretar la estructura condicional que no eran las correctas.

Otra de las opciones incorrecta de respuesta incluía simplemente desconocimiento de los contenidos matemáticos.

Estos cuestionarios fueron aplicados en la tercera semana del curso, en dos clases consecutivas, de sesenta minutos de duración cada una, antes del comienzo del tratamiento del tema de límite de una función en un punto, buscando con esta separación temporal evitar que se favoreciera la posibilidad de que los estudiantes los vincularan y por eso, se vieran eventualmente inducidos a llevar a cabo operaciones de conversión. Se indicó a los estudiantes que la relevancia de la tarea consistía en su relación con tema a seguir, el de límite, dado que les anticipaba algunos de las cuestiones que deberían resolver.

La fiabilidad del cuestionario se estudió con un Alfa de Cronbach. Se obtuvo un coeficiente 0,59. El análisis también muestra que todos los ítems se comportan de manera similar. El máximo aumento en el coeficiente (de 0,03) se obtiene suprimiendo el ítem 1 del Cuestionario Algebraico (Anexo 1). La consistencia interna de los instrumentos fue aceptable teniendo en cuenta que se trataba de pruebas de 8 preguntas.

3.2.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En esta experiencia se consideraron dos variables independientes y una variable dependiente.

La primera variable independiente se refiere a los SMS y los valores que toma son registro gráfico y registro algebraico, dado que cada una de las preguntas del cuestionario está formulada en uno de esto registros.

La segunda variable independiente es la estructura lógica y toma los valores condición necesaria y condición suficiente, dado que, al igual que con la variable anterior, cada pregunta del cuestionario está redactada de manera que plantea una de estas dos condiciones.

El rendimiento es la variable dependiente, medida a partir del número de respuestas correctas en cada cuestionario.

Se tiene entonces un diseño factorial intrasujeto 2x2, con una variable dependiente, que es el promedio del número de respuestas correctas.

La Tabla 5 muestra los resultados registrados en el rendimiento, en relación con las variables independientes. En cada casilla se indica el número máximo de respuestas correctas (4 o 8 según el caso)

Tabla 5: Rendimiento por tipo de condición y tipo de registro

	Registro gráfico	Registro algebraico	Total de condición
Condición necesaria	3,2 (4)	2,57 (4)	5,77 (8)
Condición suficiente	2,28 (4)	2,03 (4)	4,31 (8)
Total de registro	5,48 (8)	4,6 (8)	

Se analizaron estos datos con diferentes tipos de contrastes estadísticos, para indagar acerca de eventuales diferencias en el rendimiento en relación con las variables independientes.

Uno de ellos fue un ANOVA de medidas repetidas intrasujeto (SMS y estructura lógica, son los mismos estudiantes los que responden a todas las cuestiones) y sus interacciones. Resultó que el rendimiento en la combinación condición necesaria-registro gráfico es significativamente mayor que en cualquiera de las otras tres combinaciones (F15.1, nivel de confianza de 99%). Las diferencias entre las otras combinaciones no resultaron significativas.

Otro de los contrastes fue el uso del test T de Student para muestras relacionadas, que mostró, en ambos casos, que las diferencias son significativas (nivel de confianza de 99%), a favor, respectivamente, del registro gráfico y de la condición necesaria.

En efecto, los estudiantes respondieron correctamente el 58% de las preguntas sobre condición necesaria, mientras que el porcentaje de respuestas correctas sobre condición suficiente fue del 43%. Similarmente, se constató un porcentaje de 55% de respuestas correctas en el registro gráfico, y en el algebraico este porcentaje fue del 46%.

Estos mismos datos fueron analizados utilizando una prueba de los rangos con signos de Wilcoxon, y se obtuvieron los mismos resultados, es decir, existen diferencias significativas entre los rendimientos de los estudiantes cuando:

1) la tarea se presenta en un registro gráfico, resulta más fácil reconocer la estructura de condición necesaria que la de condición suficiente;

2) se compara globalmente el uso de las estructuras de condición necesaria y condición suficiente, resulta más fácil la primera que la segunda;

3) se compara globalmente el rendimiento, en el registro gráfico resulta mayor que en el algebraico.

Corresponde observar que los distractores elaborados para detectar errores sobre contenidos matemáticos tuvieron una muy baja frecuencia, lo que permite asociar los errores detectados con el uso del condicional.

3.2.6 ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ALGUNOS DE LOS ÍTEMS

En 6.1.2 ANEXO II figuran los cuestionarios algebraico y gráfico, respectivamente. A continuación, se presentan algunos de los ítems y su análisis didáctico.

Las preguntas del formulario algebraico se refieren a la función f dada por cualquiera las fórmulas siguientes $f(x) = x^3-3x+2 = (x+2)(x-1)^2$. En la presentación del cuestionario se incluyeron las dos fórmulas para simplificar el trabajo algebraico necesario para responder alguna de las preguntas.

Las dos preguntas que se presentan resultaron difíciles, registrando un porcentaje del 45% de respuesta correctas.

3.2.6.1 PREGUNTA 7 DEL CUESTIONARIO ALGEBRAICO

La afirmación "Para que f(x) sea positivo es suficiente que x sea positivo y distinto de 1":

a) es falsa porque f(-1) es positivo y -1 no es positivo.

b) es falsa porque f(x) es positivo para x mayor que -2 y distinto de 1.

c) es cierta porque, por ejemplo, 2 es positivo y f(2) es positivo.

d) es cierta porque si x es positivo y distinto de 1 resulta f(x)>0.

En esta pregunta, es explícita la condición de suficiente que se da a un enunciado (x es positivo y distinto de 1) respecto al otro (para que f(x) sea positivo). Sin embargo, el orden en el que se presentan estos enunciados no es el más frecuentemente utilizado.

La respuesta correcta es la d). Quienes contesten las opciones a) o b), posiblemente estén confundiendo la condición considerándola necesaria (verosímilmente, debido al orden de los enunciados). Los que elijan la opción c) cometen el error lógico de pretender establecer la validez de un enunciado a partir de la verificación de casos particulares.

3.2.6.2 PREGUNTA 8 DEL CUESTIONARIO ALGEBRAICO

Para estar seguro de que x está entre 0 al menos y 2 a lo sumo:

a) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que si f(x) menor que 0 implica x menor que -2 y f(x) mayor que 4 implica x mayor que 2.

b) f(x) debe estar entre 0 y 1, ya que f(0)=2 y f(1)=0, ya que f es monótona decreciente entre 0 y 1.

c) f(x) debe ser menor que 4 porque f(x) es mayor que 4 si x es mayor que 2.

d) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que f(0)=2 y f(2)=4.

A diferencia de la anterior, la condición necesaria a la que refiere esta pregunta está implícita en el verbo "deber" utilizado. La respuesta correcta es la opción a). Quienes contestan la opción b) podrían estar considerando la condición como suficiente. En caso de marcar la opción c) posiblemente se esté cometiendo un error lógico al negar una conjunción. Finalmente, asumir la monotonía de la función en el intervalo entre 0 y 2 (lo que es erróneo) puede explicar la elección.

Las preguntas del cuestionario gráfico se refieren a la siguiente gráfica.

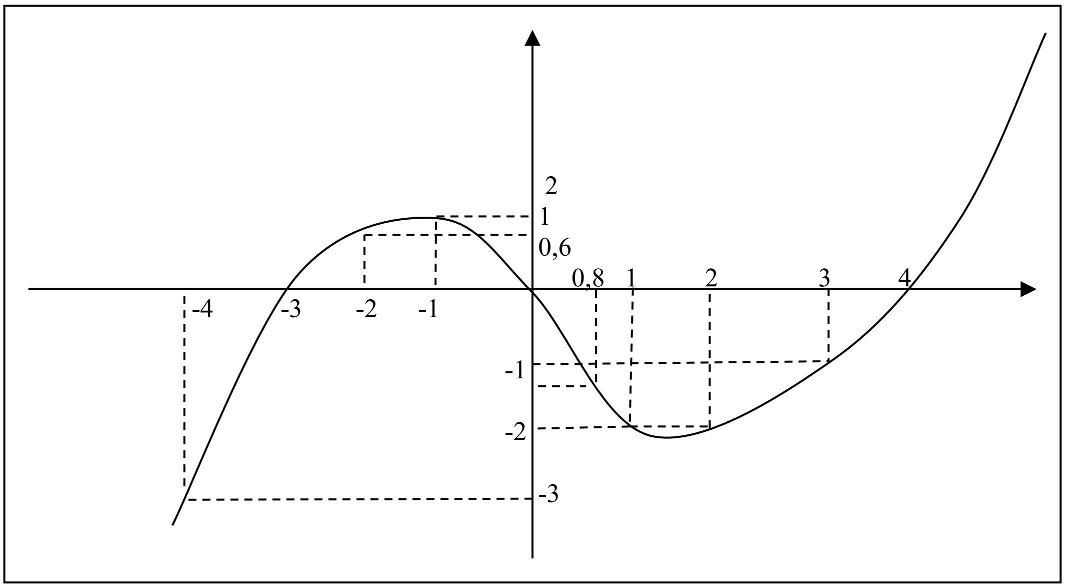

Figura 3: Gráfica para el cuestionario gráfico del segundo estudio

3.2.6.3 PREGUNTA 1 DEL CUESTIONARIO GRÁFICO

Es suficiente que x entre -2 y 3 para que f(x) esté:

a) entre -1 y 1.

b) entre -3 y 2.

c) entre -2 y 1 .

d) entre -1 y 0,6.

Al igual que la pregunta 7 del cuestionario algebraico, se explicita el tipo de condición en el enunciado que se analiza. La diferencia entre estas dos preguntas está dada por la elección de los distractores. En las tres opciones incorrectas (a, c y d) los errores que explican que puedan ser elegidas están relacionadas con el contenido matemático involucrado (asumir monotonía de la función o hallar equivocadamente un valor).

3.2.6.4 PREGUNTA 5 DEL CUESTIONARIO GRÁFICO

Para que f(x) esté entre 0 y 1, x debe estar

a) entre -3 y 0 o entre 4 y un número α (que es mayor que 4 y no se puede determinar a partir de la información de la gráfica) donde la función toma el valor 1.

b) entre -3 y -1.

c) entre -1 y 0.

d) entre 0 y 1.

La estructura de esta pregunta es similar a la 8 del cuestionario algebraico. En efecto, la condición de necesaria se expresa a través del uso del verbo deber; además, las opciones b) y c) podrían ser contestadas por quienes confundan la condición con suficiente, mientras que la d) sería elegida por quienes confundan los roles de las variables independiente y dependiente. La opción correcta es la a).

3.3 TERCER ESTUDIO[28]

[28] Los resultados de este trabajo integran un artículo aceptado para su publicación en el número 62 de BOLEMA con el título: ¿Qué Estructuras Deductivas Usan Alumnos Ingresantes a la Universidad?

3.3.1 ESTRUCTURAS DEDUCTIVAS Y SU USO POR INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

3.3.2 RESUMEN

En este trabajo se presentan resultados de una indagación a la que concurren dos estudios. Uno, de caso, inquirió el efecto que tienen cursos universitarios iniciales de Matemática para adquirir conocimientos que faciliten la comprensión y el uso de estructuras deductivas de uso frecuente en razonamientos y argumentaciones. El otro, descriptivo, efectúa un análisis de libros de texto usuales en busca de evidencia acerca del grado de explicitación de estas estructuras en las prácticas de enseñanza. Entre los resultados observados destacan que la sola participación en cursos de Matemática, sin mediar una enseñanza intencional, no parece suficiente para adquirir habilidades en esta área, y que pocas evidencias muestran que desde la enseñanza se preste atención a la instrucción en temas de Lógica, excepto en asignaturas o textos específicos.

3.3.3 MOTIVACIÓN Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Los procesos de argumentación, deducción y comunicación se encuentran en la confluencia de dos áreas, Lengua y Matemática.

Muchas de las demostraciones que se realizan en la enseñanza de Matemática se sustentan casi exclusivamente en el lenguaje, aun cuando intervengan gráficas, diagramas, tablas u otras representaciones.

Las formas deductivas, si bien responden a una estructura lógica formal, se presentan en clase a través de expresiones como “condición necesaria”, “condición suficiente”, “tener que”, “alcanzar con”, “implicar”, “ser consecuencia de”, entre otras.

Por eso, es relevante preguntarse qué conocimientos presentan los ingresantes acerca del conectivo condicional (que da soporte a estas formas deductivas), y si estos conocimientos son modificados como consecuencia de sus primeros cursos en el área de Matemática.

En relación con este segundo punto interesó indagar si, en caso de constatarse cambios, éstos eran independientes del curso en el que el estudiante hubiera participado. En particular, si un curso que incorpora la enseñanza explícita de temas de Lógica como parte de sus contenidos, se diferencia de otros, como el de Cálculo Diferencial, en este aspecto.

El estudio se organizó en dos partes complementarias, un estudio documental y otro empírico, que se describen sucesivamente a continuación.

3.3.4 ESTUDIO DOCUMENTAL: REGISTROS DE CLASE Y TEXTOS

Se seleccionaron dos fuentes documentales: apuntes de estudiantes (registrados en sus cursos de Matemática previos a la universidad) y textos de Cálculo o de Lógica de uso habitual en cursos universitarios.

En ambos casos, la revisión prestó atención a identificar las instancias en las que se efectuaban demostraciones o inferencias, en busca de indicaciones que explicitaran las estructuras deductivas utilizadas y de eventuales errores en uso de ellas.

Tanto en el caso de los apuntes de estudiantes como en el de los textos de Cálculo, se eligió observar el tratamiento del tema de la definición y teoremas acerca del límite de una función en un punto, por la estructura lógica que lo configura.

3.3.4.1 ANÁLISIS DE APUNTES DE ESTUDIANTES

El análisis de los apuntes registrados por los estudiantes en sus clases, aunque con gran desarrollo en otras áreas, no ofrece muchos antecedentes para inferir acerca de la enseñanza de Matemática (Arce Sánchez, Conejo Garrote, y Ortega del Rincón, 2016). Ellos constatan en su investigación la coexistencia de diversos estilos de toma de notas de clase, en un contexto donde los profesores suelen mostrar un estilo magistral de enseñanza.

En esta sección se revisan los apuntes de clase tomados en un curso de Cálculo de bachillerato por cuatro estudiantes, elegidos entre quienes participaron en los cursos de este estudio y tuvieron buenos resultados académicos en ellos.

En general, los apuntes muestran poca evidencia de tratamiento de estos temas. Sin embargo, puede ser que los profesores llamen la atención sobre ellos pero que los estudiantes no vean estos asuntos como relevantes y, por tanto, no los anoten.

En los registros del estudiante 1 se encuentra una transcripción precisa de la definición de límite, que usa luego en la demostración de diferentes teoremas acerca de límites.

Dado que en la mayoría de estos teoremas el resultado se establece a partir de la prueba de que una cierta desigualdad se satisface en un cierto dominio para la variable, sus argumentaciones no plantean formas deductivas, sino más bien el proceso por el cual las hipótesis se insertan en la desigualdad a verificar.

Sin embargo, sí se nota preocupación por explicitar el rol que juegan los cuantificadores, en particular, para enfatizar que dadas dos condiciones, que se satisfacen en respectivos entornos de un cierto punto, entonces la conjunción de ambas se satisface para los elementos del entorno de radio más pequeño, porque este conjunto está contenido en el otro.

El estudiante 2 presenta en sus apuntes un elemento destacable: en sus registros alude varias veces al recíproco de un teorema, tanto al referirse al tema de límites como en otros, sobre todo en los casos en que éste era falso. En esto se reconoce la intención de contribuir a que los estudiantes construyan una idea del condicional en la que se distingan como diferentes los roles del antecedente y del consecuente y, por lo tanto, la diferencia entre condición necesaria y condición suficiente.

Posiblemente, se pretenda así evitar que los estudiantes incurran en la llamada falacia abductiva en la que el condicional es mirado como si en realidad fuera un bicondicional. Tal como la refiere Crespo (2007), en esta forma de razonamiento (incorrecta desde el punto de vista de la Lógica) se concluye la premisa a partir del condicional y de la conclusión, es decir, de (A) → (B) y B se obtiene A, donde A y B son fbf.

Las notas de clase de los estudiantes 3 y 4 no recogen referencias a estructuras deductivas; consisten principalmente en un conjunto de reglas de cálculo, enunciadas sin demostración alguna y utilizadas para resolver ejercicios. Puede encontrarse en ellos una detallada exposición de los cálculos realizados, pero en muchos casos no se encuentran comentarios que justifiquen la aplicación de las reglas a través de la verificación del cumplimiento de las hipótesis.

3.3.4.2 ANÁLISIS DE TEXTOS

Para el caso de Cálculo se revisaron Edwards y Penney (2008) y Stewart (1999). En ambos, la revisión prestó especial atención (aunque no exclusiva) al tratamiento de la definición de límite, dada su estructuración conceptual deductiva.

El texto de Edwards y Penney (2008) tiene una organización que incluye al final de cada sección una lista de ejercicios, un cuestionario de ítems falso-verdadero y una lista de preguntas sobre elementos conceptuales. No manifiesta de manera expresa la preocupación por resaltar las estructuras lógicas utilizadas, pero en algunas de estas listas o cuestionarios aparecen tareas en las que puede reconocerse la intención de proponer actividades en esta dirección, como se destaca a continuación.

Al tratar la idea de límite, en la sección 2.2, comienza por expresar la noción en forma coloquial, enuncia ciertos teoremas que se refieren a cálculo de límites (a los que llama leyes, entre las que se cuentan una versión del teorema de límites para funciones compuestas) y más adelante, en la sección 2.3, presenta la definición formal, reservando a un anexo, el D, las demostraciones de algunos teoremas.

En una de las preguntas conceptuales al final de la sección 2.2 propone la construcción de un ejemplo de un par de funciones tales que

$\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim_{x \to b} g(x) = c$ pero $\lim_{x \to a} g(f(x)) \neq g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$

y pide comentar por qué este resultado no contradice el teorema enunciado sobre límites de funciones compuestas, que establecía que:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim_{x \to b} g(x) = c$ entonces $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$

Los autores parecen querer hacer notar que la ausencia de contradicción deriva de que, excepto una, todas las hipótesis del teorema de límites para funciones compuestas son satisfechas en el ejemplo que se pide construir, mientras que no se satisface lo enunciado en la tesis. Es importante que los estudiantes reconozcan que la aplicación de un teorema a un caso concreto de cálculo depende de que todas las hipótesis del teorema se verifiquen en la situación en estudio, para poder afirmar que ocurre lo asegurado en la tesis.

Sin embargo, al no complementar el ejercicio pidiendo proponer la construcción de un ejemplo en el que no se satisfaga alguna de las hipótesis y, aun así, se cumpla lo enunciado en la tesis, podría favorecerse en los estudiantes la idea de que las hipótesis no son sólo una condición suficiente sino también necesaria, incurriendo en una falacia abductiva.

Continuando con el análisis del tratamiento de la definición de límite en el texto de Edwards y Penney (2008), en la sección 2.3 da la definición formal en términos de ε-δ: "… el número L es el **límite de** *f(x)* **cuando** *x* **tiende a** *a* y se puede escribir

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

considerando que se satisface el siguiente criterio: dado cualquier ε > 0 exista un número correspondiente δ> 0 tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para toda x tal que $0 < |x-a| < \delta$ **(20)**" (Edwards y Penney, 2008, pág. 85)[29]

En esta instancia, se nota la preocupación por explicitar que la sentencia

[29]Negrita y cursiva en el original.

"$\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$ para toda x tal que $0 < \mid x-a \mid < \delta$ " expresa un condicional, que puede traducirse por "si $0 < \mid x-a \mid < \delta$ entonces $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$" o bien por "$0 < \mid x-a \mid < \delta$ implica que $\mid f(x) - L \mid < \varepsilon$".

Posteriormente, se muestra un especial cuidado por aclarar que en todos los casos debe encontrarse un valor positivo para δ, una vez se haya tomado uno para ε. Con esto se atiende a la necesidad de destacar las instancias de cuantificación presentes en la definición (una, la de ε, universal y la otra, la de δ, existencial).

Sin embargo, no se procede igual en las dos últimas formas de expresar la sentencia **(20)**, en las que no hay mención alguna al hecho de que para cualquier valor de x debe satisfacerse el condicional.

El texto de Stewart (1999) no tiene alusiones explícitas a las formas deductivas que utiliza. En particular, al abordar la definición de límite, en la sección 2.2, se inclina por una informal, expresada en lenguaje coloquial y basada en la noción de distancia entre números reales. En la sección 2.3 enumera una lista de teoremas sobre cálculo de límites, comenta que todas ellos pueden demostrarse formalmente y muestra en ejemplos cómo podrían utilizarse para hallar límites.

Reserva la formalidad al apéndice D, en el que da la definición habitual en términos de ε y δ. Usa esta definición para demostrar que una cierta función tiene límite y en el siguiente apéndice, el E, prueba el teorema sobre límite de la suma, en medio de demostraciones sobre varios tópicos.

En los ejemplos en los que se muestra el uso de las leyes de los límites para calcular, se nota la preocupación por hacer evidente que es necesario verificar las hipótesis para poder obtener la conclusión. Sin embargo, en las dos ocasiones en las que esto no ocurre, la conclusión que se brinda al estudiante es que el pretendido límite no existe. Esta es la misma situación referida anteriormente en relación con el texto de Edwards y Penney.

Cuando aborda la definición formal, casi no hay referencia a las instancias de cuantificación ni a la estructura condicional presentes en ella.

En suma, en los dos textos revisados no hay señalamientos explícitos a las estructuras lógicas utilizadas en las diferentes argumentaciones, y en algún caso, algunos ejemplos podrían incluso inducir a la asunción de estructuras deductivas incorrectas.

Para estudiar el tratamiento de estos temas en el curso de Lógica, se seleccionaron dos textos, el de Grimaldi (1997) y el de Rosen (2004).

Grimaldi (1997) titula el segundo capítulo "Fundamentos de Lógica" y en él comienza por la construcción de fórmulas (sin dar una definición rigurosa de fórmulas bien formadas) y presentando las tablas de verdad. A continuación, presenta la noción de tautología y basa en ella la de equivalencia lógica.

A partir de la tercera sección aborda la implicación lógica y las reglas de inferencia. Su definición se establece a partir de que una cierta sentencia condicional resulta ser una tautología.

En efecto, llama argumento válido a una sentencia $(p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n)\rightarrow q$ que sea una tautología. Amplía esta definición diciendo que p implica lógicamente a q (siendo p y q fórmulas cualesquiera), cuando $p\rightarrow q$ es una tautología, y usa para representar esta situación la notación, $p\Rightarrow q$.

Una vez establecidas las reglas de inferencia, las usa para proveer ejemplos de pruebas construidas a partir de conjuntos de premisas, con lo que cierra el tratamiento del cálculo proposicional.

Inicia el estudio del cálculo de predicados a partir de la descripción de la necesidad de introducir cuantificadores para ampliar el alcance del cálculo proposicional. Llama proposiciones abiertas a aquellas sentencias en las que se puede reconocer la presencia de variables individuales, y explica de qué forma se ven afectadas mediante la introducción de un cuantificador. A partir de aquí sigue un camino similar al recorrido antes: aborda la noción de valor de verdad de una proposición abierta, plantea la noción de equivalencia entre proposiciones, presenta las reglas de inferencia (extendiendo las vistas para el cálculo proposicional para considerar las nuevas que aparecen al trabajar con cuantificadores) y cierra el capítulo con la construcción de pruebas a partir de premisas.

En todo el desarrollo se percibe una inclinación a acercar el uso del lenguaje natural al específicamente lógico, mediante la traducción de argumentaciones coloquiales a la exactitud de fórmulas para representarlas, y por advertir acerca de prácticas usuales que implican riesgos de error en su uso.

Vale la pena destacar un comentario en el que Grimaldi alerta acerca de la confusión en el uso del condicional y del bicondicional, que ya se ha mencionado. Atribuye esa confusión al hecho de que en el uso del idioma frecuentemente se utilizan condicionales para describir situaciones que por su propia naturaleza constituyen casos en los que se da una equivalencia.

Más adelante plantea la situación simétrica de ésta, al enfatizar que las definiciones en Matemática son la expresión de una equivalencia y, por tanto, deberían ser formuladas como un bicondicional, cosa que habitualmente no ocurre en los libros de texto, en los que se recurre a una formulación condicional para estas cuestiones.

A eso se agrega la preocupación por mostrar ejemplos de aplicación en otras áreas de Matemática, donde se pueden resaltar dos ejemplos.

El primero refiere específicamente a la definición de límite, destacando la presencia de los cuantificadores en el proceso de escribir la negación de que una cierta función tenga un cierto límite en un punto.

El segundo presenta el enunciado de la propiedad asociativa de una ley de composición interna, comentando que su formulación precisa requiere el uso de cuantificadores, y que este hecho es frecuentemente olvidado en el tratamiento de esta propiedad en los textos, lo que debería ser advertido por los profesores a los estudiantes, para ayudarles a reconocer instancias en las que en forma oculta se están usando cuantificadores.

Así, en la exposición de Grimaldi (1997) se reconoce el propósito de explicitar diferentes aspectos del uso de sentencias condicionales (distinción entre un enunciado condicional y una equivalencia, diferenciación de los roles del antecedente y del consecuente, papel de los cuantificadores), además de resaltar los procesos de traducción entre el lenguaje natural y el formal, y la forma en que los conceptos estudiados aparecen tratados en libros de otras ramas de Matemática.

El texto de Rosen (2004) propone en su primer capítulo el estudio de Lógica, y en particular, de la demostración (junto con el de conjuntos y funciones). Elige la misma aproximación que el de Grimaldi (1997) llamando proposiciones a cualquier sentencia susceptible de ser clasificable como cierta o falsa. Introduce los conectivos lógicos y las tablas de verdad, para a partir de allí presentar las nociones de tautología y de equivalencia. Hace menciones concretas a las formas de traducir entre el lenguaje natural y el formal, tanto aquí como en Cálculo de Predicados, que desarrolla con la presentación de los cuantificadores, y avanza mostrando cómo construir fórmulas complejas y calcular sus valores de verdad.

Sobre esta base dedica una sección a los procesos de demostración, a partir de la introducción de reglas de inferencia (que se presentan a través de tautologías cuyo conectivo principal es un condicional), tanto para el Cálculo Proposicional como para el de Predicados.

En todo este proceso se distinguen instancias en las que se busca aproximar el uso de los elementos desarrollados en otras áreas, tanto en Matemática (la definición de límite se presenta como ejemplo de fórmula con cuantificadores anidados) como en Ciencias de la Computación.

En general, el desarrollo de Rosen (2004) es menos profundo que el de Grimaldi (1997). En particular, no se encuentran advertencias acerca de errores o inexactitudes en los tratamientos cotidianos del condicional o de otros conectivos, ni tampoco alusiones al uso dado en otros textos de Matemática a estos instrumentos.

3.3.5 ESTUDIO EMPÍRICO: CÁLCULO Y MATEMÁTICA DISCRETA

Como ya se ha comentado, uno de los propósitos de este estudio era indagar en los conocimientos que tenían los ingresantes acerca del conectivo condicional y cómo se modifican en los primeros cursos del área de Matemática. Además, se quería averiguar si estos posibles cambios en la formación universitaria eran mayores en los cursos que incorporaban la enseñanza explícita de temas de Lógica como parte de sus contenidos.

3.3.5.1 DISEÑO Y APLICACIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN

Se decidió trabajar con estudiantes ingresantes a carreras de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías (FIT) de la UCU; en Informática (en adelante grupo I) fueron los 13 integrantes que completaron todas las instancias (12 de ellos hombres), por un lado, y por otro, en Electrónica, Telecomunicaciones, Industrial o Alimentos (grupo O) con 20 integrantes finales (14 de ellos hombres).

Se procedió así pues la carrera en Informática era la única de la FIT que tenía en su currículo un curso de Matemática Discreta en el primer semestre, y a diferencia de las restantes, no tenía curso de Cálculo Diferencial en ese período. Esta separación permitía contar con dos grupos de estudiantes con la característica de que ningún alumno estaba en ambos, uno de los cuales (grupo I) recibiría enseñanza específica en temas de Lógica, incluyendo Cálculo Proposicional y Reglas de Inferencia, mientras que el otro (grupo O) tendría una aproximación a estos asuntos a partir de su uso en demostraciones o razonamientos deductivos propios de la estructuración conceptual del Cálculo

Diferencial. Ambos cursos se desarrollaron en el turno vespertino, con clases entre las 18:00 y las 22:00 horas.

Las dos asignaturas correspondían al mismo semestre de la respectiva carrera (el primero) y tenían la misma carga horaria semanal de cuatro módulos de 80 minutos, que se ofrecían en dos días de la semana en bloques de dos módulos separados por un recreo de 10 minutos.

El diseño fue cuasi-experimental pre-post con una variable independiente de grupo con dos modalidades (curso de Informática y de Electrónica) y como variable dependiente de test inicial – test final una prueba de análisis de conocimientos matemáticos.

El test inicial se usó con dos fines: para tener un indicador del grado de conocimiento de los ingresantes sobre inferencia y sentencias condicionales; y, para establecer una comparación inicial inter grupos, I-O.

El test final se usó también para dos propósitos: para comparar estos grupos, I-O al final del semestre; y, para comparar cada grupo consigo mismo y detectar eventuales diferencias de desempeño entre el comienzo y el final del semestre.

La composición del test inicial se realizó de la siguiente manera.

Todos los estudiantes ingresantes a la FIT participan de una prueba diagnóstica al ingreso, compuesta por ítems de múltiple opción con cuatro distractores.

Para esta ocasión se incluyeron en este cuestionario seis ítems sobre temas de inferencia y formas deductivas. Se comentan algunos en el análisis de los resultados.

Cuatro de estos ítems presentaron de modo coloquial argumentos sobre cuestiones cotidianas (Stylianides, Stylianides, & Philippou, 2004). Los otros dos interrogaron acerca de contenidos matemáticos (divisibilidad, imágenes y preimágenes de funciones). En forma deliberada, en algunos de ellos la respuesta correcta dependió de reconocer que una sentencia condicional es cierta cuando el antecedente es falso.

Se asignó a cada estudiante la calificación dada por el promedio de respuestas correctas en estos seis ítems. El conjunto de estas calificaciones constituye el indicador inicial.

El test final se construyó de una manera más compleja. Teniendo en cuenta las características de cada curso, se elaboraron preguntas a ser incluidas en las respectivas instancias de evaluación, sobre contenidos propios de cada uno.

Esta decisión obligó a tener en consideración dos cuestiones: la de la semejanza de estas preguntas con las del test inicial, por un lado, y por otro, la semejanza entre sí de los dos cuestionarios finales.

En este contexto, semejanza debe entenderse en el sentido de que las estructuras deductivas presentes en cada caso fueran las mismas, aun cuando estuvieran aplicadas a contenidos diferentes.

En cualquiera de los casos, se utilizó el procedimiento de revisión por pares. Tres profesores eligieron estos ítems de un conjunto elaborado para esta instancia, con el criterio de que hubiera unanimidad en cuanto a su semejanza.

En el caso del grupo I, tres de los ítems del test inicial se repitieron en el final, dado que su estructura permitía incluirlos en el curso de Matemática Discreta; en cambio, sólo uno de los del test inicial pudo ser usado en el final del grupo O, porque era el único que trataba sobre contenidos de Cálculo.

Las preguntas del test final fueron formuladas en las instancias de evaluación de los respectivos cursos. Esta decisión se tomó para minimizar la interferencia en el desarrollo de los cursos y para mantener el desarrollo habitual de la enseñanza en cada curso.

Estos cuestionarios se presentan en 6.1.3.ANEXO III.

Para estudiar eventuales diferencias entre los grupos, tanto entre ambos (en el test inicial o el final) como respecto a sí mismos (entre test inicial y final) se usaron tests t de Student, para muestras independientes, en el primer caso, y relacionadas en el segundo, y complementariamente, las pruebas no paramétricas U de Mann-Whitney (para muestras independientes) y Wilcoxon (para relacionadas).

3.3.6 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Además de constituir una necesidad metodológica, establecer las condiciones iniciales de los dos grupos respondía a otra cuestión adicional.

Las pruebas de diagnóstico al ingreso en la FIT se vienen proponiendo hace años, y en los últimos se detecta una tendencia que marca diferencias significativas en los desempeños de los estudiantes desagregados por carrera, siendo los de Informática los que obtienen el menor.

Interesó saber si esta situación se repetía al considerar sólo los ítems que formaban parte del test inicial. Como muestra la Tabla 6, éste fue el caso.

Tabla 6: Comparación de medias iniciales y nivel de significación

Grupo	Media	Desviación típica	t de Student	U de Mann-Whitney
I	0,36	0,18941	0,008	0,005
O	0,57	0,21171		

Este dato debe tenerse en consideración al vincular los resultados del pretest con los del postest. La diferencia se compensa, y el grupo de Matemática Discreta presenta una media mayor. La Tabla 7 compara los desempeños finales de los estudiantes en las dos materias, muestra que las diferencias no son significativas, lo que marca una equiparación al terminar los cursos.

Tabla 7: Comparación de medias finales y nivel de significación

Grupo	Media	Desviación típica	t de Student	U de Mann-Whitney
I	0,58	0,16315	0,12	0,09
O	0,44	0,27409		

Este primer resultado permite plantear que la enseñanza intencional en temas de Lógica que recibieron los estudiantes del grupo de Matemática Discreta fue suficiente para que mejoraran su desempeño y equipararan, al menos, al del grupo de Cálculo.

Esta interpretación se ve reforzada cuando se comparan los grupos en relación a sí mismos, como muestra la Tabla 8. En ella se evidencia una mejora muy significativa en el desempeño del grupo de Matemática Discreta y una estabilidad en el de Cálculo.

Tabla 8: Comparación de medias inicial y final y niveles de significación

Grupo	Media inicial	Desviación típica	Media final	Desviación típica	t de Student	Wilcoxon
I	0,36	0,18941	0,58	0,16315	0,007	0,01
O	0,57	0,21171	0,44	0,27409	0,69	0,93

Otros resultados se dan a continuación, basados en la consideración de los ítems presentados en la sección que sigue.

En el caso del ítem que integró tanto el pretest como el postest del grupo I (referido como ítem 1 de la tabla 4), el porcentaje de respuestas correctas pasó de 0,14[30] a 0,64. Esta notable mejora informa que el número de estudiantes que respondieron correctamente al

[30] El resultado de 0,20 que figura en la Tabla 4 para este ítem incluye a todos los estudiantes y no sólo a los de Informática.

finalizar el curso más que cuadruplicó el de los que lo hicieron al comienzo, y es un fuerte apoyo a la explicación dada.

El otro ítem referido al curso de Matemática Discreta (propuesto en el examen de la asignatura), si bien registró valores más bajos de respuestas correctas que el anterior (0,54 y 0,46, respectivamente, para las partes b) y d)) también supera a los resultados del pretest en los ítems semejantes a éste.

En cambio, cuando se revisan los resultados del ítem referido al curso de Cálculo, los registros son más bajos.

Para el ítem analizado antes, que también formó parte del cuestionario final de este curso (que figura como ítem 4 en la tabla 1), se registraron resultados similares en las dos instancias, 0,28 y 0,27 respectivamente. Pero un dato interesante es que el error más frecuente es señalar como correcta a c): el distractor que presentaba una sentencia correcta por ser falso el antecedente. Esta recibe más aceptación que la respuesta correcta, 0,31 y 0,35 en los test inicial y final respectivamente.

Los resultados presentados en esta sección avalan la validez de los supuestos de este estudio, mostrando que la enseñanza explícita de estructuras deductivas está asociada con una mejora en el uso de las mismas en la actividad matemática.

3.3.7 ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ALGUNOS DE LOS ÍTEMS

La Tabla 9 presenta los porcentajes de respuestas correctas registrados en cada uno de los ítems usados en la prueba de diagnóstico.

Tabla 9: Porcentaje de respuestas correctas registrados en los ítems del test inicial

Ítem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Porcentaje	0,20	0,03	0,59	0,31	0,58	0,28

Estos ítems resultaron difíciles: ninguno de ellos fue respondido correctamente por más del 60% de los participantes. Además, están separados en dos clases en base a su dificultad, 1, 2, 4 y 6, por un lado, y 3 y 5, por otro, donde los de la segunda clase casi duplican el resultado más alto de los de la primera.

A continuación, se analizan dos ítems, uno de cada clase, para profundizar en estos aspectos.

El ítem 2, perteneciente al primer grupo y notable por ser el más difícil, está planteado a continuación[31]:

3.3.7.1 ÍTEM 2 DEL TEST INICIAL

Se hace la siguiente afirmación sobre los números enteros mayores que 0 y menores que 10:

"Si n es un número impar, entonces n+1 es múltiplo de 3"

Esta afirmación es cierta:

a) Sólo para n=2, n=4, n=5, n=6 y n=8.

b) Sólo para n=5.

c) Sólo para n=2, n=5 y n=8.

d) Sólo para n=1 y n=5.

En este ítem, la opción correcta es la a) y para señalarlo así es necesario reconocer que para 2, 4 ,6 y 8 el antecedente ("n es impar") resulta falso, por lo que la sentencia es cierta en estos casos, además de que para n=5, tanto antecedente como consecuente ("n+1 es múltiplo de 3") son ciertos.

La respuesta que registró mayor porcentaje de aciertos fue la b); en este distractor tanto el antecedente como el consecuente son ciertos para n=5. Esto parece indicar que los valores 2, 4, 6 y 8 no se consideraron relevantes en el argumento para quienes la eligieron, porque para ellos es falso el antecedente.

La respuesta c) registró el segundo mayor porcentaje. Los que la consideraron correcta parecen haber observado sólo el valor del consecuente, que resulta cierto sólo para los tres naturales indicados en el antecedente.

La respuesta d) obtuvo un porcentaje de respuesta tan bajo como el de la a). En este caso, el antecedente resulta cierto tanto para 1 como para 5, pero para 1 el consecuente es falso. Podría conjeturarse que esto significa que se reconoce que el condicional es falso cuando se da esta combinación de valores en antecedente y consecuente.

El ítem 5, correspondiente al segundo grupo, se formuló como sigue.

3.3.7.2 ÍTEM 5 DEL TEST INICIAL

Se dan las siguientes afirmaciones:

Llueve o está frío. No llueve. Si no llueve y está frío, nieva.

Si estas afirmaciones son ciertas a la vez, es posible concluir que:

[31] Adaptado de Durand-Guerrier (2003).

a) Alguien se moja.

b) No está frío.

c) Llueve.

d) Nieva

La respuesta correcta, que es la d), puede obtenerse deductivamente de las premisas mediante, por ejemplo, la siguiente secuencia:

a) Del par "*Llueve o está frío.*" y "*No llueve.*" se obtiene la conclusión parcial "*Está frío*".

b) Se tiene, por lo tanto, que "*No llueve y está frío"* al conjuntar la conclusión anterior con la segunda de las premisas.

c) Del par "*No llueve y está frío"* y "*Si no llueve y está frío, nieva.*" se obtiene "*Nieva*".

Aunque las reglas de inferencia usadas no se expliciten, habitualmente aparecen en las argumentaciones que se realizan en demostraciones, por lo que son más próximas a la experiencia de los estudiantes que la noción, mucho más técnica, de que un condicional sólo es falso cuando su antecedente es cierto y su consecuente falso.

La respuesta a) recibe un porcentaje de respuestas sorprendentemente alto, del 20%, pese a que la afirmación que se hace en ella no guarda relación alguna con las premisas.

La respuesta b), donde lo afirmado es la negación de la consecuencia de las dos primeras premisas descrita antes, recibe el segundo porcentaje más bajo de respuestas, en tanto la respuesta c), donde se pone como consecuencia la negación de una de las premisas, fue la que tuvo menor porcentaje de respuestas. Esto podría indicar que se reconoció su falsedad a partir de algún argumento deductivo.

Un modelo para la evaluación de la comprensión de una prueba (Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012) plantea como uno de los pasos a dar el de la justificación de afirmaciones, es decir, cómo se concluye una cierta afimación de otras hechas con anterioridad (Hodds, M. Alcock, L.Inglis, M., 2014). La familiariad de los estudiantes con estos procesos podría explicar el elevado procentaje de aciertos en este ítem.

El ítem restante del segundo grupo se refiere a una relación causal. El relativo buen desempeño en este ítem puede estar relacionado con la asociación causalidad-sentencia condicional (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010).

La siguiente pregunta fue planteada en el examen del curso de Matemática Discreta, y formó parte del postest, como uno de los ítems propuestos sobre los contenidos del curso.

3.3.7.3 ÍTEM DEL POSTEST DEL GRUPO DE MATEMÁTICA DISCRETA

*Considere la siguiente matriz **A** que representa una relación R definida en el conjunto* $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El par (x_4, x_4) *no pertenece a R; por eso, R no verifica la propiedad idéntica.*

b) No existen elementos x_i, x_j *y* x_k *tales que* (x_i, x_j) *y* (x_j, x_k) *están en R y* (x_i, x_k) *no está en R; por lo tanto, R posee la propiedad transitiva.*

En ambos casos la respuesta es afirmativa, aunque por motivos diferentes. Las dos afirmaciones refieren a definiciones en cuya formulación aparecen cuantificadores. En el caso de la b), el no cumplimiento de la sentencia para un caso alcanza para afirmar la no validez de la propiedad recíproca o simétrica. Pero en el caso de la propiedad transitiva, además aparece un condicional, que resulta cierto porque en todos los casos el antecedente es falso.

Para el postest correspondiente al curso de Cálculo, se repitió el ítem, ya usado en el pretest (que figura como ítem 4 en la tabla 4), que se da a continuación.

3.3.7.4 ÍTEM DEL POSTEST DEL GRUPO DE CÁLCULO

La gráfica que se da a continuación es la de una función f definida en el intervalo $\{x \,/\, -4 \leq x \leq 4\}$.

Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función f es falsa:

a) Si $0 \leq f(x) \leq 1$, *entonces* $-4 \leq x \leq 0$.

b) Si $-3 \leq x \leq 0$, *entonces* $0 \leq f(x) \leq 2$.

c) Si $f(x) > 1$ *entonces* $x < 0$.

d) Si $1 < x \leq 4$ *entonces* $f(x) > -2$.

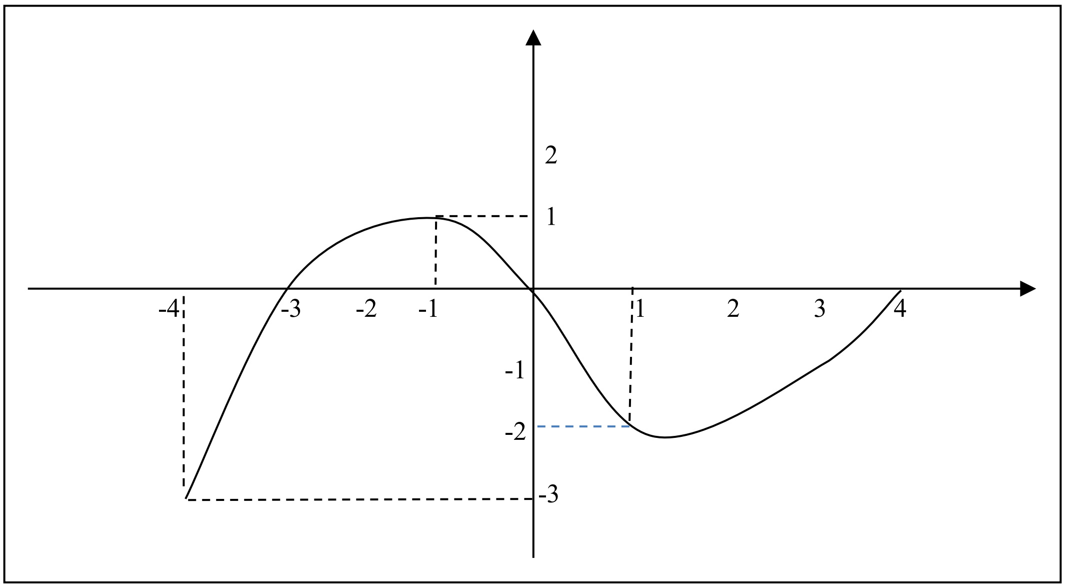

Figura 4: Gráfica del ítem del postest del grupo de Cálcculo del tercer estudio

La respuesta es la parte d), ya que es la única sentencia falsa. La parte a) presenta una sentencia fácilmente identificable como cierta. La de la parte b), siendo cierta, presenta una dificultad adicional y es que en el consecuente no se da exactamente la imagen del intervalo que figura en el antecedente, sino uno que lo contiene. Pero el más difícil de reconocer como cierto es el enunciado de la parte c), porque en él el antecedente es falso. Este análisis permite conjeturar que los estudiantes reconocen mejor cadenas deductivas como las usuales en demostraciones matemáticas que cuestiones más técnicas como la definición del valor de verdad del condicional.

En efecto, los ítems referidos en la Tabla 4 responden a dos grupos: el que integran las preguntas 1, 2, 4 y 6 (que son las de más bajo porcentaje de respuestas correctas) y el formado por las preguntas 3 y 5 (cuyo porcentaje de respuestas correctas casi duplica cualquiera de los anteriores).

En los ítems del primer grupo la opción correcta se obtiene a partir del hecho de que una sentencia condicional es cierta si su antecedente es falso. Y, en los ítems donde se registró el mejor resultado, la respuesta correcta puede obtenerse por argumentos que son más próximos a los que se usan habitualmente en la clase de Matemática.

3.4 CONCLUSIONES FINALES

En esta sección de conclusiones finales se articularon los resultados, poniéndolos en relación con el marco teórico, para establecer su coherencia o su discrepancia con lo esperable, y también el grado de consistencia de los resultados de cada estudio respecto de los otros dos.

La Tabla 10 a continuación es un resumen de lo que se expone en esta sección. En la primera fila se reseña brevemente cada estudio. Cada pregunta de investigación figura a partir de la segunda fila en la primera columna; en la fila correspondiente se señala la contribución de cada estudio a la respuesta de la interrogante planteada. La última fila reporta resultados que amplían algunas de las evidencias anteriores.

Tabla 10: Preguntas de investigación y estudios realizados

	Primer estudio Diseño pre-postest con grupo experimental (en el que se desarrolló la intervención didáctica) y de control, en Álgebra Lineal, para enseñar aspectos del uso de SMS. Comparación de desempeños de los grupos experimental y de control en tareas sobre contenidos de Cálculo y los aspectos del uso destacados en la intervención en Álgebra Lineal.	Segundo estudio Diseño factorial intrasujeto 2x2, con dos variables independiente (tipo de condición, tipo de SMS) y una variable dependiente (desempeño)	Tercer estudio Diseño cuasi-experimental, con una variable independiente y una dependiente, pre-postest sin intervención didáctica, sobre temas de Lógica, en Matemática Discreta (enseñanza intencional) y Cálculo (enseñanza no intencional).
Pregunta 1 La enseñanza planificada intencionalmente de manera que se hagan explícitos aspectos del uso de los SMS ¿puede contribuir al desarrollo de habilidades en su uso y paralelamente, al aprendizaje de los contenidos matemáticos?	Diferencias significativas a favor del grupo experimental. Desagregando los grupos por rendimiento en pretest, las diferencias aparecen entre los grupos de rendimiento superior.		Grupo de Cálculo no muestra evolución, mientras que el de Matemática Discreta mejora significativamente. Diferencias significativas a favor del conjunto de alumnos de Matemática Discreta al finalizar el semestre.
Pregunta 2 Habilidades en el uso de SMS desarrolladas en relación con el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos ¿son susceptibles de ponerse en práctica al trabajar con otros, o están ligadas al contenido original?	Diferencias no significativas a favor del grupo experimental, que dan indicios de transferencia habilidades en tareas de generalización.		
Pregunta 3 En ausencia de enseñanza intencional, como simple subproducto de las actividades matemáticas en el aula, ¿se adquieren destrezas relacionadas con diferentes aspectos del uso de los SMS o con el reconocimiento de estructuras deductivas?			El grupo de estudiantes de Cálculo no muestra diferencias entre pretest y postest. El grupo de estudiantes de Matemática Discreta mejora significativamente el desempeño en el postest respecto del pretest.
Pregunta 4 En una tarea sobre un cierto contenido matemático, ¿qué relación existe entre el SMS utilizado y la dificultad de la tarea?		Diferencias significativas en los desempeños en tareas sobre condición necesaria en registro gráfico, respecto de las otras combinaciones. Diferencias no significativas en favor del registro gráfico.	
Pregunta 5 Dependiendo de la representación utilizada, ¿reconocen o interpretan los aprendices estructuras lógicas subyacentes a las actividades matemáticas?		Se reconoce mejor la condición necesaria que la suficiente. Las estructuras deductivas se reconocen más fácilmente en el registro gráfico que en el algebraico.	

Otros aportes	Las diferencias constatadas en el caso de Álgebra Lineal ocurren al comparar a los subgrupos de estudiantes de alto desempeño en el pretest. Las mejoras de los estudiantes se producen en las primeras etapas de la intervención, o no se registran mejoras.	Los estudiantes que ingresan a la universidad encuentran dificultades para reconocer estructuras deductivas. En particular, el conectivo condicional resulta difícil de comprender y usar.	Los textos usuales de Cálculo no presentan instancias en las que explíciten las estructuras lógicas usadas. En las notas de clase de estudiantes no se encuentran referencias a estos aspectos.

3.4.1 PRIMERA PREGUNTA

La primera pregunta que este estudio se planteó fue acerca del rol de una enseñanza intencional en el desarrollo por parte del estudiante de habilidades en el uso de SMS y cómo ellas se relacionan con el aprendizaje de los contenidos matemáticos: *"La enseñanza planificada intencionalmente de manera que se hagan explícitos aspectos del uso de los SMS ¿puede contribuir al desarrollo de habilidades en su uso y paralelamente, al aprendizaje de los contenidos matemáticos?"*.

Los resultados de primer y tercer estudios aportan elementos para responder.

El primer estudio planteó una intervención en la asignatura Álgebra Lineal. En ella se buscó explicitar la presencia de SMS, destacando algunas características suyas que tenían relevancia en las tareas propuestas. Por ejemplo, para proceder a formular generalizaciones a partir de casos particulares, es útil el uso de subíndices o supraíndices dado que permiten la representación de la entidad general cuya expresión se quiere inducir.

La relación de este diseño instruccional con los aprendizajes de algunos aspectos del uso de SMS se indagó con un diseño pre-postest, con un grupo experimental y otro de control, Se constataron diferencias a favor de los aprendizajes en el grupo experimental, y una mejora significativamente mayor en el grupo experimental respecto del de control, lo que puede interpretarse en el sentido de que la enseñanza intencional favorece la adquisición de habilidades en el uso de SMS.

Evidencia en la misma dirección fue encontrada en el tercer estudio, en torno al aprendizaje de estructuras deductivas. En este estudio se consideraron las asignaturas Cálculo y Matemática Discreta, sin introducir intervenciones de tipo alguno en su enseñanza.

En el de Cálculo no hay intencionalidad para enseñar estructuras deductivas, al contrario de lo que ocurre en la segunda. Esto se constató a partir del análisis de los textos de uso frecuente cada una de estas asignaturas y, adicionalmente en el caso de Cálculo, con el examen de notas de clase tomadas por estudiantes.

La comparación de los resultados en el pretest y el postest muestra que los estudiantes de la asignatura Cálculo no modificaron sus desempeños, mientras que los de Matemática

Discreta consiguieron un aumento significativo en los suyos. Más adelante se volverá sobre este asunto.

Estos resultados son consistentes con la crítica de Duval (2005) y los resultados de Vega (1995), marcando que en ausencia de enseñanza intencional, no es razonable esperar que se produzcan aprendizajes en el uso de los SMS simplemente por exposición a tareas matemáticas donde se utilicen. Desde el punto de vista didáctico, la implicación es que los diseños instruccionales deben incluir la explicitación de lo que se quiere enseñar, no solamente de los contenidos disciplinares sino también de instrumentos de aprendizaje (sistemas representacionales, estructuras deductivas) que se espera que los estudiantes desarrollen.

Además, esta constatación y el estudio de los libros de textos realizado en el tercer estudio actualizan la preocupación ya señalada (Kieran, 1992) (Dubinsky, 1991) respecto de la importancia de los materiales de enseñanza (en particular como orientadores de la actividad de los profesores). En la medida que los textos de uso habitual no focalicen la atención en la enseñanza de algunos aspectos, posiblemente estos pierdan visibilidad entre los profesores y no sean objeto de enseñanza explícita.

Otras conclusiones pueden extraerse del primer estudio. Desagregando los grupos a partir de los desempeños en el pretest en dos clases (altos y bajos) se registró como resultado que las diferencias entre los grupos altos son significativas en las dos variables estudiadas. Un argumento explicativo puede elaborarse a partir de la noción de Zona de Desarrollo Proximal (ZDP) de Vigotsky (1986). En efecto, los estudiantes de desempeño alto pueden entender e incorporar a sus prácticas las sugerencias y comentarios del profesor. Dicho de otra manera, la enseñanza que propone esta intervención está situada en su ZDP, de manera que permite la adquisición de las habilidades en el uso de los SMS que están siendo enseñadas. En otro sentido, los de desempeño bajo muestran un grado insuficiente de apropiación de las habilidades de uso de los SMS, como para poder aprovecharse de la enseñanza impartida.

Esto plantea la necesidad de diversificar los diseños de intervención didáctica para aproximar la enseñanza a la multiplicidad de usos de los SMS por parte de los estudiantes. Desde el punto de vista educativo, este resultado es importante porque implica al menos dos consecuencias:

a) es posible desarrollar diagnósticos al ingreso a la universidad que permitan anticipar cuáles estudiantes podrán sacar provecho de la enseñanza usual en el ámbito universitario y cuáles difícilmente lo consigan;

b) para estos últimos deben diseñarse mallas curriculares y, sobre todo, formas de enseñanza alternativas que promuevan sus aprendizajes, y en particular, la apropiación de habilidades en el uso de SMS, teniendo efectivamente en cuenta su punto de partida y sus estilos de construcción de conocimientos.

Este punto parece de la mayor importancia. Si se aceptan perspectivas como la de Radford (2000) que afirman que el uso de los signos es, a la vez que un medio para el quehacer matemático, un elemento modificador del funcionamiento cognitivo del individuo, así como que son una forma de comunicar y socializar el conocimiento como sostiene Kaput (Towards a Theory of Symbol use in Mathematics, 1987), y además contribuyen a la construcción de los conceptos matemáticos, tal como afirma Duval (1998), entonces capacidades no desarrolladas para aprehender las habilidades que permiten el uso de los SMS, son determinantes en la consecución de aprendizajes matemáticos significativos.

Por eso, se convierte en una prioridad educativa la elaboración de alternativas didácticas que pongan estos aprendizajes al alcance de los estudiantes que a su ingreso a la universidad muestran una escasa habilidad.

La adaptación de un modelo como el de este estudio a otras asignaturas o con otros objetivos de aprendizajes es uno de los asuntos que queda abierto. En particular, los procesos de generalización pueden plantearse con base en diferentes contenidos matemáticos y pueden usarse para mostrar formas de razonamiento inductivo, que se diferencian del deductivo y lo complementan, ya que están asociadas con el desarrollo de la intuición.

Algunas de estas medidas, (tutorías, cursado con modalidad de lecturas orientadas) han ido siendo implementadas en la UCU (Artigue, Flores, Lacues, & Messano, 2017).

En el caso de las tutorías, una de las acciones del profesor tutor es tomar especial cuidado en trabajar con el estudiante sobre sus propias producciones escritas, insistiendo en particular en aspectos del uso de los SMS como los que orientaron la intervención.

En el cursado con la modalidad de lecturas orientadas se usan materiales que además del tratamiento de los contenidos matemáticos, llaman la atención del lector sobre cuestiones como las estructuras deductivas que están presentes y la forma en que se articulan diferentes representaciones. En cualquiera de estas experiencias, las evaluaciones preliminares son favorables; sin embargo, es aún muy pequeño el número de estudiantes que han participado en ellas.

A partir del análisis didáctico pueden efectuarse otros comentarios. Al revisar las producciones de los estudiantes se encuentra evidencia en el sentido de que quienes consiguen tempranamente un nivel de desempeño alto, lo mantienen luego pese a la progresiva complejidad de los contenidos matemáticos presentes en las tareas. En cambio, quienes no consiguen rápidamente un desempeño suficiente, continúan sin conseguirlo, y esto llega a afectar su aprendizaje de los contenidos.

Esto plantea al menos dos asuntos: el primero, interrogarse acerca de la forma de organizar la enseñanza para proponer trabajos que promuevan a estos estudiantes en su manejo de los SMS a un nivel de suficiencia; el segundo, explorar la posibilidad de desarrollar indicadores que sirvan para determinar la evolución de los estudiantes en sus habilidades de uso de SMS y alertar tempranamente de la aparición de dificultades.

Un camino en el que incursionar es el de incluir actividades en grupos conformados intencionalmente con estudiantes de diferentes desempeños en el diagnóstico inicial, como forma de estimular interacciones entre pares que contribuyan a conseguir este desarrollo. En este caso, la exploración conduce a estudiar procesos de construcción social de consensos en el uso de representaciones, en términos de los señalamientos de Radford (2000).

3.4.2 SEGUNDA PREGUNTA

La segunda pregunta refería a la posibilidad de trasferencia de habilidades en el uso de SMS desarrolladas en torno a un cierto contenido matemático a otros contextos: *"Habilidades en el uso de SMS desarrolladas en relación con el aprendizaje de ciertos contenidos matemáticos ¿son susceptibles de ponerse en práctica al trabajar con otros, o están ligadas al contenido original?".*

En el primer estudio se planificó una tarea para estudiar esta cuestión. Los estudiantes de los grupos de Álgebra Lineal que también participaban en grupos de la asignatura Cálculo recibieron una consiga en las que se les planteaba ejercicios similares a algunos de los propuestos en la intervención diseñada para la asignatura Álgebra Lineal, enunciados sobre contenidos de Cálculo.

El resultado registrado en esta tarea de transferencia es importante, porque proporcionó evidencia en el sentido de que la instrucción intencional en el uso de SMS promueve aprendizajes que pueden ser usados en otros contextos.

Los aspectos del uso de SMS que fueron estudiados en este caso contemplaron trabajos de tratamiento al interior de un registro (que están presentes en cualquier actividad matemática), el reconocimiento de patrones y su representación simbólica como una generalización.

Por esta razón, desde el punto de vista de la educación matemática, este resultado permite plantear la cuestión de si es o no relevante sobre qué contenidos matemáticos se enseñe acerca del uso de los SMS, o si lo sustancial es que esa enseñanza se efectúe, sobre todo porque esta evidencia contrasta con la de otros estudios: en relación con la interpretación de gráficas (Roth, 2004) plantean la posibilidad de que esta clase de transferencia podría depender de contextos personales u del conocimiento en otras áreas disciplinares.

El éxito en conseguir la solución depende, entre otros factores, del reconocimiento de cómo interpretar contextualmente reglas sintácticas para establecer semánticamente relaciones entre las entidades matemáticas en juego. Una misma tarea de generalización podría tener especificidades debidas al contexto matemático en el que se plantea.

El estudio de estos vínculos no fue una pretensión de este trabajo, pero el análisis de las tareas puso en claro la importancia de esta interrogante. Queda planteada una cuestión sobre el rol de los SMS en el desarrollo de una tarea, que es el de sus relaciones con los contenidos matemáticos que aparecen en ella.

Preguntas que se pueden formular a partir de este conjunto de resultados son:

1) ¿Habilidades conseguidas en una cierta área de contenidos matemáticos se transfieren a cualquier otra o existe alguna direccionalidad en esta posibilidad de transferencia? En este trabajo se encontró evidencia de transferencia de habilidades en el uso de SMS desarrolladas en procesos de construcción de generalizaciones en Álgebra Lineal a procesos similares en Cálculo. Teniendo en cuenta las especificidades de los SMS tanto en Álgebra Lineal como en Cálculo, cabe preguntarse si puede darse una transferencia en sentido contrario, es decir, ¿habilidades conseguidas a partir del trabajo con contenidos de Cálculo pueden transferirse a tareas semejantes en Álgebra Lineal? Por otro lado, es posible preguntarse también acerca de la posibilidad de transferencia (y en qué sentido) de habilidades de uso de SMS en otro tipo de tareas (reconocimiento de casos particulares, ejecución de algoritmos).

2) ¿Es necesario haber conseguido un cierto grado de suficiencia en el uso de SMS para poder llevar a cabo esta transferencia? La evidencia recogida en este estudio no es concluyente para responder a esta cuestión.

3) ¿Las habilidades conseguidas en la ejecución de procesos de conversión también son transferibles? Las tareas propuestas en este estudio para indagar acerca de transferencia no implicaban la necesidad de efectuar operaciones de conversión entre RSR, por lo que queda abierta esta cuestión.

3.4.3 TERCERA PREGUNTA

La tercera pregunta formulada fue: "*En ausencia de enseñanza intencional, como simple subproducto de las actividades matemáticas en el aula, ¿se adquieren destrezas relacionadas con diferentes aspectos del uso de los SMS o con el reconocimiento de estructuras deductivas?,*"

Interrogaba acerca de si la sola enseñanza de contenidos matemáticos contribuye al desarrollo de habilidades en el uso de SMS o al reconocimiento y aprendizaje de estructuras deductivas.

La primera parte ha sido ya considerada al responder la primera pregunta, dado que los resultados del primer estudio indicaron una asociación positiva entre la enseñanza intencional y la mejora en el uso de SMS.

Para estudiar la segunda, es decir, indagar acerca del rol de la enseñanza intencional en la adquisición de habilidades en relación el uso de estructuras deductivas, se eligieron dos asignaturas de carreras diferentes. En Matemática Discreta estos temas son enseñados explícitamente porque forman parte de su currículo, mientras que en Cálculo la presencia de estas estructuras está implícita en el desarrollo conceptual de los contenidos.

La sola exposición de los estudiantes al uso de formas de razonamiento deductivo no parece tener efecto en su adquisición, como emerge de la consideración de los resultados del curso de Cálculo, en los que no se encuentran diferencias significativas en los desempeños de los estudiantes entre el pretest y el postest. En particular, en el ítem usado tanto en el pretest como en el postest de esta asignatura no se registró mejora en el porcentaje de respuestas correctas entre las dos instancias.

En cambio, en el curso de Matemática Discreta se registró un aumento significativo en el desempeño del postest en relación con el del pretest. Este aumento fue suficiente como para equiparar los grupos de Cálculo y Matemática Discreta en el postest, cuando en el pretest se había dado una diferencia significativa a favor del grupo de Cálculo. Esto muestra que la enseñanza intencional de estos contenidos tiene efectos positivos sobre su adquisición y uso. Teniendo en cuenta la composición de los ítems, esta mejora no solo ocurre en cuestiones técnicas, sino también en el tratamiento de argumentos cotidianos, como los que integran el ítem 5 del pretest utilizado en el tercer estudio.

Estos resultados concuerdan con los que reportan Morou y Kalospyros (2011) en una intervención didáctica con estudiantes de enseñanza media.

Una cuestión que surge como tema a estudiar es la existencia de una correlación positiva entre la enseñanza de la Matemática y los aprendizajes de formas de razonamiento de esta disciplina. Este estudio ha mostrado una correlación positiva entre la adquisición de habilidades para reconocer o aplicar razonamientos deductivos y la enseñanza intencional de estructuras deductivas en el marco de un curso específico sobre estos temas. Sin embargo, la evidencia del curso de Cálculo concuerda con la de Inglis y Simpson (2009), en señalar que no hay avances en ausencia de intencionalidad en la instrucción. Resta analizar el efecto de intervenciones para enseñar explícitamente estas estructuras en el marco de cursos como los de Cálculo o Álgebra, entre otros, que no tienen la finalidad expresa de atender a estos temas.

3.4.4 CUARTA Y QUINTA PREGUNTAS

Cuarta y quinta preguntas fueron abordadas en el segundo estudio.

Dado que el mismo objeto matemático es susceptible de ser representado de diferentes formas, el grado de dificultad de una tarea en el que el objeto matemático aparezca puede depender de la representación utilizada: *"En una tarea sobre un cierto contenido matemático, ¿qué relación existe entre el SMS utilizado y la dificultad de la tarea?".*

Teniendo en cuenta la importancia de las estructuras deductivas en la actividad matemática, se diseñó una tarea acerca de las condiciones necesaria o suficiente en el contexto de contenidos de Cálculo presentada en dos SMS diferentes, el algebraico y el gráfico: *"Dependiendo de la representación utilizada, ¿reconocen o interpretan los aprendices estructuras lógicas subyacentes a las actividades matemáticas?"*

Los resultados del estudio muestran diferencias en el uso que los estudiantes hacen de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) y su relación con los Sistemas Matemáticos de Símbolos en los que se presenta la información sobre estos enunciados (registro gráfico, registro algebraico) en un curso de Cálculo de primer año en la universidad.

Las tareas sobre condición necesaria presentadas en el registro gráfico resultaron significativamente más sencillas que las demás; se obtuvieron indicios de un mejor rendimiento en tareas presentadas en el registro gráfico (independientemente del tipo de condición) respecto de las correspondientes al algebraico y resultaron mejores los desempeños en las tareas sobre condición necesaria en relación con las tareas sobre condición suficiente (independientemente del registro).

Las diferencias detectadas en relación con el registro de representación son de importancia didáctica. Es destacable que los resultados de este estudio muestran que el uso del registro gráfico y el reconocimiento de la condición necesaria resultan más sencillos que el uso del registro algebraico y el reconocimiento de la condición suficiente, respectivamente, y que la combinación condición necesaria-registro gráfico es la que con gran diferencia resulta la más fácil.

De modo consistente aparece el registro gráfico asociado con un mejor desempeño en las tareas. Parafraseando a Radford y Puig "*...el significado de los cálculos era asegurado por la visualización de transformaciones geométricas...*" (Radford & Puig, 2007, p.

146)[32], una posible explicación de esta diferencia es la forma con la que la gráfica de una función permite el acceso a la información, comparada con la de una ecuación.

La decisión acerca de si la imagen de un cierto subconjunto del dominio está contenida en un cierto conjunto del recorrido puede tomarse a partir de verificar que los puntos de la gráfica se encuentran en un cierto rectángulo. Incluso algunas de estas operaciones pueden verse favorecidas por la posibilidad de ejecutar gestos (Radford, 2010), como señalar partes del dominio o del codominio, que simplifican el proceso de establecer relaciones entre estos subconjuntos. En cambio, responder la misma pregunta en un registro algebraico requiere cálculos, a veces laboriosos, cuyos resultados deben ser luego interpretados en términos de inecuaciones, lo que contribuye a la complejidad de estos procedimientos.

Estas cuestiones no fueron abordadas en este estudio y para indagarlas se requieren diseños específicos.

La enseñanza tradicional ha privilegiado el uso del SMS algebraico en detrimento de otros sistemas de representación. Por ejemplo, a una demostración basada en un diagrama de Venn correspondiente a un registro gráfico, no se le reconoce el mismo estatus de rigor matemático que a otra desarrollada en el registro algebraico. Un argumento a favor de esta postura es la dificultad asociada a ciertos registros para presentar ciertas situaciones con completa generalidad.

Una explicación de las diferencias detectadas es que en las formulaciones algebraicas se requieren tratamientos, en el sentido de Duval (1998), a veces engorrosos y prolongados, antes de poder explicitar las relaciones entre las variables; entre otras situaciones, cuando el resultado de una inecuación es la unión de dos intervalos, puede ser difícil reconocer sus subconjuntos, lo que es relevante para decidir, entre dos enunciados dados, si uno de ellos es condición es suficiente o necesaria para el otro.

Esto podría contribuir a explicar que las diferencias entre condición necesaria y condición suficiente se vean opacadas en este registro. No sólo resultan más difíciles las tareas en el registro algebraico que en el gráfico, sino que, además, no se encuentra en el registro algebraico el reconocimiento de la distinción entre condición necesaria y condición suficiente, distinción que se reconoce en el registro gráfico.

[32] "…the meaning of calculations was ensured by visual geometric transformations…" Traducción del autor.

Teniendo en cuenta los resultados de este estudio, resulta una oportunidad revisar las prácticas de enseñanza buscando estimular el uso de diferentes registros de representación en la construcción de una solución de una cierta tarea, poniendo énfasis en los procesos de conversión; la introducción de actividades alineadas con la perspectiva teórica provista por la teoría de los registros semióticos de representación es una alternativa a desarrollar, explorar y evaluar.

En este sentido, hay dos asuntos que pueden ser enfatizados desde la enseñanza: por un lado, la explicitación de que un cierto RSR puede resultar mejor que otro para abordar algún aspecto de la tarea en consideración; por otro que una operación realizada o una información extraída en un cierto RSR puede no tener un correlato en otro o tenerlo sólo parcialmente.

Una cuestión a abordar, por lo tanto, es la de construir y poner a prueba diseños instruccionales que insistan en la articulación de diferentes RSR, al menos, el gráfico y el algebraico, como los que proponen Blázquez y sus colaboradores (Blázquez, Ortega, Gatica, & Benegas, 2006, págs. 189-209).

Al menos algunas nociones relacionadas con el concepto de función y las sentencias condicionales parecen resultar más accesibles desde el registro gráfico (Bloch, 2003). Entre los contenidos matemáticos en los que es posible seguir indagando sobre estas cuestiones se encuentran: el estudio de las propiedades de monotonía de funciones reales de variable real y su relación con las operaciones algebraicas y con la composición de funciones, o la definición de independencia lineal de vectores o de conjuntos generadores de un espacio vectorial.

Si bien la relación entre los RSR y el aprendizaje y la enseñanza de contenidos matemáticos viene siendo indagada desde hace dos décadas, es incipiente el estudio de los vínculos entre el aprendizaje de estructuras deductivas y los SMS. Los temas que se acaban de proponer son apropiados para poner el foco en estos aspectos, dado que las definiciones matemáticas a considerar integran el uso de cuantificadores y sentencias condicionales. En ambos casos, explícitamente resulta necesario estudiar el valor de verdad de éstas, lo que puede abordarse al menos desde los registros gráfico y algebraico.

Este estudio produjo otras evidencias. En relación con el uso de las sentencias condicionales que hacen estudiantes ingresantes a la universidad se constató que el grado de dificultad registrado en las tareas propuestas es alto. El promedio de respuestas correctas en general no superó el 60%.

Ello alerta respecto de que gran parte de las expresiones del discurso del aula no estarían siendo comprendidas por los estudiantes; entre otras consecuencias, los estudiantes no están comprendiendo lo que se espera que entiendan a partir del discurso docente. Ello concurre con lo advertido por Camacho, Sánchez y Zubieta (2014) quienes han señalado que en los argumentos (incluso en los correctos) que utilizan estudiantes universitarios aparecen elementos contextuales o intuitivos y, difícilmente, se encuentra que ellos manejen las estructuras lógicas subyacentes.

Los resultados recogidos en el tercer estudio refuerzan esta evidencia. Muestran de modo consistente que los estudiantes ingresan a la universidad con conocimientos escasos acerca de las estructuras deductivas para comprender o construir razonamientos que aparecen con frecuencia en los cursos que deben encarar a su ingreso, lo que resulta alineado con las investigaciones reseñadas por Durand-Guerrier (2008) y Camacho, Sánchez y Zubieta (2014).

Es posible que una explicación de esta situación sea el impacto de las reformas que en los últimos años se han llevado a cabo en el currículo de la enseñanza media en Uruguay, y en particular, en su ciclo superior (Otheguy, 2017). Estas reformas han incluido la posibilidad de que los docentes opten entre ciertos contenidos (Lógica o Retórica, en la asignatura Filosofía) y la disminución del tiempo académico asignado a Matemática, en general, y a Geometría, en especial.

El hecho de que una sentencia condicional resulta cierta cuando su antecedente es falso, independiente del valor de verdad del consecuente, parece ser casi ignorado por los estudiantes. La evidencia en este sentido es contundente, como muestran los desempeños del diagnóstico y los del postest de Cálculo analizados.

Esta constatación tiene una notable importancia, porque en varias instancias con las que los estudiantes deberán tomar contacto en sus cursos universitarios, se utiliza este resultado (entre otros, la prueba de que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro, o la de que el conjunto vacío es linealmente independiente, o la necesidad de que el punto donde se calcula el límite de una función sea de acumulación del dominio, o en la definición de generador o base de un espacio vectorial).

Esta situación es un hecho reseñado en la investigación en Matemática Educativa, y tiene explicaciones bastante diversas.

Una de ellas radica en el carácter técnico de la lógica aristotélica, en la que, en particular, la definición del valor de verdad del condicional responde a cuestiones que hasta cierto punto están alejadas de la experiencia cotidiana (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010).

Otro argumento a considerar es el discurso en el aula, en especial, la forma en que son usados ciertos verbos que se asocian a la condición suficiente (alcanzar, bastar) o la necesaria (deber, tener que). Es posible que estos verbos sean usados indistintamente para cualquiera de las dos condiciones, en forma inadvertida tanto por estudiantes como por profesores. Este aspecto ha sido señalado por Ferrari (2004) al indicar dificultades asociadas a la comunicación en Matemática debidas al uso de términos que tienen un significado técnico preciso y otro más coloquial que incorpora contextos cotidianos.

También en relación con el discurso, al menos en algunos idiomas como el español o el francés, puede señalarse que en una sentencia condicional los verbos deben conjugarse en diferentes modos, en el subjuntivo cuando el verbo aparece en el antecedente y en el potencial cuando está en el consecuente: “Si (verbo en modo subjuntivo) entonces (verbo en modo potencial)”.

La distinción de modos de conjugación resulta, por lo tanto, asociada con el reconocimiento de dos partes asimétricas en la sentencia, de manera que una de ellas (el antecedente) es condición suficiente para la otra (el consecuente) o, equivalentemente, esta otra (el consecuente) es condición necesaria para aquella (el antecedente).

Los saberes de la vida diaria, los del currículo y los eruditos, establecen sus raíces en matrices de sentido de epistemes propias. Las metáforas de expresiones de condición y condicional en lo cotidiano (consultadas en los diccionarios RAE y Espasa-Calpe) aluden a estar sujeto, supeditado, subordinado, a ser dependiente. Por su parte, esas palabras en el cálculo proposicional aluden a posibilidad, pudiendo haber otras opciones, otros caminos que se relacionan con el consecuente. Favorecer aprendizajes requerirá poner en diálogo estas distintas coherencias, articulándolas, con base en diseños científicos de enseñanza.

Esta cuestión amerita una investigación específica, para establecer hasta qué punto la ocurrencia de ciertos verbos o de ciertas estructuras gramaticales puede incidir en el uso adecuado de las estructuras lógicas. En este sentido, resulta de interés establecer qué verbos se usan para designar qué condición, tanto por parte de estudiantes como de profesores, y de qué manera ese uso incide en la comprensión correcta de la estructura utilizada.

En cualquier caso, resulta que, si se pretende que los aprendices utilicen elementos de lógica matemática en sus actividades y, en particular, que recurran al uso del condicional, deben concederse espacios para la enseñanza intencional de estos temas. Un modelo para estudiar estos diseños ha sido propuesto por Grenier (2013).

En ese sentido van propuestas como la de Durand-Guerrier (2005) para utilizar situaciones habituales de los cursos de Matemática de manera de enfatizar acerca del uso de sentencias condicionales y cuantificadores en los procesos de demostración, explicitando las reglas de inferencia usadas o la de Morou y Kalospyros (2011), diseñando un curso de lógica orientado a estudiantes en la enseñanza media en el que, entre otros temas, se enfatizó la traducción formal de argumentaciones en las que aparecen sentencias condicionales tomadas de diversas fuentes, incluyendo desde publicaciones recreativas hasta actividades en un curso de Cálculo.

Estas conclusiones cuestionan la relación entre el éxito académico y la forma de organización de la enseñanza de Matemática: si los estudiantes no manejan estructuras deductivas en un nivel de desarrollo suficiente, y éstas no se presentan como contenido matemático en los primeros cursos universitarios, cabe preguntarse cómo este punto de partida incide en resultados académicos de altas tasas de reprobación o de deserción. La relación entre el grado de aprendizaje previo de contenidos de Lógica conseguido por los ingresantes y el riesgo de fracaso académico en primer año es asunto a indagar.

Este tema comienza a ser estudiado en Uruguay, dada la asociación que se percibe entre fracaso en Matemática y rezago o abandono en primer año.

En otro orden, una pregunta a responder es si es necesario encomendar a un curso específico, como el de Matemática Discreta, la enseñanza de estos temas. En este sentido, Durand-Guerrier (2005) presenta argumentos para sostener que es importante la explicitación de las estructuras lógicas (en particular la presencia de cuantificadores) en los procesos de demostración.

Sin embargo, muchas carreras universitarias no incluyen en sus diseños curriculares espacios para el tratamiento de estos contenidos. Por eso, resulta interesante indagar acerca de qué intervenciones didácticas, en el marco de cursos universitarios del área

(Cálculo, Álgebra Lineal, Probabilidad, Estadística, entre otros) pueden resultar exitosas para propiciar en los estudiantes aprendizajes y desarrollo de habilidades en el uso de estructuras deductivas, tanto en áreas científicas como de formación profesional.

3.4.5 LIMITACIONES Y CONTRIBUCIONES DE ESTE TRABAJO

Al comenzar este capítulo se mencionaron decisiones que tuvieron incidencia en los diseños realizados y por lo tanto significaron limitaciones para al menos algunas de las respuestas conseguidas en este trabajo.

Al desarrollar todos los estudios en una única unidad académica (FIT), el número de participantes resultó pequeño, lo que disminuye la generalidad de las conclusiones.

La ampliación de los estudios a otras instituciones o carreras resultó imposible por diversos motivos.

En el primero, la intervención diseñada tenía en consideración la forma peculiar de evaluación del curso de Álgebra, diferente de cualquier otro de la misma asignatura en otras carreras.

En el segundo, la coordinación necesaria para proponer a los estudiantes los dos cuestionarios, teniendo en cuenta el desarrollo de los contenidos de enseñanza, tenía complejidades de tal magnitud que impedían garantizar que, si se ampliaba la muestra, los datos recogidos no estuvieran contaminados (diferentes horarios o días de clase, número de grupos, calendarios curriculares).

En el tercero, la configuración de las poblaciones de los cursos de Cálculo y de Matemática Discreta era única, debido a la organización curricular de la carrera de Ingeniería en Informática en la FIT.

Sin embargo, teniendo en cuenta las características de la población en estudio (alumnos de carreras de Ingeniería en Uruguay) la representatividad aumenta, aunque siga sin permitir generalizaciones.

La decisión de desarrollar las investigaciones alterando de la menor manera posible las condiciones usuales de enseñanza condicionó algunos diseños, sobre todo los que implicaban alguna intervención didáctica o la realización de test iniciales y finales.

Sin embargo, esta orientación del trabajo tuvo el mérito de implicar a los profesores de los cursos en el desarrollo de la investigación (aportaron ideas sobre la confección de los instrumentos usados, acerca de las posibilidades de implementación de las intervenciones, llevaron registros de situaciones de clase) y se reveló productiva, al permitir incorporar en la enseñanza habitual los resultados que se revelaron exitosos.

Las reformas que se han operado en la enseñanza media en Uruguay han cambiado los perfiles de los ingresantes a las universidades, que deberán responder a esos cambios modificando sus currículos, tanto en organización como en contenidos.

Las conclusiones de este estudio pueden aportar a esta actualización curricular, en particular, para tener en cuenta que es necesario desarrollar diferentes trayectos para atender las diferencias de formación, para identificar actividades y momentos de intervención que contribuyen a los aprendizajes, y para destacar cuestiones que no están siendo tenidos en cuenta como objeto de enseñanza.

Sin embargo, los cambios de contenidos matemáticos tratados deberán llevar a una revisión de los instrumentos utilizados (cuestionarios, tareas).

4 REFLEXIONES PERSONALES

Cuando terminé mi Licenciatura en Matemática mis compañeros me regalaron varios libros, entre ellos, el único que encontraron en Montevideo referido a Didáctica de la Matemática, de Emma Castelnuovo.

Es que sabían que mi inicial e intacta pasión por la Matemática se había ampliado para incluir la pregunta acerca de cómo es que los humanos nos aproximamos y apropiamos de ella.

Estaba (y estoy) fascinado por nuestra capacidad para representarnos simbólicamente parte del mundo de una manera peculiar, razonar sobre estas construcciones simbólicas generando internamente nuevas configuraciones, volver al mundo a interpretar esas producciones y encontrarnos con que tenían sentido.

Por diferentes razones, mi desarrollo profesional posterior se configuró en torno a la enseñanza de Matemática y mis intereses iniciales se concretaron en la Educación Matemática.

Este trayecto doctoral, que por su extensión ha sido transitado en muy diferentes momentos vitales, me permite sentirme gratificado y privilegiado. Cada avance conseguido, cada dificultad superada, cada trabajo completado, cada momento de incertidumbre han ido marcando instantes que atesoro.

Al concluirlo, me quedan lecciones, algunas de las cuales comparto a continuación.

La enseñanza de la Matemática es una aventura digna de ser vivida.

Incluye plantearse preguntas acerca de la naturaleza de los entes con los que lidiamos, lo que lleva a interrogarse acerca de la realidad y, en caso de convenir en su existencia, a abordar como problema los vínculos entre ella y nuestras representaciones.

Conduce a considerar el devenir histórico de las ideas que permiten abordar estas entidades, para tratar de entender la compleja interacción entre lo individual y lo social que nos permite concebirlas, que va permitiendo equilibrios transitorios que se rompen para generar nuevas y revolucionarias formas de pensamiento.

Acerca nuestra comprensión a la de otros seres humanos en el intento de compartir conocimientos, conceptos y representaciones, a la vez que nos marca las diferencias insalvables que nuestra individualidad nos impone.

Enseñar Matemática interpela con demandas específicas.

Acercar a los aprendices a la belleza de la Matemática, a la originalidad de sus formas de pensamiento, a la creatividad que se evidencia en la solución que ha dado a los problemas que se le han planteado, a sus limitaciones fundamentales y a las que tiene en forma transitoria.

Mostrar que la Matemática es una peculiar manera de ver el mundo, que comporta ciertos valores acerca de cómo él está organizado y de cómo se puede transformar.

Hacer ver que lejos de ser una construcción definitiva, la Matemática es una obra inacabable en permanente proceso de construcción, del que participamos en cada momento que miramos el mundo desde su perspectiva.

Evidenciar que la Matemática se fundamenta en una especial idea del significado de lo que es cierto, que responde a necesidades internas y que la distingue de otras formas de aproximación a la noción de verdad.

Sintetizar conocimientos de muchas áreas diferentes, recurriendo a ellas para encontrar miradas complementarias que ayuden a desentrañar la complejidad de la tarea.

El rigor académico es necesario y no suficiente.

Debemos aceptar la necesidad de que la investigación que desarrollamos se atenga a normas que busquen asegurar la calidad de lo que hacemos.

Sólo limitarnos a cumplir con las normas y producir resultados irrelevantes no alcanza.

Es mi convicción que los académicos deberíamos mantener una sana rebeldía ante lo establecido, que haga viable una actitud crítica acerca de nuestro propio trabajo e inspire a no aceptar como definitivo lo ya hecho.

Finalmente, intentar resolver la paradoja consistente en enseñar a nuestros jóvenes lo que sabemos, para que aprendan a aprender lo que no sabemos que deberán aprender ni cómo podrán hacerlo, es un desafío compartido por quienes somos enseñantes, que se actualiza de manera especial en la universidad, donde la preparación profesional inicial tiene rápida obsolescencia.

Aprender a enseñar Matemática ha sido mi manera de comprometerme con ese desafío.

5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of Sequences and Series: Interactions Between Visual Reasoning and the Learner's Beliefs About their Own Role. *Educational Studies in Mathematics, 57*, 1–32.

Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Convergence of Sequences and Series 2: Interactions Between Nonvisual Reasoning and the Learner's Beliefs About their Own Role. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 77–100.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof Validation in Real Analysis: Inferring and Checking Warrants. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125-134.

Álvarez, C., & Segura, L. (1993). *David Hilbert Fundamentos de las Matemáticas.* México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Colección MATHEMA.

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215–241.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. [The teaching of the principles of Calculus: epistemological, cognitive and didactic problems]. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería Didácticaen Educación Matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, V., Flores, J., Lacues, E., & Messano, C. (2017). Buscando medidas de apoyo para superar el fracaso académico. *Pensamiento Matemático, 7*(2), 27-42.

Attridge, N., & Inglis, M. (2013). Advanced Mathematical Study and the Development of Conditional Reasoning Skills. *PLoS ONE, 8*(7). doi:10.1371/journal.pone.0069399

Balacheff, N. (2004). Marco, registro y concepción. *Revista EMA, 9*(3), 181-204.

Bennet, E. (1990). Kaput's Multiple Linked Representations and Constructivism. *The Mathematics Educator, 1*(1), 21-25.

Berger, M. (2004). The Functional Use of a Mathematical Sign. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 81-102.

Beth, E. (1965). *Mathematical thought.* Amsterdam: Springer-Sicience+Business Media, B.V.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., & Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 189-209.

Bloch, I. (2003). Teaching Functions in a Graphic Milieu: Wht Knowlede Enable Students To Conjecture and Prove? *Educational Studies in Mathematics, 52*, 3–28.

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática.* Buenos Aires: Lautaro.

Chávez, J., & Caicedo, A. (2014). TIC y argumentación: Análisis de tareas propuestas por docentes universitarios. *Estudios Pedagógicos*(2), 83-100.

Chevallard, Y. (1997). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Bunos Aires: Aique.

Clark, J., Cordero, C., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., . . . Vidakovic, D. (1997). Constructing a Schema: the Case of the Chain Rule. *JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR, 16*(4), 345-364.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* México, D.F.: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA).

Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones, una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*(3), 283-306.

Cuena, J. (1985). *Lógica Informática.* Madrid: Alianza Editorial.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, Registro de Representaciones Semióticas y Noética. *Uno Revista de Didáctica de la Matemática*(35), 90-106.

Deloustal-Jorrand, V. (2004). Studying the Mathematical Concept of Implication Through a Problem on Written Proofs. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 263-270). Bergen: Bergen University College.

Denis, M. (1991). Cognitive Psychology and the Concept of Representaton. En M. Denis, *Image and Cognition* (págs. 1-15). New York: Pentice Hal/Harvester Wheatsheaf.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le coursus primaire. *Tesis doctoral*. París: Université de Paris VII.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 95-123). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Eduacational Studies in Mathematics, 27*, 267-305.

Durand-Guerrier, V. (2003). Wich notion of implication is the right one?From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*(53), 5-34.

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in predicate calculus a tool for analysing proof in a didactic perspective. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (págs. 409-419).

Durand-Guerrier, V. (2008). About logic, language and reasoning at the transition between French upper Secondary school and University. *ICME 11.*

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine [Semiosis and human thinking]*. Bernes: Peter Lang.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103-131.

Edwards, C., & Penney, D. ((2008). *Cálculo con trascendentes tempranas.* México: Prentice-Hall.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Ferrari, P. (2004). Mathematical Language and Advanced Mathematical Learning. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 383-390). Bergen: Bergen University College.

Ferrari, P. (2004). Mathematical Language and Advanced Mathematics Learning. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, págs. 383-390. Bergen: Bergen University College.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to Translate from One Representation of the Concept of Function to Another and Mathematical Problem Solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Glymour, C. (1997). *Thinking Things Through: An Introduction to Philosophical Issues and Achievements.* Massachusetts: The MIT Press.

Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representations and the Psychology of Mathematics Education. *Journal of Mathematics Behavior, 17*(1), 1-4.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing Mathematics. En L. P. Steffe, Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A., & Greer, B., *Theories of Mathematical Learning* (págs. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Grenier, D. (2013). Research Situaations to Learn Logic and Various Tyes of Mathematical Reasoning and Proofss. *Working Group 1 CERME 8.* Recuperado el 10 de marzo de 2018, de http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Grenier.pdf

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas Discreta y Combinatoria, una introducción con aplicaciones.* Wilmington: Addison Wesley Iberoamericana.

Gutiérrez, S., & Parada, D. (19 de Febrero de 2017). Caracterización de Tratamientos y Conversiones: el Caso de la Función Afín en el Marco de las Aplicaciones. *Tesis de Maestría*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Guzman, I. (1998). Registros de representación, el parendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME, 1*(1), 5-21.

Harel, G., & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 82-94). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Hiebert, J. (1988). A Theory of Developing Competence with Written Mathematical ymbols. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 333-355.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Hoyles, C., & Küchemann., D. (2002). Student's understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*(51), 193-223.

Inglis, M., & Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*(67), 187–204.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representations in the teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Johnson-Laird, P. (1984). El pensamiento como habilidad. En M. Carretero, & J. Madruga, *Lecturas en Psicología del Pensamiento,* . Madrid: Alianza Psicología.

Kaleff, A. (2007). Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. *BOLEMA*(28), 69-94.

Kaput, J. (1987). Representations Systems and Mathematics. En C. Janvier, & C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (págs. 19-26). New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates, Inc. , Publishers.

Kaput, J. (1987). Towards a Theory of Symbol use in Mathematics. En C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (págs. 159-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Kaput, J. (1994). Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. En A. Schoenfeld, *Mathematical thinking and pMathematical thinking and problem solving* (págs. 77-156). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Karmiloff-Smith, A. (1994). *Más allá de la modularidad.* Madrid: Alianza Editorial.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws, *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (págs. 390-419). New York: Macmillan.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, M. (1994). *El Pensamiento Matemático desde la antigüedad hasta nuestros días [Mathematical Thought from Ancient to Modern Times].* Madrid: Alianza Editorial.

Lacués, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los Sistemas Matemáticos de Símbolos. *DIDAC*(56-57), 30-36.

Lacués, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), 28*(48), 299-318.

Martí, E., & Pozo, I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de sistemas eternosde representación. *Infancia y aprendizaje*(90), 11-30.

Moore, R. (1994). Making teh Transition to Formal Proof. *Eduacational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

Morou, A., & Kalospyros, N. (2011). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Rzeszów.

Otheguy, G. (2017). *Incidencias de la Reformulación 2006 del Bachillerato de Educación Secundaria en el Desarrollo de Competencia Matemática.* Montevideo: Universidad Católica del Uruguay.

Palmer, S. (1977). Fundamental Aspects of Cognitive Representations. En R. E., B. L., R. E., & B. L. (Edits.), *Cognition and categorization* (págs. 259-303). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Peano, G. (1895). Sur la Definition de la Limite d'une Fonction. Exercice de Logique Mathématique. *, American Journal of Mathematics, 17* (1), 37-68.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2017). Analysis of the Underlying Cognitive Activity in the Resolution of a Task on Derivability of the Absolute-Value Function: Two Theoritical Perspective. *PNA, 11*(2), 97-124.

Pocoví, M., & Collivadino, C. (2014). Traducción entre lenguajes simbólicos de distintas áreas del conocimiento: el caso del flujo del campo eléctrico. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 32*(2), 53-69.

Pozo, J. (2003). *Adquisición de conocimiento.* Madrid: Morata.

Puig, L. (2003). Signos, textos y Sistemas Matemáticos de Signos. En E. Fillol, & E. Fillol (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.* (págs. 174-186). México, México: Fondo de Cultura Económica.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*(42), 237-268.

Radford, L. (2010). Laters of Generality and Types of Generalization in Patterns Activity. *PNA - Pensamiento Numérico Avanzado*, 37-62.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Manings as Sensous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 145–164.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33* (1), 151-165.

Romberg, T. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*(294), 323-406.

Rosen, K. (2004). *Matemática discreta y sus aplicaciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

Roth, W. (2004). What's the Meaning of 'Meaning': a Case Study on Graphing. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 75-92.

Roth, W., & Radford, L. (2010). Re/thinking the Zone of Proximal Development (Simmetrically). *Mind, Culture and Activity, 17*(4), 299-307.

Rubinstein, R., & Thompson, D. (2001). Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instructional Strategies. *Mathematics Teacher, 94*(21), 265-271.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching Mathematics. En A. Schoenfeld, *Mathematical thinking and problem solving* (págs. 53-70). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Selling, S. (2015). Learning to represent, representing to learn. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 191-209.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of Mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 1*(36), 22.

Sherin, B., & Lee, V. (2005). On the interpretation of scientific representations. *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Montreal.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics , 61*, 133–162.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos.* México: International Thomson Editores.

Stylianides, A., Stylianides, G., & Philippou, G. (2004). Undergraduates Student's Understanding of the Contraposition Equivalence Rule in Symbolic and Verbal Contexts. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 133–162.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *Journal of Mathematical Behavior, 2* (18), 223-241.

Unidad de Enseñanza Facultad de Ingeniería (UEFI), U. d. (2012). *Informe Herramienta Diagnóstica al Ingreso Generación 2012.* Montevideo.

Vega, E. (1995). El uso del lenguaje algebraico en alumnos de Bachillerato. *Educación Matemática*(3), 27-47.

Vygotski, L. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language.* (A. Kozulin, Trad.) Cambridge, Mass.: MIT Press.

Vygotsky, L. (1994). *The Vygotsky Reader.* (R. van der Veer, & J. Valsiner , Edits.) Oxford: Blackwel.

Weber, K. (2004). Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses: A Case Study of One Professor's Lectures and Proofs in an Introductory Real Analysis Course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*, 209-234.

6 ANEXOS

6.1.1 ANEXO 1: INSTRUMENTOS USADOS EN EL PRIMER ESTUDIO

6.1.1.1 CUESTIONARIO DEL PRETEST

Los ítems 1, 4 y 8 se tomaron como traducciones, 2, 3, 6 y 7 como conversiones y 5,9 y 10 como reconocimiento.

El número en negrita que figura antes de cada ítem indica el lugar que ocupó en la prueba de diagnóstico.

En la tabla debajo de cada ítem, se indican en la primera fila el índice de dificultad y en la segunda el de discriminación.

(4) 1) La expresión $(2x)^3$ se lee:

a) El doble del cubo de un número.
b) El doble del triple de un número.
c) El cubo del doble de un número.
d) El triple del cuadrado de un número.

Índice de dificultad	18,63
Índice de discriminación	27,45

(9) 2) Considere el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ \quad - y + z = 0 \end{cases}$. Sin resolver el sistema puede afirmarse que

a) los valores de x, y, z que son solución del sistema son todos del mismo signo.
b) aunque el sistema es indeterminado, la solución de la incógnita x es 1.
c) el sistema es determinado.
d) el sistema es incompatible.

Índice de dificultad		46,57
Índice de discriminación		53,92

(17) 3) Se considera un círculo de área A = $\pi.r^2$, siendo r el radio del círculo. Si el valor de r se duplica, entonces el área del círculo resultará ser:

a) $2.\ \pi.r^2$
b) $4.\ \pi.r^2$
c) $(\pi.r^2)^2$
d) $4.\pi^2.r^2$

Índice de dificultad		62,25
Índice de discriminación		51,96

(22) 4) Suponga que le piden que siga las siguientes instrucciones:

i) Piense en un número.
ii) Multiplíquelo por 2.
iii) Al resultado réstele 8.
iv) Al número obtenido divídalo entre 4.
v) A lo que obtenga súmele 2.

Entonces, el número que usted pensó:

a) Es el resultado obtenido en v).
b) Es la mitad del resultado obtenido en v).
c) Es el doble del resultado obtenido en v).
d) No se puede calcular sólo con el resultado de v)

Índice de dificultad		64,71
Índice de discriminación		17,65

(23) 5) La suma $1\frac{2^3}{3^1}+2\frac{2^6}{3^3}+3\frac{2^9}{3^5}+4\frac{2^{12}}{3^7}+5\frac{2^{15}}{3^9}$, usando el símbolo de sumatoria, resulta expresada como:

a) $\sum_1^5 i\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}$

b) $\sum_1^5 \frac{2^{i+2}}{3^i}$

c) $\sum_1^5 i\,\frac{2^{3\mathrm{i}}}{3^{2\mathrm{i}-1}}$

d) $\sum_1^5 \frac{6^i}{3^{2\mathrm{i}-1}}$

Índice de dificultad		48,53
Índice de discriminación		73,53

(26) 6) La fórmula $R=\frac{8\mathrm{L}}{r^4}$, permite el cálculo de la resistencia R de un fluido en un tubo en función de la longitud del tubo L y del radio r. Si dados 2 tubos de igual longitud, el segundo tiene radio igual a la mitad del radio del primero, la resistencia del segundo

a) Se duplica.
b) Se divide por 2.
c) Se multiplica por 16.
d)Se divide entre 16.

Índice de dificultad		70,59
Índice de discriminación		52,94

(36) 7) Un cilindro de radio r y altura h tiene un volumen V dado por $V=\pi r^2 h$. Entonces puede afirmarse que:

a) Si para un cierto cilindro se sabe que $V=\pi r^3$, entonces la altura del cilindro es 1.
b) Si para un cierto cilindro se sabe que $V=\pi r^3$, entonces el radio y la altura del cilindro son iguales.
c) Si para un cierto cilindro se sabe que $V=\pi r^3$, entonces el radio del cilindro es 1.
d) No hay ningún cilindro tal que $V=\pi r^3$.

Índice de dificultad		73,04
Índice de discriminación		53,92

(38) 8) Suponga que a un número, designado por x, se le multiplica por 2 obteniéndose un resultado x1; a este resultado se le resta 3, con lo que se llega a x2; a este resultado se lo divide entre 4, consiguiendo el número x3; finalmente, se le suma 1 a este resultado, obteniéndose x4. Entonces:

a) $x_1=2x$; $x_2=x_1-3=2x-3$; $x_3 = \frac{x_2}{4} = \frac{2x-3}{4}$; $x_4 = x_3 + 1 = \frac{2x-3}{4} + 1$.
b) $x_1=2x$; $x_2=x_1-3=2(x-3)$; $x_3 = \frac{x_2}{4} = \frac{2(x-3)}{4}$; $x_4 = x_3 + 1 = \frac{2(x-3)}{4} + 1$.
c) $x_1=2x$; $x_2=x^1-3=2x-3$; $x_3 = \frac{x_2}{4} = 2x - \frac{3}{4}$; $x_4 = x_3 + 1 = 2x - \frac{3}{4} + 1$.
d) $x_1=2x$; $x_2=x_1-3=2x-3$; $x_3 = \frac{x_2}{4} = \frac{2x-3}{4}$; $x_4 = x_3 + 1 = \frac{2x-3+1}{4}$.

Índice de dificultad		68,14
Índice de discriminación		63,73

(39) 9) Un conjunto de j elementos puede representarse por extensión nombrando sus elementos por medio de letras con subíndices, de la forma $X=\{x_1, ..., x_j\}$. Teniendo en cuenta esta notación, resulta que:

a) Si $A=\{a_1, ..., a_p\}$ y $B=\{b_1, ..., b_{p+5}\}$, entonces A tiene menos elementos que B, pero no se puede saber cuántos menos.
b) Si $A=\{a_1, ..., a_p\}$ y $B=\{b_1, ..., b_{p+5}\}$, entonces A tiene cinco elementos menos que B.
c) Si $A=\{a_1, ..., a_p\}$ y $B=\{b_1, ..., b_{q+5}\}$, entonces A tiene más elementos que B pero no se puede saber cuántos más.
d) Si $A=\{a_1, ..., a_p\}$ y $B=\{b_1, ..., b_{p+5}\}$, entonces A tiene cinco elementos más que B.

Índice de dificultad		68,63
Índice de discriminación		62,75

(40) 10) Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{matrix} x + y = 40 \\ x = 3y \end{matrix}$. Entonces:

a) El sistema puede usarse para describir relaciones entre las edades de un padre y uno de sus hijos, y en este caso, sin resolverlo puede afirmarse que x representa la edad del hijo e y la del padre.
b) El sistema puede usarse para describir relaciones entre las edades de un padre y uno de sus hijos, y en este caso, sin resolverlo puede afirmarse que x representa la edad del padre e y la del hijo.
c) El sistema puede usarse para describir relaciones entre las edades de un padre y uno de sus hijos, y en este caso, sin resolverlo no puede decirse cuál incógnita representa la edad del padre y cuál la del hijo.
d) El sistema no puede usarse para describir relaciones entre las edades de un padre y uno de sus hijos.

Índice de dificultad		97,06
Índice de discriminación		5,88

6.1.1.2 TAREAS PROPUESTAS EN LA INTERVENCIÓN

En cada tarea se da una justificación de su inclusión en la intervención, se efectúa un análisis didáctico y se indican los niveles de desempeño registrados.

1) Un cilindro de radio r y altura h tiene un volumen V dado por $V=\pi r^2 h$. Si para un cierto cilindro se sabe que $V=\pi r^3$, establezca alguna relación entre el radio y la altura del cilindro.

Justificación: Lectura de notaciones simbólicas; procesos de transformación y de traducción.

Análisis de la tarea:

Los símbolos utilizados vienen señalados explícitamente, por lo que no hay necesidad de reconocerlos. Sin embargo, sí es preciso reconocer que el volumen V está dado como un producto (sintaxis), para poder establecer que a partir de la igualdad $\pi r^2 h=\pi r^3$ se concluye que r=h (regla sintáctica de transformación interna en el registro simbólico). Finalmente, la expresión verbal del resultado (proceso de traducción entre registros, semántica) es que en las condiciones del problema el radio del cilindro y la altura son iguales.

Niveles de desempeño detectados

0-No plantea la ecuación ni obtiene una relación.

1-No plantea la ecuación; obtiene una conclusión equivocada cuya justificación no aparece.

2-No plantea la ecuación; obtiene una conclusión equivocada cuya justificación es incorrecta.

3-No plantea la ecuación; da una relación y no verifica que es suficiente.

4-No plantea la ecuación; da una relación y verifica que es suficiente.

5-No plantea la ecuación; da una relación y verifica que es suficiente y además necesaria.

6-Plantea y resuelve la ecuación correctamente.

7-Plantea y resuelve la ecuación correctamente; además hace una correcta interpretación verbal.

2) Suponga que se define una operación * en el conjunto **R** de los números reales por medio de x*y=x+x.y-y, donde la suma, el producto y la resta son las habituales en **R**.

a) Pruebe que 0 es neutro a la derecha de esta operación, o sea, x*0=0 cualquiera sea x.

b) Averigüe si la propiedad conmutativa es válida para *, es decir, si x*y=y*x para cualesquiera x e y.

c) Halle, si existen, tres números reales a, b y c tales que (a*b)*c=a*(b*c).

d) Halle una condición necesaria y suficiente para x*y=y*x.

Justificación: Manejo de reglas sintácticas; procesos de transformación

Análisis de la tarea:

La operación que se define es arbitraria y no posee las propiedades usuales; esto busca poner énfasis en que los cálculos deben hacerse tomando sólo en cuenta las definiciones.

Niveles de desempeño detectados

0-No consigue aplicar la definición.

1-Comete errores de cálculo.

2-No extrae conclusiones de las ecuaciones que plantea; o las extrae en forma incompleta.

3-Cree que es suficiente considerar la forma para decidir si dos expresiones son diferentes; no opera correctamente.

4-Cree que es suficiente considerar la forma para decidir si dos expresiones son diferentes; opera correctamente.

5-Opera correctamente y obtiene las conclusiones requeridas.

3) Considere las siguientes matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Escribe lo que en tu opinión serían las matrices A_5 y A_6.

b) Teniendo en cuenta la forma convencional de escribir una matriz en la forma $B=(b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, escriba las matrices A_2, A_3, A_4 explicitando los valores de a_{ij} para cada par (i,j).

c) Generaliza el resultado de b) para la matriz A_n.

Justificación: Procesos de traducción entre notaciones simbólicas, manejo de reglas sintácticas, reconocimiento y representación simbólica de patrones.

Análisis de la tarea:

Para la parte a) debe reconocerse que el patrón de construcción de las matrices dadas consiste en que en la diagonal principal aparece 2 y en la "diagonal" debajo de la principal aparece 1.

En la parte b) es sencillo escribir A_2*, incluso* A_3*, en la forma pedida; sin embargo, se vuelve trabajoso para* A_4*, por lo que vale la pena empezar a pensar en una forma más general de responder la cuestión y de esta forma se prepara el camino para la pregunta siguiente.*

En la parte c) es necesario, además del reconocimiento del patrón de construcción, que se identifique con a_{ii} *a los lugares de la diagonal principal y con* $a_{i+1,1}$ *a los de la "diagonal" debajo de la principal. Es aquí donde juegan las reglas sintácticas, para traducir una posición en el cuadro en una cierta relación entre los subíndices.*

Niveles de desempeño detectados

0-No consigue detectar el patrón.

1-Detecta correctamente el patrón y se equivoca al describirlo simbólicamente.

2-Detecta correctamente el patrón y lo describe simbólicamente en forma apropiada, aunque con alguna desprolijidad.

3-Detecta correctamente el patrón y lo describe simbólicamente en forma apropiada.

4) Tome $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B_n = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Averigüe para qué valores de n, si es que hay alguno, resulta $A_n^t = A_n$.

b) Averigüe para qué valores de n, si es que hay alguno, resulta $B_n^t = B_n$.

c) Verifique que $A_1 + B_1^t = 2I$.

d) Halle n para que $A_n + B_n^t = kI$ para cierto k.

Justificación: Manejo de reglas sintácticas; transformación en un mismo registro.

Análisis de la tarea:

En las partes a) y b) debe plantearse una ecuación a partir de las definiciones de igualdad de matrices y de transpuesta de una matriz. La diferencia estriba en reconocer que en la parte a) hay una única solución, en tanto que en la b) hay infinitas.

La parte c) pide llevar a cabo una comprobación, basándose en la definición de suma de matrices y de las definiciones mencionadas antes.

La parte d) conduce al planteo de un sistema de ecuaciones a partir de la consideración de las definiciones anteriores y de la de producto de un número por una matriz.

Niveles de desempeño detectados

0-No plantea ecuaciones; no obtiene conclusiones.

1-No plantea ecuaciones y comete errores de operaciones.

2-No plantea ecuaciones, obtiene conclusiones incorrectas.

3-No plantea ecuaciones; obtiene conclusiones sin justificación.

4-Plantea correctamente algunas ecuaciones y falla en otras; obtiene conclusiones correctas.

5-Plantea y resuelve las ecuaciones correctamente, con la excepción de la primera.

5-Plantea y resuelve las ecuaciones correctamente, con excepción de la segunda.

5-Plantea y resuelve las ecuaciones correctamente, con la excepción de la última.

5) Suponga que desafía a un amigo diciéndole que puede adivinar cualquier número que él piensa. Así que usted pide a su amigo que elija un número y que:

i) Lo multiplique por 3.

ii) Sume 6 al resultado.

iii) Divida entre 3 al número obtenido.

iv) Reste 1 al número conseguido.

v) Le diga cuál es este último resultado.

Indique qué operaciones debe hacer sobre el número que su amigo le ha dado para averiguar el número que él pensó.

Justificación: Conversión; traducción desde el lenguaje usual al algebraico y desde el algebraico al usual.

Análisis de la tarea:

Es necesario que se traduzca cada instrucción verbal, de manera que se construya una ecuación que vincula el resultado obtenido en v) con el número pensado, para poder calcular la solución y describir verbalmente las operaciones a realizar.

Niveles de desempeño detectados

0-Sólo plantea un caso particular.

1-No obtiene el resultado algebraico correcto, indica los pasos intermedios, pero no verbaliza

2-Obtiene el resultado algebraico correcto, pero no verbaliza.

3-Obtiene un resultado correcto algebraicamente, sin indicar pasos intermedios, pero lo verbaliza mal.

4-Obtiene el resultado algebraico correcto, sin indicar los pasos intermedios, y verbaliza en forma adecuada.

5-Obtiene el resultado algebraico correcto, indicando los pasos intermedios y verbaliza en forma adecuada.

6) Dando todos los detalles que considere necesarios, escriba un sistema de ecuaciones cuya solución permita responder a la siguiente cuestión: Un producto de limpieza se vende en envases de 2 o de 5 litros. En una góndola de un supermercado se exhiben un total de 50 envases en los que están contenidos un total de 190 litros del producto. ¿Cuántos envases de 2 litros y cuántos de 5 hay en la góndola?

Justificación: Producción de una formulación simbólica; conversión, procesos de traducción.

Análisis de la tarea:

La primera etapa es la selección de nombres para las variables que son la cantidad de envases de 2 litros (d) y la cantidad de los de 5 litros (c). La primera frase del enunciado se puede escribir algebraicamente como d+c=50, mientras que la segunda 2d+5c=190 (procesos de traducción entre registros, semántica).

Niveles de desempeño detectados

0-No hay indicios de que comprenda lo que se pide.

1-Representa mal algebraicamente las dos relaciones entre las variables.

2-Representa mal algebraicamente una de las relaciones entre las variables.

3-Plantea el sistema correctamente, sin dar indicaciones sobre el proceso.

4-Plantea el sistema correctamente, dando indicaciones sobre el proceso.

5-Plantea el sistema correctamente, dando indicaciones sobre el proceso, y recurriendo a una representación gráfica.

7) a) Suponga que a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} son seis números. Si se le pide disponerlos en un cuadro de filas y columnas, de manera que el primer subíndice indique el lugar de la fila contado de arriba hacia abajo, y el segundo subíndice indique el lugar de la columna contado de izquierda a derecha, en las que se ubica el elemento, ¿cuántas filas y cuántas columnas tendrá ese cuadro?

b) Si tuviera una lista a_{11},..., a_{1q}, a_{21},..., a_{2q},..., a_{p1},..., a_{pq} de números:

i) ¿Cuántos números hay en la lista?

ii) Si se le pide disponerlos en un cuadro con el mismo criterio de a), ¿cuántas filas y cuántas columnas tendrá ese cuadro?

iii) ¿Entre qué valores ha de estar h y entre qué valores estará k si a_{hk} es un elemento de la lista?

iv) En las condiciones de iii), ¿qué fila y qué columna ocupa el elemento a_{hk}?

Justificación: Lectura y producción de formulaciones simbólicas; conversión, procesos de traducción.

Análisis de la tarea

La parte a) pide la producción de una representación tabular de una lista, según determinadas pautas. La parte b) requiere identificar el papel que juega p (número de filas) y el de q (número de columnas), para generalizar el procedimiento de representación de la parte a).

Niveles de desempeño detectados

0-Usa notaciones sin relación con el problema.

1-No hay indicios de dónde obtiene el resultado de las dos primeras partes; induce una generalización, pero no usa una notación correcta.

2-No interpreta correctamente el rol de los subíndices, no hace un cuadro para representar las matrices.

3-No interpreta correctamente el rol de los subíndices, hace un cuadro para representar las matrices.

4-Interpreta correctamente todos los elementos, pero se equivoca al pretender producir una expresión simbólica.

5-Interpreta correctamente todos los elementos, no hace un cuadro para representar las matrices.

6-Interpreta correctamente todos los elementos, hace un cuadro para representar las matrices.

8) a) Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ una matriz 2x1. Encuentre una matriz cuadrada, A, de orden 2 tal que $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$.

b) Tome ahora $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, una matriz 3x1. Encuentre una matriz cuadrada, B, de orden 3 tal que $B\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

c) Plantee la situación análoga a las de las partes a) y b) para una matriz 4x1.

c) Generalice las situaciones anteriores a una matriz nx1, con n cualquiera. Explique los motivos de la elección de la notación que utilice, y trate de justificar en términos simbólicos los procesos que realice.

Justificación: Generalización a partir de casos particulares a través de la generación de una representación simbólica adecuada (introducción de subíndices); elaboración de una regla sintáctica.

Análisis de la tarea:

La resolución de los tres primeras partes consiste en la construcción de una matriz. Si bien existe un procedimiento algorítmico para dar la respuesta, es bastante trabajoso aplicarlo, por lo que se espera que la respuesta sea dada apelando a algún procedimiento heurístico. La detección del patrón que resulta al observar los resultados conseguidos no parece presentar mayores dificultades. La generalización implica la introducción de un subíndice para representar un número desconocido de entradas en la matriz nx1, y en elaborar una regla sintáctica por la cual se indica cuál es el resultado del producto con la matriz que se pide hallar. Una vez hecho esto, para describir esta matriz se deberá usar un par de subíndices, indicando cuánto vale la entrada en la matriz correspondiente a cada par.

Niveles de desempeño detectados

0-No consigue formular el problema.

1-No hay indicios de dónde obtiene el resultado; da notaciones simbólicas equivocadas.

2-Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes, pero ni induce un resultado a partir de allí ni generaliza el planteo.

3-No hay indicios de dónde obtiene el resultado de las dos primeras partes; induce una generalización y usa una notación correcta.

4-Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes y luego induce el resultado de las restantes; no introduce subíndices.

5-Plantea y resuelve un sistema en las dos primeras partes y luego induce el resultado de las restantes; introduce subíndices.

5-Plantea y resuelve un sistema para cada parte; usa notación adecuada.

9) a) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Halle AB.

b) Tome ahora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Halle AB.

c) Plantee el problema análogo a los anteriores para un una matriz A cuadrada de orden 4 y una B apropiada.

d) Generalice los problemas de las partes a), b) y c) una matriz A cuadrada de orden n y una B apropiada. Explique la notación que elija para representar el problema, dando razones que justifiquen su decisión.

Justificación: Generalización a partir de casos particulares a través de la generación de una representación simbólica adecuada (introducción de subíndices); elaboración de una regla sintáctica.

Análisis de la tarea:

La resolución de los tres primeras partes consiste en un cálculo elemental del producto de dos matrices. La detección del patrón que sigue el resultado no parece presentar mayores dificultades. La generalización implica la introducción de un subíndice para representar un número desconocido de entradas en la matriz B y en elaborar una regla sintáctica por la cual se indica cuál es resultado AB. Una vez hecho esto, para describir la matriz se deberá usar un par de subíndices, indicando cuánto vale la entrada en la matriz A correspondiente a cada par.

Niveles de desempeño detectados

0-No plantea generalización ni usa notación adecuada.

1-Usa notación apropiada, pero equivoca las operaciones.

2-Plantea una adecuada generalización y usa subíndices, pero no expresa simbólicamente el resultado, aunque lo describe verbalmente.

3-Plantea una adecuada generalización, pero no usa una notación correcta.

4-Plantea una adecuada generalización y usa una notación correcta, introduciendo subíndices, pero equivoca algún resultado.

5-Plantea una adecuada generalización y usa una notación correcta, introduciendo subíndices.

10) Suponga que el subconjunto {u, v} del espacio vectorial V es LI. Para probar que el subconjunto {u, u+v} es LI se puede proceder así:

{u, u+v} es LI $\Leftrightarrow$ ($\alpha u+\beta(u+v)=o \Rightarrow \alpha=\beta=0$) $\Leftrightarrow$ ($(\alpha+\beta)u+\beta v)=o \Rightarrow \alpha=\beta=0$)

Pero como {u, v} es LI, resulta que $(\alpha+\beta)u+\beta v)=o \Rightarrow \alpha+\beta=\beta=0$ y la única solución del sistema $\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ & & \beta & = & 0 \end{array}$ es $\alpha=\beta=0$ con lo que se prueba lo deseado.

a) El problema análogo para tres vectores consiste en probar que si {u, v, z} es LI entonces {u, u+v, u+v+z} es LI. Adapte la solución anterior a este caso.

b) Formule y resuelva el problema correspondiente a cuatro vectores.

c) Analice los problemas anteriores y trate de detectar patrones en las soluciones que haya obtenido. Generalice la formulación y el proceso de solución del problema para una cantidad cualquiera de vectores. Explique la notación que elija para representar el problema, y sea tan detallado como crea necesario para establecer su argumento.

Justificación: Generalización a partir de casos particulares a través de la generación de una representación simbólica adecuada (introducción de subíndices)

Análisis de la tarea:

La resolución de los dos primeras partes consiste en una aplicación no trivial de la definición de subconjunto LI, y conduce a la formulación de sistemas homogéneos de ecuaciones cuya resolución es inmediata. La detección del patrón puede presentar dificultades si no ha quedado claro cómo se aplica la definición. La generalización implica la introducción de un subíndice para representar un número desconocido de vectores y escalares, en lugar de nombrar cada uno de estos elementos con letras diferentes, y proceder a partir de allí a la formulación de un sistema homogéneo de ecuaciones cuyas incógnitas son los escalares.

Niveles de desempeño

0. Plantea las partes a) y b) pero no generaliza.

1. Comete errores al plantear la generalización.

2. Plantea una adecuada notación para la generalización, pero no termina de formularla.

3. Generaliza usando una notación inapropiada, con subíndices para los vectores pero no para los escalares.

4. Generaliza correctamente.

6.1.1.3 ÍTEMS AGREGADOS AL PRETEST PARA CONFORMAR EL POSTEST

1) La fórmula $R = \frac{8L}{r^4}$, permite el cálculo de la resistencia R de un fluido en un tubo en función de la longitud del tubo L y del radio r. Si dados 2 tubos de igual longitud, el segundo tiene radio igual a la mitad del radio del primero, la resistencia del segundo

a) Se duplica.
b) Se divide por 2.
c) Se multiplica por 16.
d) Se divide entre 16.

2) Considere las siguientes sumas

$$1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3}$$

$$1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3} + 3\frac{2^9}{3^5}$$

Una generalización de estas sumas, expresada además con el símbolo sumatoria, es:

a) $1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3} + \cdots + n\frac{2^{3n}}{3^{2n-1}} = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{2^{3i}}{3^{2i-1}}$
b) $1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3} + \cdots + n\frac{2^{3n}}{3^{2n-1}} = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{2^{3i}}{3^{3i-1}}$
c) $1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3} + \cdots + n\frac{2^{3n}}{3^{2n-1}} = \sum_{i=0}^{i=n} i\frac{2^{3i}}{3^{2i+1}}$
d) $1\frac{2^3}{3^1} + 2\frac{2^6}{3^3} + \cdots + n\frac{2^{3n}}{3^{2n-1}} = \sum_{i=0}^{i=n} (i+1)\frac{2^{3i}}{3^{2i-1}}$

3) Un conjunto de j elementos puede representarse por extensión nombrando sus elementos por medio de letras con subíndices, de la forma X={x_1, ..., x_j}. Teniendo en cuenta esta notación, resulta que

a) Si A={a_1, ..., a_p} y B={b_1, ..., b_{p+5}}, entonces A tiene menos elementos que B, pero no se puede saber cuántos menos.
b) Si A={a_1, ..., a_p} y B={b_1, ..., b_{p+5}}, entonces A tiene cinco elementos menos que B.
c) Si A={a_1, ..., a_p} y B={b_1, ..., b_{p+5}}, entonces A tiene más elementos que B pero no se puede saber cuántos más.
d) Si A={a_1, ..., a_p} y B={b_1, ..., b_{p+5}}, entonces A tiene cinco elementos más que B.

4) Se define una operación * en el conjunto de los números reales poniendo que x*y=x+y+xy. Entonces, es falso que:

a) x*0=x y 0*y=y cualesquiera sean x e y.
b) x*y=y*x cualesquiera sean x e y.
c) x*x=0 si y sólo si x=0.
d) x*(-1)≠0 cualquiera sea x.

5) Un conjunto de j elementos puede representarse por extensión nombrando sus elementos por medio de letras con subíndices, de la forma X={x_1, ..., x_j}. Teniendo en cuenta esta notación, resulta que si el conjunto A tiene 3 elementos más que el conjunto B, se podrá escribir:

a) $A=\{a_1, ..., a_p\}$; $B=\{b_1, ..., b_{p+3}\}$.
b) $A=\{a_1, ..., a_{p+3}\}$; $B=\{b_1, ..., b_p\}$.
c) $A=\{a_1, ..., a_{p+3}\}$; $B=\{b_1, ..., b_q\}$.
d) $A=\{a_1, ..., a_p\}$; $B=\{b_1, ..., b_{q+3}\}$.

6.1.1.4 ÍTEMS USADOS PARA ESTUDIAR LA TRANSFERENCIA A CÁLCULO DE HABILIDADES DE USO DE SMS EN ÁLGEBRA

1) Considera la función dada por f(x) = sen x.
a) Calcula algunas de las derivadas de esta función hasta que puedas detectar una regularidad.
b) Describe esta regularidad verbalmente y trata de traducirla en un lenguaje simbólico apropiado.

2) Este ejercicio plantea una generalización de la regla del producto para derivadas de funciones.
a) Considera las funciones f, g y h derivables. Teniendo en cuenta que f.g.h=f.(g.h), usa dos veces consecutivamente la regla para la derivada de un producto y opera para obtener una fórmula para la derivada de f.g.h.
b) Plantea las mismas cuestiones que en a) para un producto de cuatro funciones.
c) Generaliza los resultados anteriores para el producto de un número indeterminado de funciones, eligiendo una notación apropiada para representar la situación.

3) Considera la función f dada por $f(x)=\frac{1}{1+x}$
a) Calcula las primeras cinco derivadas de f.
b) Trata de encontrar alguna regularidad que vincule el orden de las derivadas con la fórmula que obtuviste en cada caso; luego describe este patrón verbalmente; finalmente trata de escribir una fórmula para una derivada cualquiera de f, usando los sistemas matemáticos de símbolos que te parezcan más apropiados.
c) Usando las propiedades que conoces y la fórmula hallada en b) da una fórmula para una derivada cualquiera de $g(x)=\frac{1}{1-x}$.

4) Un número α es raíz del polinomio P con orden de multiplicidad 2 si y sólo si existe un polinomio Q tal que $P(x)=(x-\alpha)^2 Q(x)$ y $Q(\alpha)\neq 0$.
a) Verifica que si α es raíz del polinomio P con orden de multiplicidad 2 entonces $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ y $P''(\alpha)\neq 0$
b) Define lo que sería una raíz con orden de multiplicidad 3 y enuncia un resultado como el de la parte a) para esta definición.
c) Generaliza lo anterior, definiendo lo que sería una raíz con orden de multiplicidad n y enuncia y demuestra un resultado como el de la parte a) para esta definición.

5) Recuerda que la regla de la cadena establece que si f es derivable en a) y g derivable en f(a), entonces g∘f es derivable en a y $(g\circ f)'(a)=g'(f(a)).f'(a)$. Entonces, si h es una función derivable en a y en h(a) resulta
a) $(h\circ h)'(a)=h(h'(a)).h'(a)$.

b) $(h \circ h)'(a)=h'(h(a)).h'(a)$.
c) $(h \circ h)'(a)=h'(h'(a)).h'(a)$.
d) $(h \circ h)'(a)=h'(h'(a)).h(a)$.

6.1.1.5 PAUTAS PARA LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS ESPECIALES

1) Identifique los símbolos que aparezcan utilizados en el enunciado, teniendo en cuenta que pueden ser símbolos de uso generalizado o de uso particular en el enunciado que se analiza.

a) Si son símbolos de uso generalizado, asegúrese de que interpreta correctamente su significado; en particular, si el significado depende del contexto en el que se usa el símbolo, preste atención a los elementos que determinan cuál de las posibles interpretaciones es la correcta para el caso en consideración.

Por ejemplo, $\{a,b,c\}$ es una notación usual para denotar un conjunto con los elementos a, b y c. Sin embargo, $\{\{x\}\}$ denota al conjunto cuyo elemento es otro conjunto, concretamente $\{x\}$, que tiene como único elemento a x. En este caso, es el contexto el que lleva a identificar al conjunto $\{x\}$ como elemento del conjunto $\{\{x\}\}$.

b) Si son símbolos de uso particular, encuentre en el enunciado las pautas que permiten su interpretación.

Por ejemplo, si se habla del volumen de un cilindro y se escribe la fórmula $V=\pi r^2 h$, debe interpretarse V como el volumen, r como el radio de la base y h como la altura para que la fórmula tenga el sentido que se pretende.

2) Reconozca las transformaciones de expresiones simbólicas que aparecen en la tarea.

a) Preste atención a las reglas sintácticas, que se refieren a propiedades generales, usadas para efectuar estas transformaciones.

Por ejemplo, en una formulación algebraica como $ab(a^2+b^3)$, mediante la propiedad distributiva puede escribirse aba^2+abb^3; si en el primer sumando se usa la propiedad conmutativa, se obtiene aa^2b+abb^3; finalmente aplicando propiedades de la potencia se consigue a^3b+ab^4. De manera que $ab(a^2+b^3)= a^3b+ab^4$.

b) Identifique los elementos contextuales que permiten transformaciones particulares.

Por ejemplo, si en ejemplo anterior se sabe además que $a=b^2$, se tendrá que $ab(a^2+b^3)=b^2b[(b^2)^2+b^3]=b^3(b^4+b^3)$.

3) Interprete las formulaciones que aparezcan, traduciéndolas a otro tipo de representación.

a) Cuando aparezcan transformaciones de expresiones simbólicas en otras, establezca las transformaciones equivalentes en las traducciones que había realizado.

Por ejemplo, el área S de un prisma recto de lados a, b y c es $S=2(ab+ac+bc)$; pero si se habla de un prisma de base cuadrada, puede ponerse $a=b$, con lo que resulta $S=2(a^2+2ac)$.

b) Tenga en cuenta elementos del dominio de conocimiento que explican ciertas formulaciones.

Por ejemplo, si P y L representan peso (en toneladas) y longitud (en pies), respectivamente, de cierta especie de cetáceo, y t el tiempo en meses, se tiene

P=3t+3 y L=4t+24, lo que puede interpretarse diciendo que al nacer (t=0) estos cetáceos pesan 3 toneladas y mide 24 pies, y aumentan 3 toneladas su peso y 4 pies su longitud cada mes; de las ecuaciones anteriores puede escribirse $L = \frac{4}{3}P + 20$; aquí no tiene sentido decir que cuando pesan 0 toneladas miden 20 pies, pero podría decirse que cuando pesan 3 toneladas miden 24 pies y que aumentan 4 pies por cada aumento de 3 toneladas.

4) Elija símbolos apropiados para las formulaciones que produzca.

a) Identifique las variables apropiadas para la descripción del problema.

Puede haber varias variables independientes y varias dependientes, y que es el contexto del problema el que determina cuáles son las de cada categoría.

b) Atienda a representar correctamente las relaciones entre las variables.

Algunas de las relaciones que sea posible establecer pueden ser intrascendentes desde el punto de vista de la búsqueda de la solución del problema, por lo que una vez establecidas, deberán seleccionarse aquellas relevantes para la situación analizada.

5) Preste atención a producir formulaciones correctas desde el punto de vista sintáctico.

a) Revise el uso de propiedades algebraicas.

Trate de identificar explícitamente el uso que haga de las diferentes propiedades.

b) Cuide que las transformaciones que lleve a cabo sean correctas.

Busque efectuar verificaciones de sus cálculos.

6.1.2 ANEXO II: INSTRUMENTOS USADOS EN EL SEGUNDO ESTUDIO

6.1.2.1 CUESTIONARIO ALGEBRAICO

Las siguientes preguntas se refieren a la función $f(x) = x^3-3x+2 = (x+2)(x-1)^2$.

Marque la opción que considere correcta (en cada pregunta hay sólo una opción correcta).

1) Para probar que f(x) está entre 0 y 4 cuando x está entre -2 y 2:

a) alcanza con ver que f(-2)=0 y f(2)=4.

b) hay que resolver la inecuación $-2<f(x)<2$.

c) es suficiente ver que si x está entre -2 y 2, la inecuación $0<f(x)<4$ se satisface.

d) alcanza con, además de calcular f(-2) y f(2), hallar f en algunos valores de x entre -2 y 2 y verificar que en todos ellos f(x) está entre 0 y 4.

2) La afirmación “Cuando x está entre -2 y 0, resulta que f(x) está entre 0 y 20”:

a) es cierta porque la inecuación $0<f(x)<20$ tiene como solución a las x que están entre -2 y 1 o a las que están entre 1 y 3.

b) es falsa porque f(0)=2 que no está entre -2 y 0.

c) es cierta porque $f(-2)=0$ y $f(0)=2<20$.

d) es falsa porque $0<f(2)=4<20$ y 2 no está entre -2 y 0.

3) La afirmación “f(x) es negativa sólo si x menor que -4”:
a) es falsa porque, por ejemplo, $f(-3)<0$ y $-3>-4$
b) es cierta porque si $x<-4$ entonces $f(x)<0$
c) es cierta porque $f(-4)=-16<0$
d) es falsa porque la inecuación $f(x)<0$ tiene como solución $x<-2$

4) Para que f(x) esté entre 2 y 4 es necesario que:
a) x esté entre -1 y 0 porque $f(-1)=4$ y $f(0)=2$ y f es monótona decreciente entre -1 y 0.
b) x esté entre $3^{1/2}$ y 2 porque $f(3^{1/2})=2$ y $f(2)=4$ y f es monótona decreciente entre $3^{1/2}$ y 2.
c) x esté entre -1 y 0 o entre $3^{1/2}$ y 2 porque ésta es la solución de la ecuación $2<f(x)<4$.
d) x esté entre -1 y 0 o entre $3^{1/2}$ y 2 porque, por ejemplo, 1 no está entre los valores de x mencionados y $f(1)=0$ no está entre 2 y 4.

5) Para probar que x está antes de -2 cuando f(x) es menor que -1:
a) es suficiente ver que si f(x) menor que -1, entonces es menor que 0 y notando que $f(x)=(x+2)(x-1)^2$, debe ser x+2 menor que 0.
b) alcanza con ver que cuando x es menor que -2, resulta f(x) menor que -1.
c) hay que resolver la inecuación $f(x)<-2$.
d) alcanza con verificar que f(x) es menor que -1 para algunos valores de x menores que -2.

6) Para que f(x) sea menor que 4 tiene que ocurrir que:
a) x esté entre -1 y 1, porque f(x) es menor que 4 para esos valores de x.
b) x sea menor que -1, porque f(x) es menor que 4 para esos valores de x.
c) x sea menor que 2 y distinto de -1, porque esa es la solución de la inecuación $f(x)<4$.
d) x esté entre -1 y 2, porque f(x) es menor que 4 para esos valores de x.

7) La afirmación” Para que f(x) sea positivo es suficiente que x sea positivo y distinto de 1”:
a) es falsa porque f(-1) es positivo y -1 no es positivo.
b) es falsa porque f(x) es positivo para x mayor que -2 y distinto de 1.
c) es cierta porque, por ejemplo, 2 es positivo y f(2) es positivo.
d) es cierta porque si x es positivo y distinto de 1 resulta $f(x)>0$.

8) Para estar seguro de que x está entre 0 al menos y 2 a lo sumo:
a) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que si f(x) menor que 0 implica x menor que -2 y f(x) mayor que 4 implica x mayor que 2
b) f(x) debe estar entre 0 y 1, ya que $f(0)=2$ y $f(1)=0$, ya que f es monótona decreciente entre 0 y 1.
c) f(x) debe ser menor que 4 porque f(x) es mayor que 4 si x es mayor que 2.
d) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que $f(0)=2$ y $f(2)=4$.

6.1.2.2 CUESTIONARIO GRÁFICO

Cuestionario gráfico (cálculo diferencial, condicional)

Las siguientes preguntas se refieren a la gráfica dada.

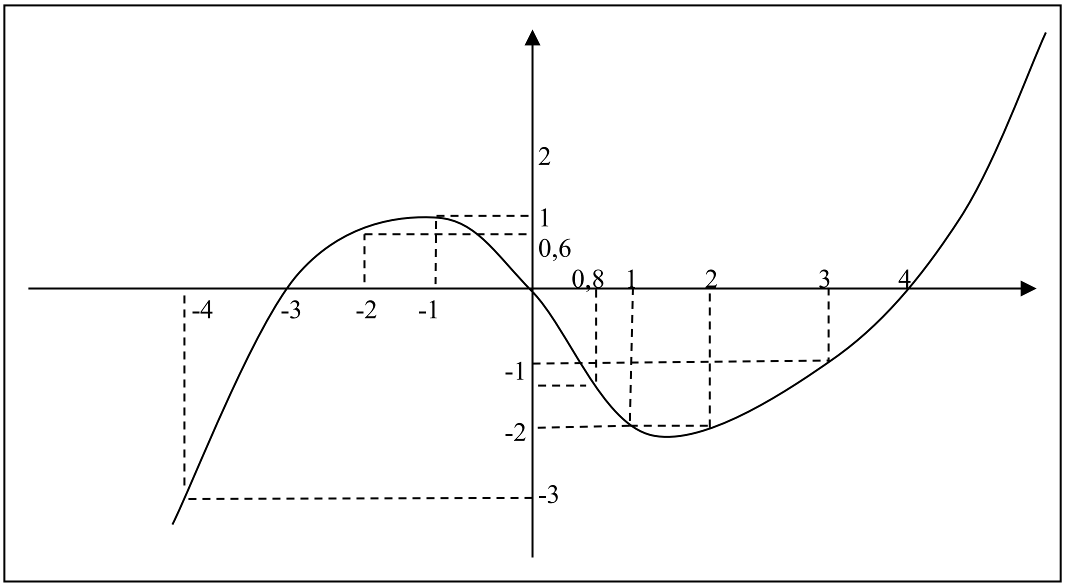

Figura 5: Gráfica del cuestionario gráfico del segundo estudio rrecta)

1) Es suficiente que x entre -2 y 3 para que f(x) esté:
a) entre -1 y 1
b) entre -3 y 2
c) entre -2 y 1
d) entre -1 y 0,6

2) Si x está entre -3 y 1, entonces f(x) está:
a) entre -4 y -1
b) entre -2 y 1
c) entre -2 y 0
d) entre 0 y 1

3) Para que f(x) esté entre -2 y -1 alcanza con que x esté:
a) entre 1 y 3
b) entre 0,8 y 1
c) entre 0,6 y 1
d) entre 0 y 1

4) Para que f(x) esté entre -3 y 0 es necesario que x esté:
a) entre -4 y -3
b) entre 0 y 1
c) entre -3 y 0
d) entre -4 y -3 o entre 0 y 4

5) Para que f(x) esté entre 0 y 1, x debe estar:
a) entre -3 y 0 o entre 4 y un número α (que es mayor que 4 y no se puede determinar a partir de la información de la gráfica) donde a función toma el valor 1.
b) entre -3 y -1

c) entre -1 y 0
d) entre 0 y 1

6) Para que x esté entre -4 y 0, f(x) necesita estar:
a) entre -3 y 1
b) entre -3 y -2
c) entre -4 y un número α (que es mayor que 4 y no se puede determinar a partir de la información de la gráfica) donde a función toma el valor 1.
d) antes de -3 o entre 0 y 4

7) Sólo si f(x) está entre -2 y -1 resulta que:
a) x está entre 2 y 3
b) x está entre 0,6 y 1
c) x es mayor que -4
d) x es menor que 1

8) Para que x sea menor que -3 alcanza con que:
a) f(x) sea menor que 0 y mayor que -2
b) f(x) sea menor que -2 y mayor que -3
c) f(x) sea menor que -3
d) f(x) sea mayor que -4

6.1.3 ANEXO III: INSTRUMENTOS USADOS EN EL TERCER ESTUDIO

6.1.3.1 CUESTIONARIO DEL PRETEST DEL TERCER ESTUDIO

El que sigue es el cuestionario del pretest del tercer estudio.

1) Se afirma que:
"Si existen marcianos, entonces las ranas tienen dientes."
Esta afirmación
a) Es falsa porque las ranas no tienen dientes.
b) Es falsa porque no existen marcianos.
c) Es cierta porque las ranas no tienen dientes.
d) Es cierta porque no existen marcianos.

2) Se hace la siguiente afirmación sobre los números enteros mayores que 0 y menores que 10:
"Si n es un número impar, entonces n+1 es múltiplo de 3"
Esta afirmación es cierta:
a) Sólo para n=2, n=4, n=5, n=6 y n=8.
b) Sólo para n=5.
c) Sólo para n=2, n=5 y n=8.
d) Sólo para n=1 y n=5.

3) Se postula una relación causal entre llover y mojarse diciendo que:

“Si llueve entonces me mojo.”

Algunos amigos suyos le hacen comentarios acerca de esta afirmación. Indique cuál de los siguientes comentarios es correcto:

a) La relación es falsa porque alguna vez me he mojado, aunque no llueva.
b) La relación es falsa si no me mojo.
c) La relación es falsa si no llueve.
d) La relación es falsa porque alguna vez no me he mojado, aunque llueva.

4) Las siguientes afirmaciones son ciertas:

“Nacional es el Campeón Uruguayo 2012”

“La Antártida es un continente helado”

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) Si Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida es un continente helado.
b) Si la Antártida es un continente helado, entonces Nacional es el Campeón Uruguayo 2012.
c) Si la Antártida no es un continente helado, entonces Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012.
d) Si Nacional es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida no es un continente helado.

5) La siguiente es la gráfica de una función f definida en el intervalo $\{x \,/\, -4 \leq x \leq 4\}$.

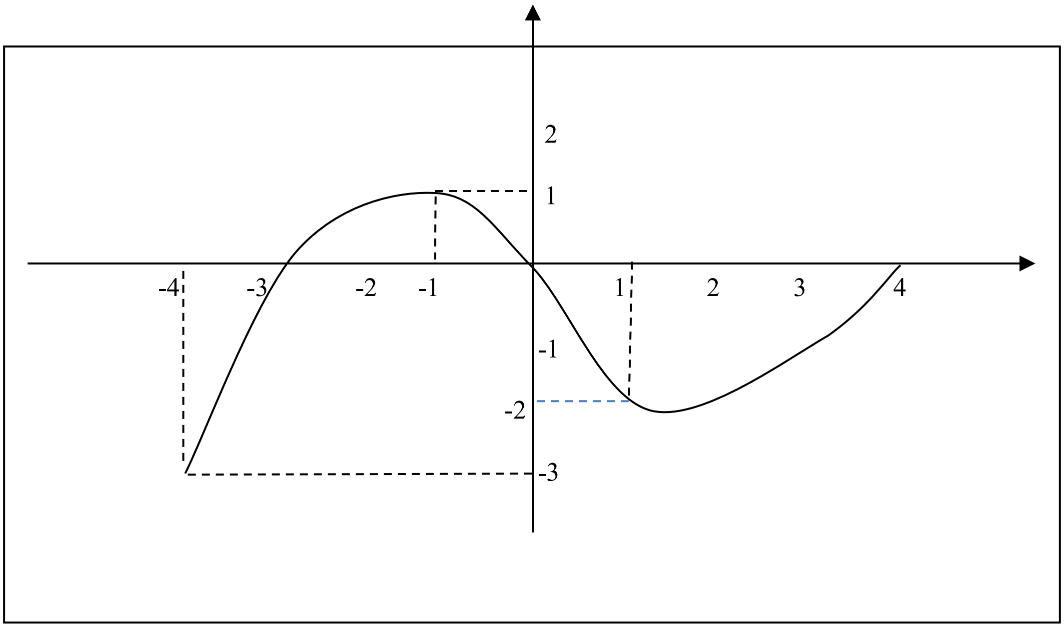

Figura 6: Gráfica del pretest del grupo de Cálculo del tercer estudio

Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función f es falsa:

a) Si $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $-4 \leq x \leq 0$.
b) Si $-3 \leq x \leq 0$, entonces $0 \leq f(x) \leq 2$.
c) Si $f(x) > 1$ entonces $x < 0$.
d) Si $1 < x \leq 4$ entonces $f(x) > -2$.

6) Se dan las siguientes afirmaciones:

Llueve o está frío.

No llueve.

Si no llueve y está frío, nieva.

Si estas afirmaciones son ciertas a la vez, es posible concluir que:
a) Alguien se moja.
b) No está frío.
c) Llueve.
d) Nieva

6.1.3.2 CUESTIONARIO DEL POSTEST DEL TERCER ESTUDIO

6.1.3.2.1 GRUPO I

El siguiente es el postest del grupo I del tercer estudio

1) Se hace la siguiente afirmación sobre los números enteros mayores que 0 y menores que 10:

"Si n es un número impar, entonces n+1 es múltiplo de 3"

Esta afirmación es cierta:
a) Sólo para n=2, n=4, n=5, n=6 y n=8.
b) Sólo para n=5.
c) Sólo para n=2, n=5 y n=8.
d) Sólo para n=1 y n=5.

2) Se afirma que:

"Si existen marcianos, entonces las ranas tienen dientes."

Esta afirmación
a) Es falsa porque las ranas no tienen dientes.
b) Es falsa porque no existen marcianos.
c) Es cierta porque las ranas no tienen dientes.
d) Es cierta porque no existen marcianos.

3) Las siguientes afirmaciones son ciertas:

"Nacional es el Campeón Uruguayo 2012"

"La Antártida es un continente helado"

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
a) Si Nacional es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida no es un continente helado.
b) Si la Antártida es un continente helado, entonces Nacional es el Campeón Uruguayo 2012.
c) Si la Antártida no es un continente helado, entonces Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012.
d) Si Nacional no es el Campeón Uruguayo 2012, entonces la Antártida es un continente helado.

4) Suponga que el conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es no satisfactible y B es una fórmula cualquiera. Indique cuál de los siguientes argumentos es correcto:

a) B no es consecuencia lógica de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, porque no se puede conseguir que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sean ciertas a la vez, y entonces $(A_1)\wedge(A_2)\wedge \ldots\wedge(A_n)\rightarrow(B)$ no siempre toma el valor cierto.
b) B es consecuencia lógica de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, porque no se puede conseguir que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sean ciertas a la vez, y entonces $(A_1)\wedge(A_2)\wedge \ldots\wedge(A_n)\rightarrow(B)$ siempre toma el valor cierto.
c) B no es consecuencia lógica de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, porque no se puede conseguir que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sean ciertas a la vez, y entonces no es aplicable la definición de consecuencia lógica.
d) B no es consecuencia lógica de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, porque en la definición se pide considerar los casos en los que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sean ciertas a la vez, y no hay ninguno..

5) Una relación $R\subset AxA$ posee la propiedad transitiva si y sólo si cualesquiera sean a_1, a_2 y a_3 en A tales que $(a_1,a_2) \in R$ y $(a_2,a_3) \in R$ ocurre también que $(a_1,a_3) \in R$.
Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
a) Si $(a_1,a_2) \in R$ y $(a_2,a_1) \in R$ y R posee la propiedad transitiva entonces $(a_2,a_2) \in R$.
b) Si no existen a_1, a_2 y a_3 en A tales que $(a_1,a_2) \in R$ y $(a_2,a_3) \in R$, entonces R no posee la propiedad transitiva.
c) Si existen a_1, a_2 y a_3 en A tales que $(a_1,a_2) \in R$, $(a_2,a_3) \in R$ y $(a_1,a_3) \notin R$., entonces no R posee la propiedad transitiva.
d) Si $(a_1,a_2) \in R$ y $(a_2,a_3) \in R$ y R no posee la propiedad transitiva entonces $(a_1,a_3) \notin R$.

6) Considere la siguiente matriz **A** que representa una relación R definida en el conjunto $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:
a) La matriz **A** no es simétrica; por lo tanto, R no verifica la propiedad recíproca o simétrica.
b) El par (x_4, x_4) no pertenece a R; por eso, R no verifica la propiedad idéntica.
c) No existen elementos x_i y x_j con $i\neq j$ tales que (x_i, x_j) y (x_j, x_i) están en R; por lo tanto, R no posee la propiedad antisimétrica.
d) No existen elementos x_i, x_j y x_k tales que (x_i, x_j) y (x_j, x_k) están en R y (x_i, x_k) no está en R; por lo tanto, R posee la propiedad transitiva.

6.1.3.2.2 GRUPO O

1) La siguiente es la gráfica de una función f definida en el intervalo $\{x \,/\, -4 \leq x \leq 4\}$.

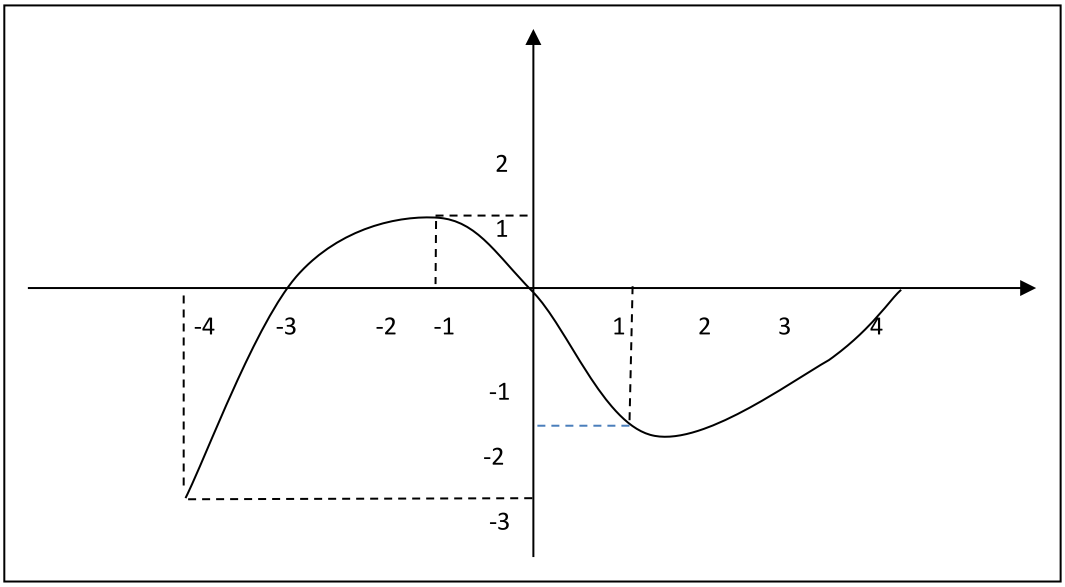

Figura 7:Gráfica del postest del grupo de Cálculo del tercer estudio

Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función f es falsa:

A) Si $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $-4 \leq x \leq 0$.
B) Si $-3 \leq x \leq 0$, entonces $0 \leq f(x) \leq 2$.
C) Si $f(x) > 1$, entonces $x < 0$.
D) Si $1 < x \leq 4$, entonces $f(x) > -2$.

2) En la definición de límite de una función en un punto se establece que

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \leftrightarrow$ dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon$

a) Decir si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon$ es lo mismo que decir que no puede encontrarse x que satisfaga $0<|x-a|<\delta$ y no satisfaga $|f(x)-b|<\varepsilon$, dicho de otro modo, es imposible encontrar x tal que $0<|x-a|<\delta$ y $|f(x)-b|$ □ε.
¿Está de acuerdo con esto? Explique su posición en el espacio que sigue.

b) Acepte que lo expresado en a) es cierto, aun cuando no haya estado de acuerdo con ello.
Suponga que se da la función f mediante la siguiente fórmula: $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$. Resulta que f está definida en el conjunto {0}□{ x / x□}.

Para estudiar si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ tomemos $\delta={}^1/_2$.
Entonces, no importa cuál sea $\varepsilon>0$, es imposible encontrar un x tal que

$0<|x - 0|<\delta={}^1/_2$ y $|f(x)-1|$ □ε, porque es imposible encontrar un x tal que $0<|x|<\delta={}^1/_2$ para el cual exista f(x) y pueda ocurrir que $|f(x)-1|\geq\varepsilon$.

b1) ¿Opina que este argumento es correcto para justificar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$? Explique su respuesta en el espacio disponible, argumentando la respuesta en relación con la definición de límite y lo expresado en a).

b2) ¿En qué cambia el argumento anterior si se pone b en lugar de 1 cuando b es cualquier número real?

b3) Comente este resultado en relación con el teorema de unicidad del límite, que establece que si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} f(x) = c$ entonces, b=c.

3) Alguien le propone a usted el siguiente enunciado:

"Si la función h es derivable en a, entonces la función h^2 es derivable en a"

Entonces:

a) El enunciado es falso, porque tomando $h(x) = |x|$ resulta $h^2(x)= (|x|)^2 = x^2$; así que h no es derivable en 0 pero h^2 sí lo es.

b) El enunciado es cierto, porque $h^2 = h.h$ y puede aplicarse el teorema de la derivada del producto, que establece que si dos funciones son derivables en a, entonces su producto es derivable en a.

c) El enunciado es cierto, porque tomando $h(x) = x$ resulta $h^2(x) = x^2$ y tanto h como h^2 resultan derivables en 0.

d) El enunciado es falso, porque si fuera cierta, como $h^2(x)\geq 0$ para cualquier x, implicaría que sólo las funciones no negativas son derivables, y hay funciones derivables que son negativas.

4) Considere la función f dada por f(x)=x para cada x real; con f^2 se representa a la función tal que $f^2(x)=(f(x))^2=x^2$ y con $|f|$ a la función tal que $|f|(x)= |f(x)|= |x|$

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) Como f no tiene ni máximo ni mínimo relaticos, tampoco los tiene la función f^2.

b) Como $|f|$ es derivable en 0, f también lo es.

c) Como f es creciente en su dominio, f^2 también lo es.

d) Como $|f|$ no es derivable en 0, entonces $f^2= |f|^2$ tampoco lo es.

5) Considere la siguiente afirmación:

"Si una función f es derivable en a, entonces f es continua en a"

Para probar que esta afirmación es falsa:

a) Alcanza con encontrar una función derivable en a y no continua en a.

b) Alcanza con encontrar una función continua en a y no derivable en a.

c) Es necesario ver que si una función es no derivable en a, entonces no es continua en a.

d) Es necesario ver que si una función es continua en a, entonces es derivable en a.