

Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

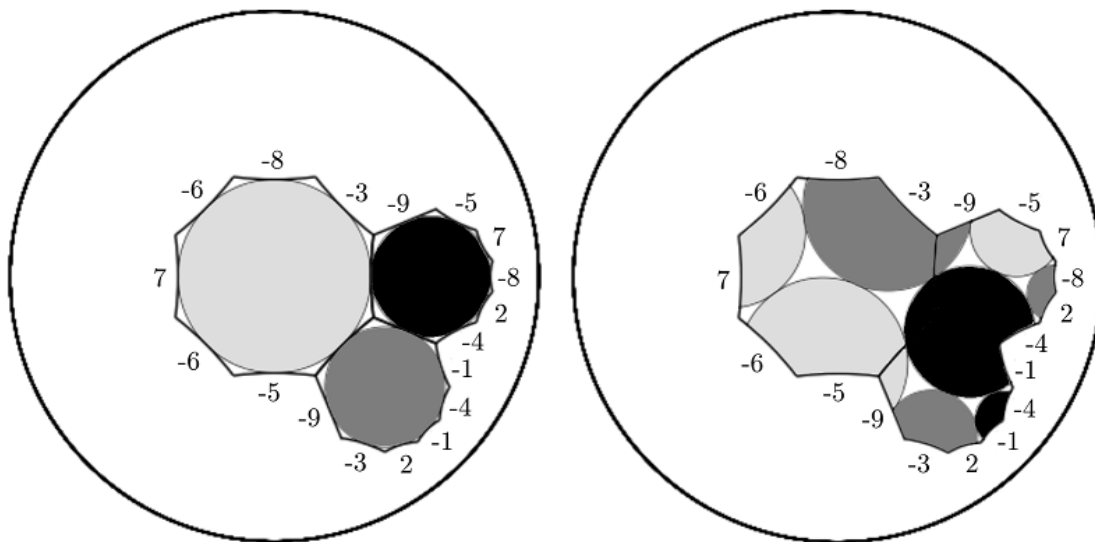


Discos Métricos en Superficies Planas e Hiperbólicas

Tesis presentada por
Cristian Renato Reyes Monsalve
para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Dirigido académicamente por
Ernesto Girondo

Madrid, diciembre de 2021



Dos empaquetamientos distintos de 3 discos disjuntos de radio máximo sobre la misma superficie no-orientable de género 3.

Agradecimientos

Mientras todavía cursaba el magíster en matemática en mi tierra natal me pasó algo muy interesante, justamente mientras barajaba la posibilidad de estudiar un doctorado fuera del país. No tenía apuro, pero el asunto siempre rondaba por mi mente, dedicando de vez en cuando un tiempito a hacer averiguaciones por internet. Una de las opciones que más me llamó la atención en mi búsqueda de programas doctorales fue que encontré a un caballero que estudiaba geometría hiperbólica, grupos Fuchsianos y superficies compactas en España. Lo tuve en mi mente por unos días hasta que recibí un inesperado correo del grupo de geometría de la UFRO, en el sur de mi país, en el cual me comunicaban que precisamente este hombre sería el único invitado extranjero a exponer allí, a finales del 2015. Impactado por semejante sincronidad le conté a mis padres que viajaría al sur para conocerlo y comentarle mi intención de trabajar con él en el futuro. De esa manera fue que en Temuco, la antigua frontera entre el conquistador español y el mapuche guerrero, comenzó mi propia aventura. Fue en ese contexto en el cual Gabino González-Diez escuchó mis palabras, y ante mi interés de estudiar bajo su tutela me propuso formar un grupo con otros dos investigadores, entre ellos el geómetra Ernesto Gironde. Al poco tiempo ya estaba intercambiando correos con Gabino y con Ernesto, con un ojo en mi tesis de magíster y el otro en Madrid. Por todo lo anterior el lector comprenderá que no tengo palabras para definir lo agradecido que estoy con Gabino, quien me escuchó con gran amabilidad y me enlazó con Ernesto, mi actual tutor.

Mi aventura en estas tierras ha sido tremenda desde el mismísimo momento en que pise el aeropuerto de Barajas el 20 de octubre del 2017, y si pude llevarla a buen puerto fue gracias a la atenta y comprensiva guía de Ernesto, a quien le agradezco la paz que me proporcionó para poder estudiar bajo su amparo matemático. Gracias a él no solo he *aprendido* contenidos de geometría (tema que me apasiona desde que tenía 15 años), sino también he *disfrutado* al sumergirme en el disco de Poincaré. Por eso les agradezco a Gabino y a Ernesto por haberme dado la oportunidad de estar aquí, y a Ernesto en particular por haber estado siempre presente en toda mi estadía, estos largos e interesantes 4 años.

Adicionalmente me gustaría agradecer, en el contexto UAM, a Eugenio Hernández, que más que un matemático fue para mí un compañero del fútbol y una sonrisa en los pasillos. De la misma manera me gustaría darle las gracias a Ligia Șerban, con quien nos reímos y compartimos en múltiples ocasiones cuando nos veíamos en los pasillos o cuando limpiaba mi despacho. Finalmente me gustaría darle las gracias a Nieves García,

secretaria de Gestión de Doctorado, quien año tras año me ayudó amablemente a realizar mis matrículas, aún sabiendo que era yo quien debía hacerlas online, y aún sabiendo que algunas de sus propias colegas le decían que ellas no me ayudarían. Mi gratitud hacia estas tres personas que pasaron por mi vida de una manera alegre y desinteresada.

Si salgo de las dependencias de Cantoblanco y viajo a Madrid centro, considero inevitable agradecer, en primer lugar, a la Asociación Cultural Chilena Cal y Canto, un grupo de bailes tradicionales chilenos que me acogió en esta ciudad sin yo saber bailar ni nada de folklore. A través de ella conocí gente muy interesante que me han permitido reforzar lo valioso que es la amistad, el comprimiso, el respeto, así como también profundizar en lo difícil que son las relaciones humanas, lo delicado que es el orgullo y la falta de comunicación. Ale, Abraham, Mary, Mauri, Lucy, Sofi, Pantera, Johanna, Darío, Ale, Alejandro, Daniela, Francesca, Itziar, Fabi, Belén, Ángela, Cristina, Marta, Dani, Norma, Erika, Margarita, Sole, Lesly, Yvonne: ustedes me han confirmado, ya haya sido por acción u omisión, la famosísima enseñanza moral que nos recalcó un ya anciano Bertrand Russell: *el amor es sabio; el odio es tonto*. En particular quiero destacar a mis amigos Abraham y Alejandra por compartir su tiempo conmigo, tanto en los múltiples viajes que hicimos como en las comilonas que nos mandamos; así como también agradecer a Mary, Johanna y Cristina, con quienes tuve el privilegio de intercambiar palabras que me han hecho reflexionar sobre la amistad y la vida en general.

En segundo lugar me gustaría agradecer a la gente que conocí a través del Centro Avagar de Yoga y Meditación, sitio en el cual me acogieron con mucho cariño y me permitieron vivenciar algunas de las bondades del Yoga Kundalini. En particular me gustaría agradecerle a Carlota por su buena disposición para responder mis dudas sobre budismo; a Marissa por sus consejos en lo que respecta a mis múltiples e interminables dolores musculares; y a Rafael Eguilaz, por ser una de las pocas personas que conozco que irradia tanta paz, siendo para mí una encarnación de la amabilidad y la escucha atenta. Cada vez que comparto con él siento cómo me transmite parte de su bondad. También quiero agradecer a Óscar Esquivias, su pareja, por haberme regalado un libro tan bonito, así como a ambos por las interesantes conversaciones y salidas en las que hemos compartido.

En tercer lugar me gustaría mostrar mi gratitud hacia mis caseros César y María, quienes me acogieron en su hogar casi inmediatamente después de conocerme, *incluso sabiendo que soy chileno*, y con quienes he compartido todo este tiempo en el pequeñito piso en el que vivimos. Les agradezco mucho cada almuerzo, cada salida juntos y cada vez que nos preocupamos los unos por los otros cuando estuvimos malitos. De la misma manera quiero agradecer a Wilmer y a Rocío, ambos seres de luz que desde el primer momento en que nos vimos conectamos inmediatamente. Desde que me invitaron a almorzar aquel día que andaba vagando por Plaza de Castilla buscando piso, hasta el mismísimo día de hoy, siempre estuvieron presentes en mi estadía de la manera más pura y desinteresada posible, entregándome cariño, alegría y buenos consejos. Los quiero mucho. Siempre los llevaré en mi corazón.

En cuarto lugar me gustaría agradecer a dos grupos de personas maravillosas que me han hecho crecer enormemente estando aquí en España: primeramente quiero expresar mi gratitud hacia el grupo salmantino de estudios integrales de Ken Wilber por permitirme acceder a una instancia tan enriquecedora como lo son las reuniones que realizamos cada mes. Muchísimas gracias Teresa, Roge, Fernando, Alejandro, César, Loli, Florencio, Lola. Cada uno de ustedes, con sus distintas personalidades y perspectivas, me han hecho reflexionar sobre las mías propias, mostrándome una pluralidad de maneras de ser un individuo crítico, profundo y humilde, capaz de mirar la vida desde perspectivas frescas y provechosas. ¡Seguiremos en contacto! También quiero darle las gracias al grupo RdA, compuesto de gente tremendamente comprometida con la conexión de lo sagrado con lo cotidiano. Infinitas gracias a Ulan, María, Oscar, Sandra, y a todo el grupo de personas que hemos pasado por sus manos, que con el compartir de las experiencias y consejos ponen luz sobre el delicado camino de la *comprensión*.

En quinto y último lugar me gustaría agradecerle a ciertas personas que probablemente nunca leerán este trabajo, pero que la influencia que han ejercido sobre mí a través de sus obras o sus palabras directas me ha hecho reflexionar y crecer en aspectos que probablemente en Chile nunca hubiera concebido posibles. Estas personas son Paul Feyerabend, Richard Tarnas, Stanislav Grof, Ken Wilber, Joseph Campbell, William James, Rupert Sheldrake, Peter Kingsley, Platón, Patrick Harpur, Gary Lachman, Juan Arnau, Luce Lopez-Baralt, Iker Puente, Jorge Ferrer, Josep María Fericgla, Vicente Merlo, F. Nietzsche, José Antonio Vázquez Mosquera, Stefano Mancuso, Jacobo Siruela, Azucena Hernández Pérez, Owen Barfield, Jean Gebser, Raimon Panikkar y Stephen Gaukroger. En particular me gustaría destacar al filósofo Vicente Merlo, que más que un pensador lo considero un verdadero sabio, una persona que encarna de una excelente manera la curiosa mezcla entre el “saber” y el “actuar”, un maestro del pensar y del ser. Tanto él como las otras personas que nombré han literalmente abierto mis ojos con sus obras, a tal punto que el Cosmos (¿o el Kosmos?) se me presenta como una aventura fascinante y misteriosa, que va mucho más allá de los estrechos cánones científicos (cientificistas), filosóficos o discursivos de cualquier tipo. Mientras la palabra busca delimitar, arrinconar y controlar, el Misterio nos reorienta pidiéndonos apertura, lo cual, eventualmente, disuelve todas las fronteras.

Volviendo mis ojos y mi corazón hacia la patria que me vio nacer me gustaría comenzar agradeciendo a mi pareja Pamela Paredes, quien ha sido un permanente apoyo mientras he vivido aquí. A pesar de los breves periodos al año que nos vimos durante todo este tiempo, hemos sido capaces de conservar nuestro amor para con el otro. Podría intentar escribir aquí sobre todo lo que he aprendido gracias al cariño que nos hemos dado, *pero el margen de esta tesis es demasiado pequeño para contenerlo*. Solo me resta esperar el momento en que nos reencontremos nuevamente, en una instancia que ninguna tesis ni palabra podrá nunca describir. Te amo $+\infty$ Pameliiiii.

Finalmente quiero destacar a mis padres y a mi hermano, quienes siempre, en todo momento, estuvieron atentos a mi bienestar, tanto en lo académico como en lo físico/emocional. Gracias a la distancia que nos separó por tantos años hemos entendido que somos seres independientes pero íntimamente ligados por el amor, un amor que nos une desde mi propio nacimiento, e incluso antes. Reflexionando sobre ustedes tres he comprendido tantas cosas... ¡incluyéndome a mí mismo! No me queda más que entregarles mi infinito amor, respeto y gratitud: Mónica, Cristian y Matías, ¡son los más poderositos!

Y cómo podría terminar esto si no es agradeciendo a ANID (ex-Conicyt) por financiar absolutamente todo lo que aquí he podido realizar. Si no fuera por las Becas Chile habría sido imposible venir aquí y haber estudiado con la tranquilidad que significa tener un respaldo económico suficiente. Le agradezco a cada persona trabajadora en Chile por aportar, de su propio esfuerzo y con el sudor de su frente, el porcentaje de su dinero que me llega a través de ANID. Haré todo lo que esté a mi alcance por retribuir a mi gente.

Trabajo financiado por ANID (ex-Conicyt), PFCHA, Becas Chile convocatoria 2017, Folio 72180175.

Resumen y conclusiones

En esta tesis estudiaremos *superficies de Klein*, que son superficies topológicas que admiten una estructura dianalítica. Este tipo de superficies pueden tener borde o no, pueden ser orientables o no, y pueden ser compactas o no. Nosotros nos enfocaremos en aquellas superficies de Klein compactas planas e hiperbólicas que admiten un empaquetamiento de $k \geq 1$ discos disjuntos del mismo radio, de tal manera que la densidad de dichos discos en una superficie con esa topología sea la máxima posible. Las llamaremos *superficies k -extremales*, y serán el tema principal de nuestra investigación. Para ello dividimos este trabajo en dos partes, que separan aquellos resultados que sirven de introducción de aquellos que son propios. Dichas partes están divididas a su vez en capítulos, formando un total de siete. A continuación describimos cada uno de ellos.

El capítulo 1, *Herramientas básicas*, es un resumen de los principales requisitos para comprender nuestra investigación. En la sección 1.1, *Los modelos hiperbólicos \mathbb{H} y \mathbb{D} y sus grupos de automorfismos*, nos dedicamos a estudiar las propiedades métricas de estos espacios, así como las relaciones que existen entre ambos. Analizamos los grupos de automorfismos conformales y anticonformales de ambos espacios, definiendo el concepto de grupo NEC y los cinco tipos de elementos que los conforman. Finalizamos esta sección definiendo el cubrimiento doble de una superficie no-orientable. En la sección 1.2, *Dominios fundamentales y sidepairings*, definimos los conceptos de dominio fundamental y de célula de Dirichlet-Voronoi, los cuales eventualmente nos permitirán analizar geoméricamente las propiedades métricas de las superficies k -extremales. La sección 1.3, *Trigonometría hiperbólica*, es un breve resumen de fórmulas y teoremas relativos a la geometría de \mathbb{D} que utilizaremos en este trabajo.

El capítulo 2, *De los empaquetamientos de esferas a las superficies k -extremales*, tiene como objetivo introducir al lector en los conceptos y herramientas utilizados en la literatura previa a nuestras investigaciones para abordar el problema de determinar si una superficie admite o no empaquetamientos de discos disjuntos del mismo radio de densidad máxima. Al final de este capítulo llegamos a una definición del concepto central de todo este trabajo: el de superficie k -extremal (Definición 2.1).

El capítulo 3, *Resultados inspirados en la literatura*, es una exposición de todos los resultados que hemos obtenido en nuestras investigaciones que han sido motivados de manera directa por la literatura existente de estos temas. Dado que este capítulo tiene varias secciones, detallaremos cada una por separado.

En la sección 3.1, *Teoremas y preguntas fundamentales*, nos dedicamos a extender los conceptos establecidos en la literatura en relación a las superficies k -extremales, analizando la situación tanto en el caso orientable como no-orientable, y tanto en el caso hiperbólico como plano. Demostramos que podemos determinar un dominio fundamental de una superficie en términos de algún k -packing no necesariamente de densidad máxima sobre ella (Teorema 3.1), admitiendo la posibilidad que la superficie sea no-orientable. Con este resultado demostramos que existe una cota superior para el radio que un k -packing puede tener dentro de una superficie hiperbólica compacta tanto orientable como no-orientable (Teorema 3.3); así como también caracterizamos la forma específica que debe tener el dominio de una superficie k -extremal para admitir un k -packing de densidad máxima, tanto en el caso hiperbólico (Teorema 3.4) como en el caso plano (Teorema 3.5). En ambos casos necesitamos que el dominio sea una unión de N -ángonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, donde el valor de N depende directamente del género de la superficie y el valor de k . Utilizando lo anterior entregamos una caracterización en términos de grupos triangulares de las superficies k -extremales en el caso hiperbólico (Corolario 3.4.1) y en el caso plano (Corolario 3.5.1). También demostramos que ninguna superficie k -extremal puede tener borde (Corolario 3.4.2). Posteriormente demostramos que la densidad del k -packing extremal en una superficie no depende del valor de k , sino de la cantidad de lados que tengan los polígonos regulares que definen su dominio fundamental, y estudiamos los valores que dicha densidad puede tomar tanto en el caso plano como hiperbólico. Finalmente proponemos una lista de cuatro preguntas que servirán de guía para definir el contenido de los capítulos y secciones restantes de este trabajo.

En la sección 3.2, *La existencia de superficies k -extremales*, entregamos una demostración independiente al recientemente resuelto problema de la existencia de superficies k -extremales no-orientables en el caso hiperbólico. Para ello definimos nuevos conceptos como el de *superficie primitiva* o el de *edge-grafting*, que nos permitirán construir un pequeño grupo de superficies hiperbólicas k -extremales con las cuales podemos generar, gracias al Lema 3.7, una infinidad de ejemplos de superficies hiperbólicas k -extremales de género g para todos los posibles valores de k y g . Finalizamos la sección demostrando que también existen superficies k -extremales *planas* orientables y no-orientables para cada $k \geq 1$ (Teorema 3.8).

En la sección 3.3, *Múltiples k -packings extremales de diferente tipo*, nos dedicamos a estudiar las condiciones bajo las que una superficie dada puede varios tipos de k -packings extremales. Nuestra conclusión es que, de manera similar al ya estudiado caso orientable, una superficie no-orientable no puede admitir más que dos tipos de k -packings extremales diferentes, y dichos valores de k están determinados por el género de la superficie en cuestión (Teorema 3.13). Finalizamos la sección con un resultado análogo al anterior para superficies planas, demostrando que en estos casos una superficie a lo más puede admitir k -packings para un solo valor de k (Teorema 3.15).

En la sección 3.4, *Teorema: Múltiples k -packings extremales del mismo tipo*, es donde enunciamos el teorema que motiva y guía prácticamente la totalidad del resto de este trabajo (Teorema 3.17).

En la sección 3.5, *Condición necesaria: conmensuradores y grupos aritméticos*, determinamos una condición aritmética y geométrica sobre una superficie k -extremal no-orientable para que ésta pueda admitir más de un k -packing extremal. La condición gira en torno al valor de los lados de los polígonos que conforman el dominio fundamental de la superficie, ya que éste debe ser un valor dentro del conjunto

$$\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

En el capítulo 4, *Múltiples k -packings extremales: exploración geométrica/numérica*, nos dedicamos a construir ejemplos de superficies k -extremales no-orientables con más de un k -packing extremal cuyos dominios estén formados por N -ágonos, para cada uno de los valores de N en la lista anterior de números. Para conseguir estas superficies comenzamos construyendo un ejemplo explícito de superficie no-orientable *primitiva* con más de un k -packing extremal para cada uno de esos valores de N , y luego a través del Lema 3.7 pudimos encontrar ejemplos no-primitivos para todos los posibles valores de k y del género g que dicho N permita. Para lograr construir estas superficies primitivas utilizamos el hecho de que los centros de nuevos k -packings extremales sobre una misma superficie deben satisfacer una propiedad métrica muy restrictiva (Lema 4.1), que se traducen eventualmente en determinar dichos centros como intersecciones de ciertos lugares geométricos relativos a las transformaciones que definen la superficie en cuestión (Teorema 4.4 y Teorema 4.5). Eventualmente demostramos que esos lugares geométricos son siempre arcos de círculos generalizados (Corolario 4.6.1), con lo cual demostramos que la cantidad de k -packings extremales diferentes sobre una superficie hiperbólica dada es siempre un número finito (Corolario 4.6.2). Con dichas herramientas diseñamos lo que hemos llamado *procedimiento geométrico/numérico* en la página 65, que es una forma sistemática de fabricar superficies k -extremales con el software computacional SageMath, teniendo en cuenta que los cálculos con los cuales determinamos dichas superficies están sujetos a cierto margen de error inherente al programa. Con aquel procedimiento es como terminamos este capítulo, mostrando ejemplos explícitos de superficies k -extremales para los valores de N en el conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 14, 16\}$, ya que identificamos ejemplos para los demás cuatro casos en la literatura.

En el capítulo 5, *Múltiples k -packings extremales: verificación algebraica*, nos dedicamos a transformar las afirmaciones del procedimiento geométrico/numérico (sujetas al margen de error de SageMath) en afirmaciones en términos algebraicos sobre una extensión finita del cuerpo \mathbb{Q} . Para ello comenzamos trasladando todas nuestras isometrías de \mathbb{D} a \mathbb{H} , ya que así las composiciones de funciones se traducen en productos matriciales de manera natural. Por un lado determinamos una extensión finita de \mathbb{Q} sobre la cual podemos realizar todos nuestros cálculos relativos a transformaciones del grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ (Teorema 5.1), mientras que por otro lado describimos las herramientas algebraicas necesarias para determinar la isometría $\tau \notin \Delta^\pm(2, 3, N)$ que nos permitió construir un nuevo k -packing en el procedimiento geométrico/numérico (Teorema 5.2). Con estos dos resultados diseñamos lo que hemos llamado *procedimiento algebraico* en la página 93, que es un proceso sistemático bajo el cual podemos realizar cálculos algebraicos exactos trabajando con matrices cuyas componentes viven en una extensión finita de \mathbb{Q} . Esto nos permite concluir que las superficies estudiadas en el procedimiento geométrico/numérico tenían efectivamente más de un k -packing extremal, concluyendo de manera irrefutable la parte no-orientable del Teorema que motivaba la sección 3.4. Finalmente, como consecuencia del procedimiento algebraico, pudimos demostrar que si una superficie admite más de un k -packing extremal entonces las coordenadas de todos los centros de todas las teselaciones asociadas a dichos k -packings extremales viven dentro de una extensión finita de \mathbb{Q} de grado a lo más 320 (Teorema 5.3).

En el capítulo 6, *El caso orientable y el caso plano*, nos dedicamos a completar la demostración del Teorema 3.17 para el caso restante: el caso orientable, así como también abordamos el problema en el caso plano.

En la sección 6.1, *El caso orientable*, construimos superficies k -extremales orientables haciendo uso de los cubrimientos dobles de las superficies no-orientables que construimos con los dos procedimientos que hemos diseñado. Primero demostramos que los cubrimientos dobles están conformados por los mismos tipos de polígonos que la superficie no-orientable de la que provienen (Teorema 6.1); y luego demostramos que heredan la cantidad de empaquetamientos de densidad máxima (Teorema 6.2). Con ello construimos *casi todas* las superficies que necesitábamos para completar la demostración, pero hay dos que debimos construir desde cero utilizando los dos procedimientos que hemos fabricado. Todo esto nos permite concluir el Teorema 3.17 de manera irrefutable.

En la sección 6.2, *El caso plano*, estudiamos el problema de hallar superficies *planas* con más de un k -packing extremal, y encontramos que, tanto en el caso orientable como no-orientable, existen superficies planas con *infinitos* k -packings extremales diferentes (Teorema 6.3).

En el capítulo 7, *La totalidad de k -packings extremales para un k dado*, nos dedicamos a estudiar el problema de la totalidad de k -packings sobre una superficie k -extremal dada. Para ello estudiamos las limitaciones del procedimiento geométrico/numérico descrito en el capítulo 4, con lo cual demostramos que la existencia de una nueva teselación es equivalente a que exista un centro de ésta dentro de cierto tipo de porciones circulares del espacio \mathbb{D} (Teorema 7.1); así como también mostramos una manera de determinar la totalidad de candidatos a nuevos centros de teselación en términos métricos.

Por último, en la sección 7.1, *Clasificación total en género 3 y cubrimientos dobles*, abordamos el estudio exhaustivo de este tipo específico de superficies mediante lo que hemos denominado *procedimiento total* en la página 136, que es una versión resumida y mejorada de los dos procedimientos descritos en el capítulo 4 y el capítulo 5. Para realizar esta clasificación tuvimos que analizar 50 superficies no-orientables y sus 50 cubrimientos dobles desde un punto de vista visual, geométrico, numérico y algebraico, con lo cual conseguimos determinar todos los posibles k -packings extremales de estas 100 superficies, y las relaciones geométricas/algebraicas entre ambas (Teorema 7.2).

Los resultados contenidos en este trabajo están presentes en los siguientes artículos:

- A brute force computer aided proof of an existence result about extremal hyperbolic surfaces (con Ernesto Gironde). *Contemporary Mathematics*, vol. 766 pp. 133-152 (2021).
- Multiple extremal disc-packings in compact hyperbolic surfaces (con Ernesto Gironde), *sometido a publicación* (2021).
- A classification of extremal disc packings in compact non-orientable surfaces of genus three (con Ernesto Gironde), *pre-print* (2021).

Contenidos

Agradecimientos	i
Resumen y conclusiones	vi
I Introducción a las superficies k-extremales	1
1 Herramientas básicas	2
1.1 Los modelos hiperbólicos \mathbb{H} y \mathbb{D} y sus grupos de automorfismos	2
1.2 Dominios fundamentales y sidepairings	10
1.3 Trigonometría hiperbólica	13
2 De los empaquetamientos de esferas a las superficies k-extremales	14
II Resultados propios sobre las superficies k-extremales	26
3 Resultados inspirados en la literatura	27
3.1 Teoremas y preguntas fundamentales	27
3.2 La existencia de superficies k -extremales	37
3.3 Múltiples k -packings extremales de diferente tipo	46
3.4 Teorema: Múltiples k -packings extremales del mismo tipo	52
3.5 Condición necesaria: conmensuradores y grupos aritméticos	54
4 Múltiples k-packings extremales: exploración geométrica/numérica	56
5 Múltiples k-packings extremales: verificación algebraica	80
6 El caso orientable y el caso plano	109
6.1 El caso orientable	109
6.2 El caso plano	121
7 La totalidad de k-packings extremales para un k dado	125
7.1 Clasificación total en género 3 y sus cubrimientos dobles	135
Bibliografía	152

Parte I

Introducción a las superficies *k*-extremales

Capítulo 1

Herramientas básicas

1.1 Los modelos hiperbólicos \mathbb{H} y \mathbb{D} y sus grupos de automorfismos

En todo nuestro trabajo hablaremos de *superficies de Klein*, que son superficies topológicas que admiten una estructura dianalítica (ver Definición 4 en [BEGG90]). Estas superficies pueden o no ser orientables, pueden o no tener borde, y pueden o no ser compactas. Teniendo en cuenta que una superficie de Riemann no es más que una superficie de Klein orientable, compacta y sin borde, es conveniente que aclaremos que en nuestro trabajo siempre que hablemos de “superficies” nos referiremos a superficies de Klein *compactas*. Es por eso que es importante destacar el teorema siguiente:

Teorema 1.1. (*Teorema 1.2.3 en [BEGG90]*) *Todas las superficies de Klein compactas tienen como cubrimiento universal el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, excepto los siguientes casos (donde I es un intervalo cerrado, y donde g es el género de la superficie, k su cantidad de componentes de borde y \pm representa su orientabilidad):*

1. *Esfera de Riemann ($g = 0, k = 0, +$, cubierta por la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$).*
2. *Plano proyectivo ($g = 1, k = 0, -$, cubierto por $\widehat{\mathbb{C}}$).*
3. *Toro complejo ($g = 1, k = 0, +$, cubierto por el plano complejo \mathbb{C}).*
4. *Botella de Klein ($g = 2, k = 0, -$, cubierta por \mathbb{C}).*
5. *Disco cerrado ($g = 0, k = 1, +$, cubierto por $\mathbb{R} \times I$).*
6. *Corona circular cerrada ($g = 0, k = 2, +$, cubierta por $\mathbb{R} \times I$).*
7. *Cinta de Möbius ($g = 1, k = 1, -$, cubierta por $\mathbb{R} \times I$).*

Si una superficie está cubierta por \mathbb{C} la llamaremos *plana*; si está cubierta por $\widehat{\mathbb{C}}$ la llamaremos *esférica*; y si está cubierta por \mathbb{H} la llamaremos *hiperbólica*. Dentro de estos casos excepcionales nosotros nos enfocaremos en las superficies planas dadas por el toro complejo y la botella de Klein, con lo cual fijaremos nuestra atención sobre las superficies hiperbólicas y planas.

En este trabajo nos preocuparemos de estudiar algunas propiedades métricas de este tipo de superficies, que según ya vimos nos obliga a comprender las propiedades del plano complejo y del plano hiperbólico con las métricas usuales (para mayores detalles ver Capítulo 7 de [Bea83]). Ya que las propiedades métricas del primero nos son familiares, comenzaremos por recordar las propiedades métricas del segundo, que podemos visualizar desde el punto de vista del semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ o desde el disco de Poincaré $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Empecemos analizando las propiedades métricas de \mathbb{H} . La métrica de este espacio es diferente a la métrica $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de \mathbb{C} , pues viene dada por

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}.$$

Esto significa que a medida que nos aproximamos a la recta real a pasos hiperbólicos iguales, las distancias euclidianas recorridas son cada vez menores (ver Figura 1.1 izquierda).

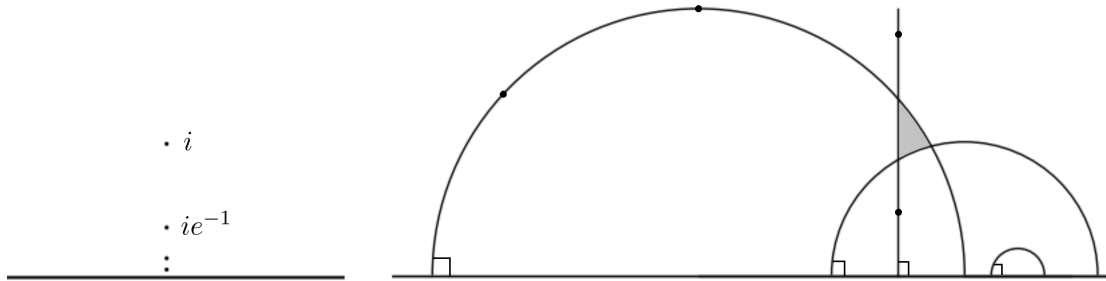


Figura 1.1: Los puntos $i, ie^{-1}, ie^{-2}, ie^{-3}$ a distancia hiperbólica constante 1 sobre el eje Y (izquierda) y cuatro rectas hiperbólicas distintas junto a un triángulo hiperbólico sombreado (derecha).

En este modelo \mathbb{H} las geodésicas son rectas o círculos euclidianos ortogonales al eje X (ver Figura 1.1 derecha).

Por otro lado, en el caso del modelo del disco de Poincaré $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tenemos la siguiente métrica

$$(ds)^2 = 4 \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

De manera similar a lo que ocurre cuando nos acercamos al eje X en \mathbb{H} , aquí sucede que a medida que nos aproximamos al borde del disco unitario a pasos hiperbólicos iguales las distancias euclidianas se van haciendo cada vez más pequeñas (ver Figura 1.2 izquierda).

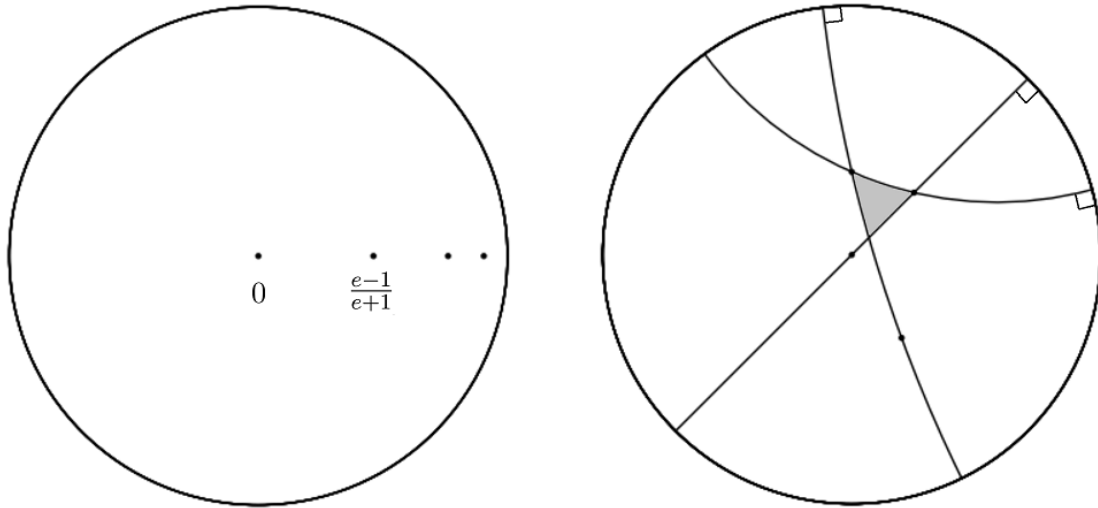


Figura 1.2: Los puntos $0, \frac{e-1}{e+1}, \frac{e^2-1}{e^2+1}, \frac{e^3-1}{e^3+1}$ a distancia hiperbólica constante 1 sobre el eje X (izquierda) y tres rectas hiperbólicas distintas que forman el triángulo hiperbólico sombreado (derecha).

Tal cual sucede en \mathbb{H} tenemos que en \mathbb{D} las geodésicas serán rectas o círculos euclidianos ortogonales al borde de \mathbb{D} (ver Figura 1.2 derecha).

Es fundamental observar que los dos modelos que hemos visto son isométricos, pues la transformación

$$F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - i}{-iz + 1}$$

es un isomorfismo que preserva las métricas respectivas. La inversa de F viene dada por

$$F^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{z + i}{iz + 1}.$$

¿Cómo decidiremos cuando usar un modelo o el otro? En nuestro trabajo preferimos trabajar en \mathbb{D} lo que son los aspectos geométricos/visuales, mientras que priorizamos el modelo \mathbb{H} para trabajar lo que son cálculos. Por ejemplo el Capítulo 4 nos dedicamos a estudiar ciertas superficies y sus propiedades métricas a través de su visualización en el espacio \mathbb{D} , mientras que en el Capítulo 5 abordamos los cálculos asociados a lo visto anteriormente en \mathbb{D} desde el grupo de automorfismos de \mathbb{H} .

Si denotamos por $\partial\mathbb{H}$ la recta real que delimita nuestro espacio \mathbb{H} , y si denotamos por $\partial\mathbb{D}$ al círculo \mathbb{S}^1 que delimita nuestro disco \mathbb{D} , entonces el isomorfismo F que vimos se puede extender de tal manera que envíe $\partial\mathbb{H}$ en $\partial\mathbb{D}$ (ver Figura 1.3). Llamaremos tanto a $\partial\mathbb{H}$ como a $\partial\mathbb{D}$ *la recta al infinito* de su espacio respectivo, y llamaremos indistintamente F a la función anterior como a su extensión a la recta al infinito.

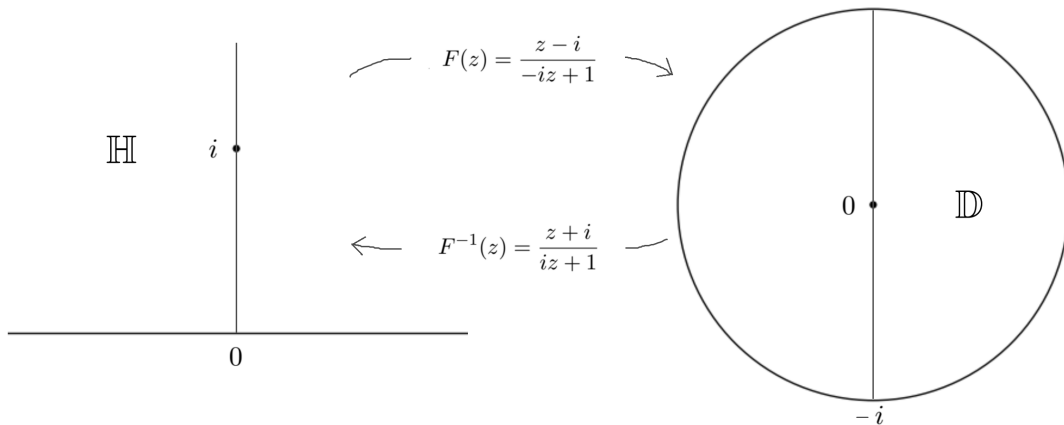


Figura 1.3: La isometría F envía $i \in \mathbb{H}$ en $0 \in \mathbb{D}$, así como también envía la recta que une 0 con i a la geodésica que une $-i$ con 0 , y envía $\partial\mathbb{H}$ en $\partial\mathbb{D}$.

Dado que en nuestro trabajo hablaremos gran parte del tiempo de discos hiperbólicos, conviene observar que los discos en \mathbb{D} y en \mathbb{H} son discos euclideos, aunque su centro hiperbólico esté más cerca de la recta al infinito que su centro euclidiano¹ (ver Figura 1.4).

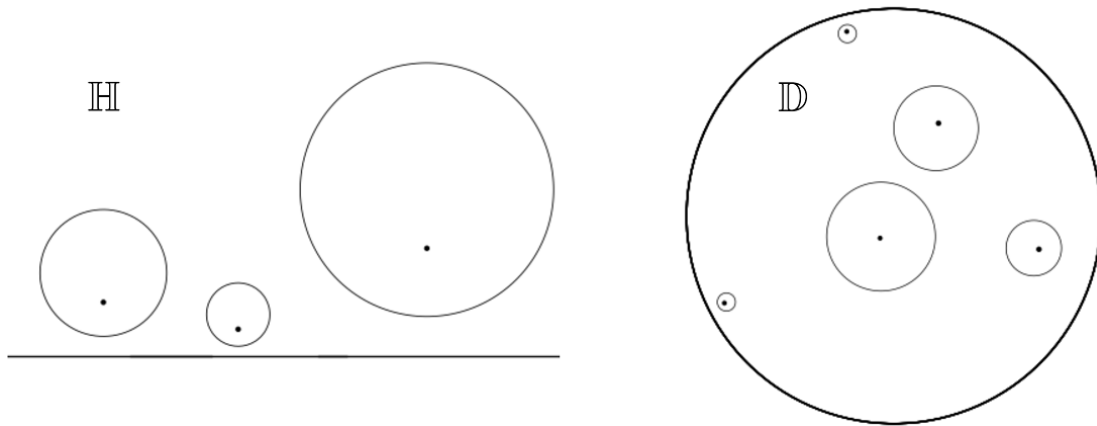


Figura 1.4: Círculos hiperbólicos del mismo radio en \mathbb{H} (izquierda) y en \mathbb{D} (derecha), junto con sus centros.

¹ La única excepción es cuando consideramos un círculo hiperbólico en \mathbb{D} centrado en el origen, cuyo centro coincidirá con el de su versión euclidiana.

Como la gran mayoría de las superficies que estudiaremos estarán cubiertas por \mathbb{H} , entonces tendremos que aquellas serán isomorfas, como superficies de Klein, a un cociente de la forma \mathbb{H}/K , donde K es un cierto subgrupo del grupo de automorfismos conformales y anticonformales de \mathbb{H} , que denotaremos por $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$.

Por ello es importante comprender los elementos de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$ a través del siguiente morfismo de grupos

$$G : \text{GL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Aut}^\pm(\mathbb{H}), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [g_A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}]$$

$$\text{donde } g_A(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } \det(A) > 0 \\ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} & \text{si } \det(A) < 0. \end{cases}$$

Tal cual podemos ver en el Teorema 0.1.15 en [BEGG90], este morfismo G induce un isomorfismo de grupos entre $\text{PGL}(2, \mathbb{R}) = \text{GL}(2, \mathbb{R})/(\mathbb{R} - \{0\})$ y $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$. También es posible verificar que el grupo de automorfismos *conformales* de \mathbb{H} , que denotaremos por $\text{Aut}(\mathbb{H})$, es isomorfo al subgrupo de índice dos $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Es importante notar que para cada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ de determinante ± 1 las matrices A y $-A$ van por G a la misma transformación g_A , y dado que cada automorfismo g de \mathbb{H} es, a través de este isomorfismo, una transformación g_A , es posible verificar que a dicho automorfismo le corresponden *exclusivamente* en $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ esas dos matrices de determinante ± 1 opuestas en signo.

Recordando que la totalidad de las superficies que estudiaremos en este trabajo serán compactas, entonces tiene sentido exponer la definición siguiente:

Definición 1.1. *Un grupo NEC es un subgrupo discreto K de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ tal que el cociente \mathbb{H}/K sea una superficie compacta. Diremos que un grupo NEC es Fuchsiano si solamente contiene elementos conformales, y definiremos el subgrupo Fuchsiano canónico K^+ del grupo NEC K como el conjunto de los elementos conformales de K , es decir, $K^+ := K \cap \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Dado que cada automorfismo $f \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{H}) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ admite solamente dos representaciones f_A y f_{-A} , podemos definir sin ambigüedades la traza de dicho automorfismo como el número no negativo $\text{tr}(f) := |\text{tr}(A)|$. De esta manera podemos clasificar los elementos de un grupo NEC en relación a su determinante ± 1 y a su traza $\text{tr}(f)$, diciendo que f es:

1. *Hiperbólica* si $\det(f) = 1$ y $\text{tr}(f) > 2$.
2. *Elíptica* si $\det(f) = 1$ y $0 \leq \text{tr}(f) < 2$.
3. *Parabólica* si $\det(f) = 1$ y $\text{tr}(f) = 2$.
4. *Glide reflection* si $\det(f) = -1$ y $\text{tr}(f) \neq 0$.
5. *Reflexión* si $\det(f) = -1$ y $\text{tr}(f) = 0$.

La clasificación que hemos hecho aquí arriba se basa en el hecho de que los puntos fijos de una transformación dependen directamente de los valores que tome su traza. Por ejemplo si tenemos un automorfismo conformal f_A entonces sus puntos fijos vienen dados por

$$\frac{(a - d) \pm \sqrt{tr^2(f) - 4}}{2c},$$

de donde vemos directamente que si $tr(f) = 2$ entonces tendremos una transformación parabólica con un punto fijo en la recta real $\partial\mathbb{H}$; si $tr(f) > 2$ entonces tendremos una transformación hiperbólica con dos puntos fijos en $\partial\mathbb{H}$; y si $0 \leq tr(f) < 2$ tendremos una transformación elíptica que admitirá como punto fijo a la única solución anterior que esté en \mathbb{H} . En la Figura 1.5 podemos visualizar la acción de estas transformaciones en \mathbb{D} .

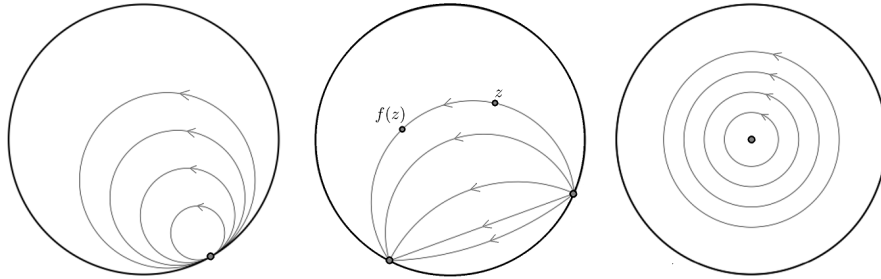


Figura 1.5: La acción de una transformación parabólica (izquierda), hiperbólica (al medio) y elíptica (derecha) en \mathbb{D} .

En el caso de una transformación anticonformal f_A tendremos que sus puntos fijos en el plano xy serán las soluciones del siguiente sistema en los números reales x, y :

$$\begin{cases} d(x^2 + y^2) + x(d - a) - b = 0 \\ y(d + a) = 0. \end{cases}$$

Podemos ver que los puntos fijos de esta transformación anticonformal dependen precisamente de si $a + d = 0$ o no. Si $a + d \neq 0$ entonces tendremos una glide reflection con dos puntos fijos sobre $\partial\mathbb{H}$ dados por

$$\frac{(a - d) \pm \sqrt{tr^2(f) + 4}}{2c},$$

mientras que si $a + d = 0$ tendremos una reflexión cuyo lugar de punto fijos es la única geodésica en \mathbb{H} que tiene como extremos los mismos puntos fijos anteriores. En la Figura 1.6 podemos, tal cual lo hicimos antes con las transformaciones conformales, visualizar sus acciones en \mathbb{D} .

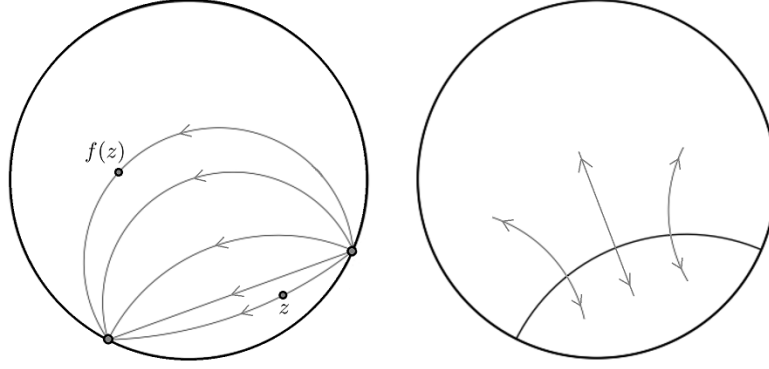


Figura 1.6: La acción de una transformación de tipo glide reflection (izquierda) y reflexión (derecha) en \mathbb{D} .

Es importante destacar que todo grupo NEC K es finitamente generado, pues admite una presentación dada por los siguientes generadores y relaciones (ver la Construcción 0.2.5 de [BEGG90]):

$$\begin{aligned}
 & x_i; \quad i = 1 \dots r, \quad x_i^{m_i} = 1 \quad \forall i \in \{1 \dots r\} \\
 & c_{i,j}; \quad i = 1 \dots k, \quad j = 0 \dots s_i \quad (c_{i,j-1})^2 = (c_{i,j})^2 = (c_{i,j-1}c_{i,j})^{n_{ij}} = 1 \\
 & e_i; \quad i = 1 \dots k, \quad e_i^{-1}c_{i,0}e_i c_{i,s_i} = 1 \quad \forall i \in \{1 \dots k\} \\
 & a_i, b_i; \quad i = 1 \dots g, \quad x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \quad (\text{caso orientable}) \\
 & d_i; \quad i = 1 \dots g, \quad x_1 \dots x_r e_1 \dots e_k d_1^2 \dots d_g^2 = 1 \quad (\text{caso no-orientable}),
 \end{aligned}$$

donde los elementos x_i son elípticos, los c_{ij} son reflexiones, los a_i, b_i son hiperbólicos, los d_i son glide reflections y los e_i pueden ser hiperbólicos o elípticos; mientras que r representa la cantidad de puntos cónicos, k la cantidad de componentes de borde y g el género de la superficie, que puede ser orientable o no-orientable.

A cada grupo NEC K le asociaremos una tupla que codifica la información de la presentación anterior, que llamaremos *signatura* de K y denotaremos por $s(K)$. Siguiendo las notaciones anteriores escribiremos su signatura como

$$s(K) = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{11}, \dots, n_{1s_1}), \dots, (n_{k1}, \dots, n_{ks_k})\}),$$

donde los valores de m_i, n_i son los órdenes de los elementos x_i y $c_{i,j-1}c_{i,j}$, respectivamente, y \pm corresponde con la orientabilidad de la superficie \mathbb{H}/K .

En este trabajo aparecerán multitud de veces los grupos triangulares Fuchsianos y extendidos cuyas presentaciones son, respectivamente,

$$\Delta(2, 3, N) = \langle x, y, z : x^2 = y^3 = z^N = 1 \rangle,$$

$$\Delta^\pm(2, 3, N) = \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ca)^N = 1 \rangle.$$

Si $N \geq 7$ entonces los grupos anteriores resultan ser grupos NEC, cuyas signaturas son, respectivamente,

$$s(\Delta(2, 3, N)) = (0; +; [2, 3, N]; \{-\}),$$

$$s(\Delta^\pm(2, 3, N)) = (0; +; [-]; \{(2, 3, N)\}).$$

Desde ahora diremos que $K \leq \text{Aut}^\pm(M)$ (con $M \in \{\mathbb{D}, \mathbb{C}\}$) que actúe de manera libre y propiamente discontinua *uniformiza* una superficie de Klein con cubrimiento universal M cuando dicha superficie es isomorfa al cociente M/K . Si recordamos que el Teorema 1.1 nos decía que prácticamente todas las superficies de Klein compactas están uniformizadas por algún grupo NEC, y considerando que la gran mayoría de nuestras superficies no tienen borde, entonces tendremos que las superficies hiperbólicas que estudiaremos estarán uniformizadas por grupos NEC con una signatura del tipo

$$s(K) = (g; \pm; [-]; \{-\}).$$

Considerando la Proposición 1.27 en [GGD12] podemos ver que los grupos de automorfismos de \mathbb{D} y \mathbb{C} son

$$\text{Aut}^\pm(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \cup \left\{ z \mapsto \frac{a\bar{z} + \bar{b}}{b\bar{z} + \bar{a}}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = -1 \right\},$$

$$\text{Aut}^\pm(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} \cup \{z \mapsto a\bar{z} + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

En particular podemos observar que cada automorfismo de \mathbb{D} es una transformación de Möbius o la composición de una con la conjugación compleja, y por lo tanto tiene asociada una matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ de la misma manera en que cada automorfismo de \mathbb{H} tenía una matriz asociada en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Evidentemente es posible conectar ambas representaciones matriciales si trasladamos la transformación de \mathbb{D} a \mathbb{H} a través de F^{-1} que vimos en la Figura 1.3. Todo esto lo analizaremos en detalle en el Capítulo 5.

Finalizaremos esta sección con una manera natural de conectar las superficies orientables con las no-orientables. Si tenemos un grupo NEC K con elementos anticonformales entonces siempre se cumple que $[K : K^+] = 2$ (recordar la Definición 1.1), y podemos definir el *cubrimiento doble* de la superficie uniformizada por K como la superficie orientable uniformizada por su subgrupo Fuchsiano canónico K^+ . De hecho podemos obtener cualquier superficie de Klein no-orientable como el cociente de su cubrimiento doble por una involución anticonformal que no fija puntos en la superficie (recuerde que estamos considerando superficies sin borde; ver Capítulo 1.4 de [BCGG10]).

1.2 Dominios fundamentales y sidepairings

Un concepto crucial para comprender y eventualmente construir nuestras superficies es el siguiente:

Definición 1.2. *Sea K un subgrupo del grupo de isometrías de un espacio métrico M . Diremos que un conjunto cerrado $F \subseteq M$ es un dominio fundamental para K si cumple las siguientes propiedades:*

1. $\bigcup_{g \in K} g(F) = M$.
2. Si $g \in K - \{1\}$ y $z \in F \cap g(F)$ entonces $z \in F - \overset{\circ}{F}$.

Al conjunto $F - \overset{\circ}{F}$ lo llamaremos borde del domino fundamental F .

En nuestro caso, como bien ya hemos comentado, la mayoría del tiempo consideraremos $M = \mathbb{D}$ (superficies hiperbolicas) con algunas excepciones en que $M = \mathbb{C}$ (superficies planas). Siguiendo la notación de la definición anterior podemos verificar que para cualquier grupo K existe una infinidad de dominios fundamentales, pero nosotros nos enfocaremos en un cierto tipo de dominio fundamental específico que exponemos a continuación:

Definición 1.3. *Sea C un conjunto de puntos en un espacio métrico (M, d) . Para cada $p \in C$ definimos la célula de Dirichlet-Voronoi (desde ahora CDV) de p con respecto a C como el conjunto*

$$D_C(p) = \{z \in M : d(z, p) \leq d(z, q), \forall q \in C\},$$

es decir, $D_C(p)$ será el conjunto de puntos en M que estén más cerca de p que cualquier otro punto de C .

Si definimos $H_p(q) := \{z \in M : d(z, p) \leq d(z, q)\}$, entonces es claro que

$$D_C(p) = \bigcap_{q \in C} H_p(q).$$

Dado que la mediatriz de la geodésica que une p con cualquier punto $q \in C$ divide el espacio M precisamente en los semiplanos $H_p(q)$ y $M \setminus H_p(q)$, entonces podemos visualizar las CDV como polígonos cuyos lados son segmentos de las mediatrices de las geodésicas que unen p con los puntos $q \in C$ más cercanos a p , tal cual vemos en la Figura 1.7.

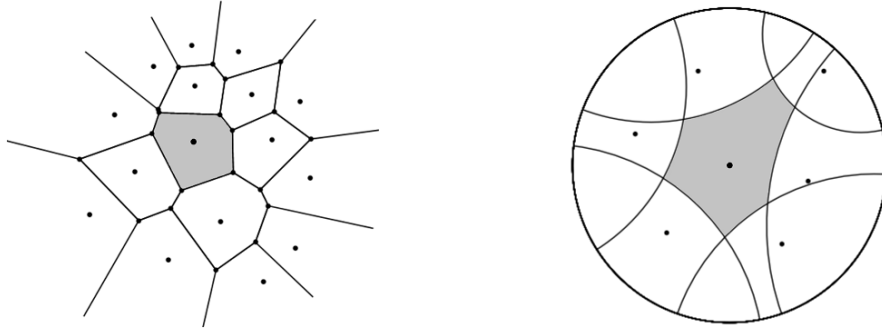


Figura 1.7: Una CDV asociada a un punto en \mathbb{C} (izquierda) y en \mathbb{D} (derecha).

Los conjuntos que definen las CDV son muy importantes para nuestro trabajo ya que si tomamos $M = \mathbb{D}$ o \mathbb{C} tendremos que para cualquier grupo $K \leq \text{Aut}^\pm(M)$ que uniformice una superficie de Klein es posible hallar un punto $q \in M$ que no esté fijado por ningún elemento de K (ver la Construcción 0.2.3 de [BEGG90]), y tendremos que el conjunto $C_K = \{\gamma(q), \gamma \in K\}$ generará un conjunto discreto de puntos en M que a través de sus CDV asociadas nos darán una teselación de dicho espacio.

Para finalizar esta sección consideramos importantísimo destacar cuatro observaciones:

Observación 1.1. *Prácticamente en todo nuestro trabajo estudiaremos superficies que admiten dominios fundamentales conformados por polígonos regulares (ver el Teorema 3.4 y el Teorema 3.5).*

Observación 1.2. *Los grupos uniformizadores de dichas superficies estarán generados por las transformaciones hiperbólicas o glide reflections que identificarán todos los lados de dichos polígonos por parejas. Llamaremos sidepairings a dichas transformaciones, ya que “emparejan lados”.*

Observación 1.3. *Siguiendo la notación de la parte superior de la Figura 1.8 podemos ver cómo actúa un sidepairing que llamaremos s sobre los triángulos que emergen de los lados que éste identifica. Ahí vemos claramente cómo es que s envía el triángulo T_s al triángulo T'_s , enviando los vértices A, B en los vértices A', B' . Dependiendo de si s es conformal o no tendremos que enviará el par (A, B) al par (A', B') o al par (B', A') , respectivamente. Por un tema de simplicidad describiremos el sidepairing que identifica dos lados del dominio fundamental mediante un mismo número entero sobre cada uno de esos lados, siendo positivos si la transformación es conformal y negativos si no lo es (ver la parte inferior de la Figura 1.8).*

Observación 1.4. *Ya que los dominios estarán conformados por polígonos regulares entonces los triángulos T_s y T'_s siempre serán congruentes, por lo tanto el sidepairing que los relaciona siempre será una isometría de dicho espacio (aunque la Figura 1.8 habla de \mathbb{D} , la conclusión es exactamente la misma para \mathbb{C}).*

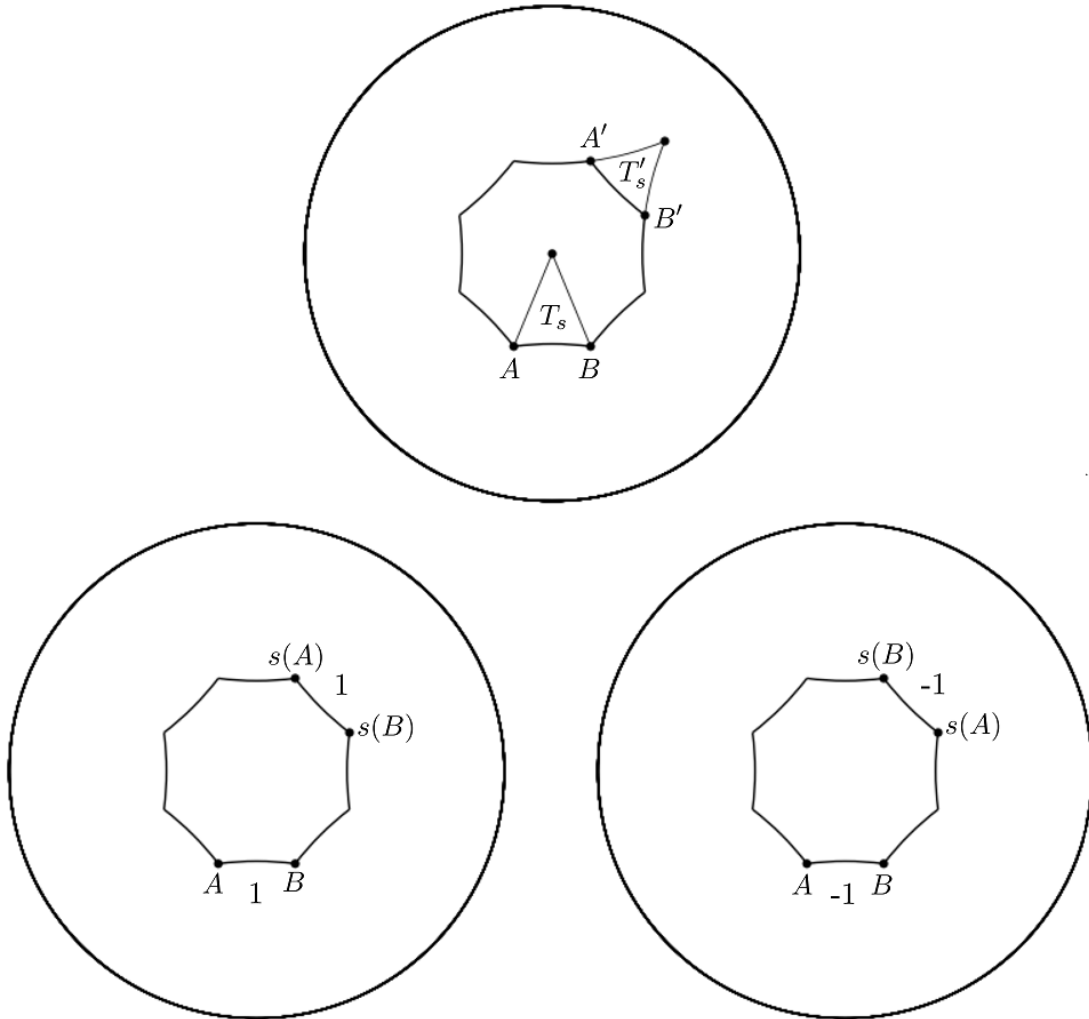


Figura 1.8: Un sidepairing mueve el triángulo T_s al triángulo T'_s en \mathbb{D} . Dependiendo de si es conformal o anticonformal tendremos que dicho sidepairing enviará el par (A, B) en (A', B') o en (B', A') , respectivamente. Podemos condensar la información anterior asignando un número entero sobre cada par de lados identificados, lo que nos indicará si la transformación es conformal o no (ambas figuras abajo).

1.3 Trigonometría hiperbólica

Para finalizar este capítulo de herramientas básicas consideramos conveniente explicitar algunos resultados básicos sobre geometría hiperbólica que usaremos en esta tesis, la mayoría extraídos del capítulo 7 en [Bea83].

Teorema 1.2. *La suma de los ángulos interiores α, β, γ de un triángulo hiperbólico se relaciona con su área A a través de la igualdad*

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Teorema 1.3. *El área de un círculo hiperbólico de radio R es $2\pi(\cosh(R) - 1)$.*

Teorema 1.4. *Si a, b, c son los lados opuestos a los ángulos α, β, γ en un triángulo hiperbólico, entonces tenemos el teorema del seno y del coseno hiperbólico:*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}, \quad \cosh(c) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)\cos(\gamma).$$

Teorema 1.5. *Si a, b son los catetos de un triángulo rectángulo hiperbólico, y si llamamos β al ángulo opuesto al lado de medida b , entonces*

$$\sinh(a) = \frac{\tanh(b)}{\sin(\beta)}.$$

Teorema 1.6. *Si a, b son puntos en \mathbb{H} y d es la métrica hiperbólica entonces*

$$\sinh\left(\frac{d(a, b)}{2}\right) = \frac{|a - b|}{2\sqrt{|\operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b)|}}, \quad \cosh\left(\frac{d(a, b)}{2}\right) = \frac{|a - \bar{b}|}{2\sqrt{|\operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b)|}}.$$

Teorema 1.7. *Si d_h es la distancia hiperbólica entre el origen y un punto de \mathbb{D} , y d_e es la distancia euclidiana entre esos mismos puntos, entonces*

$$d_h = \ln\left(\frac{1 + d_e}{1 - d_e}\right)$$

Teorema 1.8. (**Lema 2.3 en [Nak02]**) *Sean w un punto y $L = \{|z - z_0| = r\}$ una geodésica ambos en \mathbb{D} . La distancia hiperbólica $d(w, L)$ de w a L satisface la igualdad*

$$\sinh(d(w, L)) = \frac{|1 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 w)|}{r(1 - |w|^2)}.$$

Capítulo 2

De los empaquetamientos de esferas a las superficies k -extremales

El tema concreto que trataremos en este trabajo será el estudio de las superficies hiperbólicas y planas que admiten un tipo especial de empaquetamiento de discos, que llamaremos k -packings extremales, y que definiremos al final de esta sección. Nuestros resultados versarán sobre la existencia de dichas superficies, así como los tipos y la cantidad de k -packings extremales que éstas pueden albergar. Toda esta investigación está enmarcada en los problemas más amplios de empaquetamientos de esferas en espacios de curvatura constante, problemas que han acaparado la atención de la comunidad matemática al menos desde Lagrange y Gauss (ver la introducción en [Bör78]).

El resultado principal que motiva el grueso de nuestros estudios, y que podríamos ver como la bisagra entre aquellos tiempos arcaicos y los nuestros, es un teorema que estableció Károly Böröczky a finales de los años 70 del siglo pasado. Este matemático húngaro demostró en el artículo anteriormente citado que si consideramos un empaquetamiento de esferas del mismo radio en un espacio de curvatura constante de dimensión n , entonces la densidad de cada una de esas esferas con respecto a su correspondiente CDV no puede ser mayor que la densidad de $n + 1$ esferas mutuamente tangentes en relación al área del simplex generado por sus centros. Considerando que nuestros estudios en esta tesis son siempre relativos a superficies hiperbólicas o planas, tiene sentido que visualicemos qué sucede con el teorema anterior en los espacios bidimensionales \mathbb{D} y \mathbb{C} .

Teorema 2.1. *(Teorema 1 en [Bör78], con $n=2$). Si tenemos un empaquetamiento de discos del mismo radio R en $M \in \{\mathbb{D}, \mathbb{C}\}$ entonces la densidad de cada uno de sus discos dentro de su respectiva CDV está acotada superiormente por la densidad de 3 discos de radio R mutuamente tangentes en relación al área del triángulo equilátero generado por sus centros.*

Comencemos observando lo que sucede en el caso de \mathbb{D} . Este teorema nos indica que los centros de un empaquetamiento de discos del mismo radio R inducen una teselación de este espacio a través de sus CDV, y la densidad de cada disco en su respectiva CDV está acotada por un valor específico en términos de R que calcularemos inmediatamente.

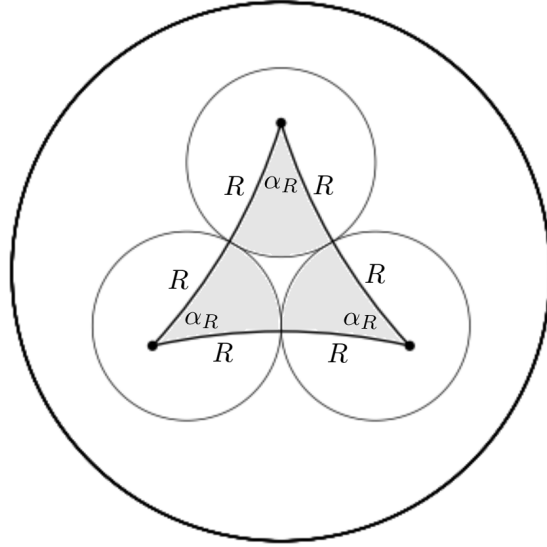


Figura 2.1: Tres círculos tangentes de radio R en \mathbb{D} y el triángulo equilátero que forman sus centros, con ángulo α_R .

Observemos la Figura 2.1. Como en el espacio hiperbólico \mathbb{D} el lado de un triángulo equilátero depende directamente de su ángulo, llamaremos α_R al ángulo que tiene un triángulo equilátero hiperbólico de lado $2R$ (medido en radianes, claramente). De esta manera el área de cada porción pintada de círculo vale $\alpha_R(\cosh(R) - 1)$, y por lo tanto la totalidad del área de las tres porciones es $3\alpha_R(\cosh(R) - 1)$. El área del triángulo equilátero en cuestión es simplemente $\pi - 3\alpha_R$, con lo que tenemos que la cota superior δ_R de la que habla el teorema de Böröczky en nuestro caso es

$$\delta_R = \frac{3\alpha_R(\cosh(R) - 1)}{\pi - 3\alpha_R}.$$

Pasaron casi dos décadas hasta que Christophe Bavard, geómetra francés, dotara de especial importancia a esta cota específica en relación a sus estudios de superficies hiperbólicas sin borde y los tamaños de los discos que éstas admiten (ver [Bav96]). El argumento de Bavard en relación al tamaño de estos discos es esencialmente el que sigue: tomemos una superficie hiperbólica con la métrica inducida por su cubrimiento universal \mathbb{D} . Cualquier disco de radio R que consideremos sobre esta superficie tendrá como preimagen una infinidad de discos del mismo radio R en \mathbb{D} , formando allá arriba un empaquetamiento de discos (ver Figura 2.2).

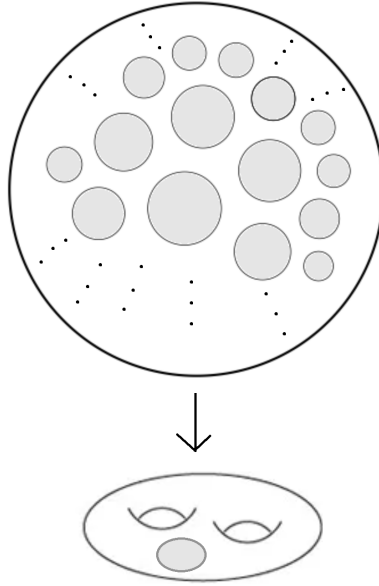


Figura 2.2: Disco sobre una superficie que sube a un empaquetamiento en \mathbb{D} .

Si trazamos las CDV asociadas a los centros de dicho empaquetamiento en \mathbb{D} obtendremos una serie de polígonos que teselan este espacio. Teniendo en cuenta que cada uno de esos polígonos es un dominio fundamental para la superficie en cuestión, y teniendo en cuenta que gracias al teorema de Gauss-Bonnet el área de cada dominio fundamental para una superficie de característica de Euler χ es $-2\pi\chi$, entonces este matemático francés concluyó, a través de la cota establecida por Böröczky, que

$$\frac{2\pi(\cosh(R) - 1)}{-2\pi\chi} \leq \frac{3\alpha_R(\cosh(R) - 1)}{\pi - 3\alpha_R}.$$

De lo anterior es posible obtener la desigualdad siguiente

$$\cosh(R) \leq \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6(1-\chi)}\right)}.$$

Es por esta razón que Bavard define una superficie hiperbólica sin borde como *extremal* si es que ésta admite un disco de radio

$$R_\chi := \cosh^{-1}\left(\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{6(1-\chi)}\right)}\right).$$

Por el teorema de Böröczky sabemos que si una superficie X admite un disco de radio R , entonces la densidad de dicho disco en un dominio fundamental para X está acotada por δ_R , y la igualdad se consigue sí y solamente si $R = R_\chi$. Por esto es que podemos hablar sin ambigüedades de la densidad máxima de un disco en una superficie hiperbólica.

Posteriormente Bavard se propone analizar las situaciones en las que una superficie pudiera alcanzar dicha cota máxima. Dado que la máxima densidad de los discos en sus CDV se logra cuando los centros de éstos forman triángulos equiláteros de lado $2R$, entonces los polígonos que conforman estas CDV deben tener cada uno un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ (ver la Figura 2.3), lo que nos obliga a teselar el espacio con polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

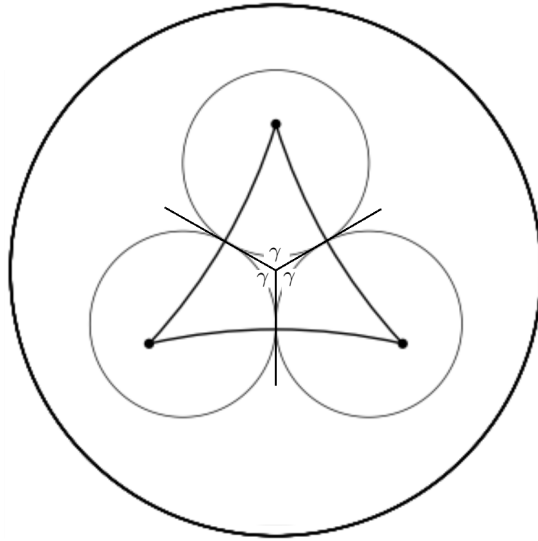


Figura 2.3: Cada ángulo de los polígonos debe medir $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

Esto llevó a Bavard a estudiar la existencia de superficies que admitan al menos un dominio fundamental que sea un polígono regular de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, traduciendo dicho requerimiento de tipo geométrico en uno de tipo algebraico: el grupo que uniformice a una superficie extremal debe estar contenido en un grupo triangular de la forma $\Delta(2, 3, N)$, generado por rotaciones de π , $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{N}$. Y sucede que el valor de N , en directa conexión con el área del dominio fundamental de la superficie y su característica de Euler, resulta ser precisamente $N = 6(1 - \chi)$.

Basándose en lo anterior Bavard consiguió demostrar los siguientes resultados:

Teorema 2.2. (Sección 3.1 en [Bav96]) *Para cada género $g \geq 2$ existe una superficie de Riemann extremal de género g .*

Teorema 2.3. (Sección 4 en [Bav96]) *Para cada género $g \geq 3$ existe una superficie no-orientable extremal de género g .*

Teorema 2.4. (Sección 3.2 en [Bav96]) *La cantidad de discos de radio máximo que admite una superficie extremal puede ser mayor que 1, pero siempre será un número finito.*

En el caso de superficies planas existen diferencias importantes con respecto a los argumentos anteriores: la primera es que la cota de Böröczky nos lleva a estudiar un triángulo equilátero específico, porque sabemos que en el plano euclidiano un triángulo equilátero está obligado a tener un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ (compare la Figura 2.1 con la Figura 2.4).

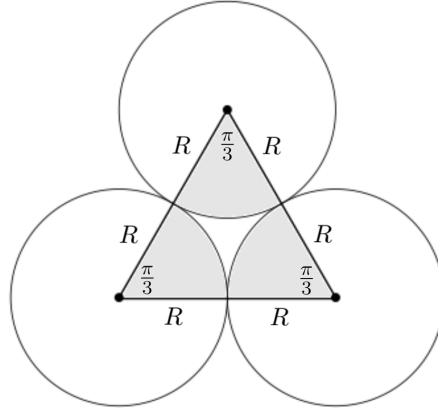


Figura 2.4: Tres círculos tangentes de radio R en \mathbb{C} y el triángulo equilátero que forman sus centros con ángulo $\frac{\pi}{3}$.

En este caso el área de cada porción circular es $\frac{\pi R^2}{6}$, por lo que el área total de los círculos pintados es $3 \cdot \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi R^2}{2}$. Como el área del triángulo equilátero es $\frac{2R \cdot R\sqrt{3}}{2}$ entonces tenemos que la cota de Böröczky tendrá el valor dado a continuación:

$$\frac{\frac{\pi R^2}{2}}{\frac{2R \cdot R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

En este caso vemos que la densidad óptima es un valor numérico concreto que, a diferencia del caso hiperbólico, no depende de R . Esto tiene sentido ya que en \mathbb{C} , a diferencia de \mathbb{D} , la configuración geométrica que debemos estudiar es única, formada por triángulos equiláteros concretos que podemos concebir tan grandes o pequeños como deseemos. Esto es así ya que en \mathbb{C} tenemos un concepto de semejanza que permite construir figuras geométricas proporcionales y no-congruentes que no tenemos en \mathbb{D} (ver la Observación 3.1).

A pesar de esa diferencia, lo que sí se mantiene intacto al traspasar el argumento anterior de \mathbb{D} a \mathbb{C} es que para conseguir la mayor densidad de los discos en sus CDV éstas últimas también deben ser polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, y dado que en \mathbb{C} existe un único tipo de polígono regular con dicho ángulo — el hexágono regular — entonces todas las configuraciones con densidad óptima en \mathbb{C} nos llevan a estudiar teselaciones de hexágonos regulares de dicho espacio. Bavard nos entrega dos ejemplos de superficies extremales planas cuyos dominios son precisamente hexágonos de este tipo: un toro complejo y una botella de Klein (ver Figura 2.5).

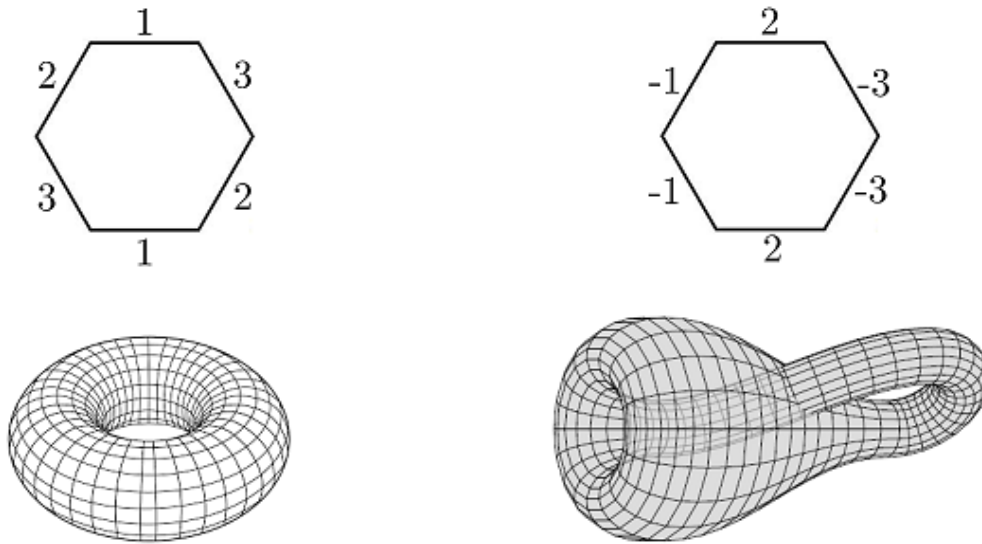


Figura 2.5: Un toro complejo (izquierda) y una botella de Klein (derecha), representados como identificaciones de lados de un hexágono regular. Identificamos los pares lados que tengan el mismo número, conservando la orientación si dicho número es positivo y revirtiéndola si es negativo.

Si bien la cuestión sobre la existencia de superficies que admiten un disco de densidad máxima estaba zanjada, tanto en el caso plano como hiperbólico, y tanto en el caso orientable como no-orientable, el asunto sobre la cantidad exacta de tales discos que una superficie pueden admitir quedaba abierto. Fueron los españoles Ernesto Girondo y Gabino Gonzalez-Diez quienes explotaron por primera vez las directrices trazadas por Bavard para avanzar en el caso hiperbólico de dicho problema.

Si llamamos *extremal* tanto a las superficies que admiten un disco con densidad máxima sobre ellas como también al disco en cuestión, entonces estos dos matemáticos utilizaron la caracterización de las superficies extremales *orientables* en términos de grupos triangulares para estudiar el tema de la unicidad de los discos extremales en una superficie dada. Con ello fueron capaces de determinar las condiciones para que un grupo admita inclusiones en dos grupos triangulares diferentes $\Delta_1(2, 3, N)$ y $\Delta_2(2, 3, N)$, acudiendo a teoremas relativos a las inclusiones entre grupos triangulares, así como también a las restricciones sobre los posibles subgrupos de éstos con índice finito. Gracias a ello lograron demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.5. (Teorema 1 en [GGD99]) Una superficie de Riemann de género mayor que 3 contiene a lo más un disco extremal.

De esta manera el problema de hallar múltiples discos extremales en una misma superficie de Riemann resultó tener restricciones topológicas, pues a partir de género 4 en adelante resultaba imposible encontrar en ninguna de ellas dos o más discos extremales. Así fue como el estudio de las superficies que pudieran albergar más de un disco extremal se redujo a observar superficies de Riemann extremales de género $g = 2$ y $g = 3$.

Entre los años 2002 y 2005 surgieron varios artículos en los que sus autores estudiaban tanto las posibles superficies con dominios de 18-ágonos ($g = 2$) y 30-ágonos ($g = 3$), como también las herramientas necesarias para poder describir los posibles centros de nuevos discos extremales dentro de dichas superficies (ver por ejemplo [GGD02b], [GGD02a], [Nak02],[BV02], [Nak04] y [Nak05]). Por ejemplo, el matemático japonés Gou Nakamura estudió los posibles discos extremales de las 927 superficies de Riemann¹ que provienen de un 30-ágono regular de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, situación que requiere herramientas de cálculo más sistemáticas que lo que sucede en el caso de $g = 2$, pues ahí sabemos gracias a Felix Klein que solamente existen 8 posibles configuraciones de 18-ágonos².

De esta manera Girondo, Gonzalez-Diez y Nakamura consiguieron determinar el número exacto de discos extremales que admiten cada una de las superficies de Riemann de género $g \geq 2$, cuyos dominios fundamentales resultan ser $(12g - 6)$ -ágonos regulares (ver Tabla 2.1).

Superficies extremales orientables		
Género	# de superficies	# de discos extremales (# de superficies)
2	8	1(1), 2(6) ó 4(1)
3	927	1(915) ó 2(12)
$g > 3$	—	1(todas)

Tabla 2.1: Cantidad de discos extremales sobre superficies orientables.

Con respecto a las superficies hiperbólicas no-orientables fueron Girondo y Nakamura quienes abordaron el asunto un par de años después, extendiendo las herramientas utilizadas para el caso de superficies de Riemann en su artículo en conjunto [GN07]. Al reacomodar las herramientas algebraicas para estudiar el tema de la unicidad de manera similar al caso orientable obtuvieron el resultado siguiente:

¹ Son 927 superficies módulo $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$, ya que módulo $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$ la cantidad de superficies asciende a 1726.

² Son 8 superficies módulo $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$, ya que módulo $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$ son 9.

Teorema 2.6. (*Teorema 2.1 en [GN07]*) *Un grupo $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ uniformizará una superficie no-orientable extremal de género g sí y solamente si K contiene elementos anticonformales y está contenido en algún grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, 6g - 6)$ con índice $2(6g - 6) = 12g - 12$.*

Es importante notar que el dominio fundamental de $\Delta^\pm(2, 3, 6g - 6)$ es un triángulo de ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6g-6}$ que es precisamente la mitad del dominio fundamental del grupo triangular Fuchsiano $\Delta(2, 3, 6g - 6)$, lo cual nos obliga a que el índice del grupo uniformizador sea el doble que el número de lados $6g - 6$ del polígono completo (ver Figura 2.6).

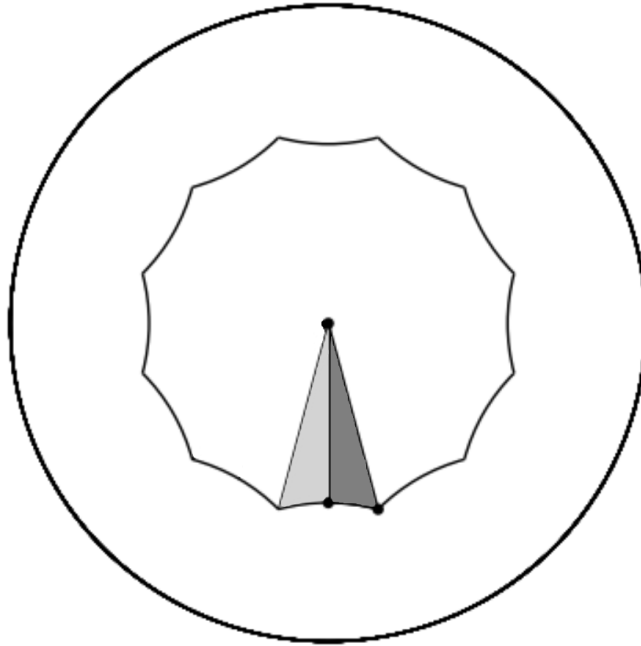


Figura 2.6: El dominio fundamental de $\Delta^\pm(2, 3, 6g - 6)$ (oscuro) dentro del dominio fundamental de $\Delta(2, 3, 6g - 6)$ (oscuro y claro) y del grupo uniformizador (polígono completo).

Los argumentos algebraicos permitieron a estos matemáticos concluir, con razonamientos similares al caso orientable, que ninguna superficie no-orientable de género $g > 6$ admite más de un disco extremal, lo que dejaba como tarea estudiar minuciosamente todas las superficies extremales de género 3, 4, 5 y 6 (ver Tabla 2.2). Esto resultó ser una tarea titánica, y Nakamura cargó sobre sus hombros el peso de desarrollar las herramientas trigonométricas para estudiar la totalidad de estas superficies no-orientables provenientes de N -ágonos regulares para $N = 12, 18, 24$ Y 30 (ver [GN07], [Nak09], [Nak12], [Nak13] y [Nak16]).

Dado que la cantidad de superficies extremales crece exponencialmente con respecto al género (ver [BV02]), entonces las herramientas trigonométricas que debió diseñar debían ser viables computacionalmente, cosa que comentaremos posteriormente con mucho detalle en nuestro propio trabajo. Este matemático japonés se debió llevar una gran sorpresa al notar que dentro de las miles de superficies no-orientables que analizó no hubo ninguna que admitiera más de 2 discos extremales diferentes, a diferencia del caso orientable en la cual hay una superficie que admite 4 discos extremales. Resumimos sus datos en la Tabla 2.2.

Superficies extremales no-orientables		
Género	# de superficies	# de discos extremales (# de superficies)
3	11	1(1) ó 2(10)
4	144	1(122) ó 2(22)
5	3627	1(3610) ó 2(17)
6	149279	1(149172) ó 2(107)
$g > 6$	—	1(todas)

Tabla 2.2: Cantidad de discos extremales sobre superficies no-orientables.

De esta manera podemos considerar que el estudio de las superficies extremales está completo, larga tarea que comenzó con el artículo [Bav96] y acabó con el artículo [Nak16].

El siguiente episodio del estudio de discos sobre superficies comenzó solo un par de años después de que Nakamura publicara su estudio de las más de 10^5 superficies extremales de género 6 en 2016. Tanto Jason DeBlois como Ernesto Gironde abordaron independientemente una generalización del problema anteriormente estudiado: ¿qué pasará si en vez de estudiar la densidad de un disco sobre una superficie hiperbólica estudiamos empaquetamientos de $k > 1$ discos disjuntos del mismo radio sobre esta? (Ver [DeB20] y [Gir18]).

Aunque similares en algunos aspectos, los argumentos relativos a los casos de $k = 1$ y $k > 1$ tienen diferencias sustanciales en lo relativo a los dominios fundamentales, así como también en las consideraciones sobre los valores que k puede tomar dependiendo de la topología de la superficie en cuestión.

El trasfondo del paso de $k = 1$ a $k > 1$ es un pequeño pero importante cambio en el dominio fundamental de la superficie: sabemos que el empaquetamiento más denso en el espacio cubriente se consigue cuando todas las CDV resultan ser polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, pero ahora no será uno de estos polígonos, sino la unión de k de ellos la que formará un dominio fundamental para dicha superficie, como en la Figura 2.7 (ver Lema 1 en [Gir18]).

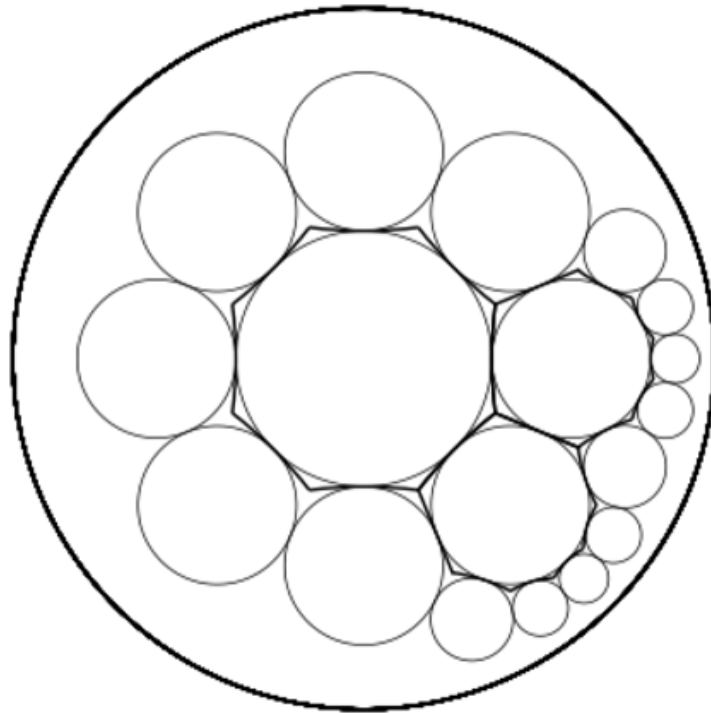


Figura 2.7: La unión de tres polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ es un ejemplo de un dominio fundamental de una superficie que admite un empaquetamiento de tres discos disjuntos del mismo radio lo más denso posible en ésta.

La definición siguiente será fundamental en toda nuestra investigación:

Definición 2.1. Diremos que una superficie hiperbólica es k -extremal si admite una unión de k discos métricos disjuntos del mismo radio R tal que su densidad en la superficie sea δ_R . Llamaremos k -packing extremal a tal unión de discos.

Como veremos pronto más adelante, una superficie será k -extremal sí y solamente si admite un k -packing cuyos discos tengan un radio determinado en términos de k y la topología de la superficie.

Con respecto a los resultados en torno a estas superficies tenemos que DeBlois estudió en su artículo la *existencia* de superficies k -extremales en el caso orientable, no-orientable, e incluso superficies no-compactas. Sus resultados en este sentido extienden de buena manera los resultados previos relativos a la existencia de este tipo de superficies. Por otro lado Gironde se restringió en el mencionado artículo al caso de superficies de Riemann, pero considerando no solamente el tema de la existencia de superficies k -extremales sino también el tema de la cantidad de k -packings extremales diferentes que una superficie dada puede admitir, tanto del mismo tipo de k como también de diferentes tipos.

En analogía al caso de las antiguas superficies extremales (1-extremales desde ahora) Girondo calculó una cota superior para el radio de los k -packings en términos de k y del género g para superficies de Riemann, así como también realizó una caracterización de estas superficies en términos de grupos triangulares:

Teorema 2.7. (Proposición 1 en [Gir18]) Si R es el radio de un k -packing sobre una superficie de Riemann de género g , entonces

$$\cosh(R) \leq \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6 + \frac{12(g-1)}{k}} \right)}.$$

Teorema 2.8. (Teorema 2 en [Gir18]) Un grupo $K \leq \text{Aut}(\mathbb{D})$ uniformizará una superficie de Riemann k -extremal de género g si y solamente si K está contenido en un grupo triangular Fuchsiano $\Delta \left(2, 3, 6 + \frac{12(g-1)}{k} \right)$ (con índice $12g + 6k - 12$).

Es interesante observar que en este contexto es posible que una superficie admita *simultáneamente* dos k -packings extremales para diferentes valores de k , como vemos en la Figura 2.8 a continuación.

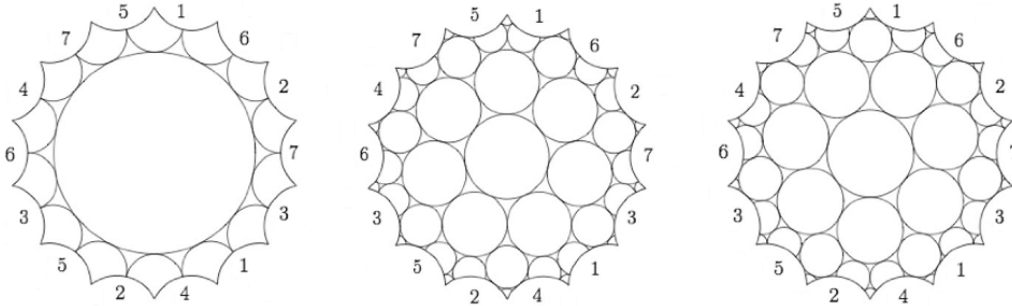


Figura 2.8: La famosa cuártica de Klein admite un dominio fundamental dado por un 14-ágono regular, cuyos lados con el mismo número sobre ellos están identificados conservando la orientación. Esta superficie es simultáneamente 3-extremal y 24-extremal, pero no es 1-extremal (ver la sección 4.5 en [Gir18]).

Otra novedad que surge al estudiar superficies k -extremales con $k > 1$ es que, a pesar de que existen superficies de Riemann 1-extremales para cada género $g \geq 2$, no es cierto que para todos los valores de k que elijamos existan superficies de Riemann k -extremales para cada género $g \geq 2$. Por ejemplo, es imposible que encontremos una superficie de Riemann de género 2 que sea 5-extremal, ni tampoco una que sea 13-extremal. De hecho, los únicos valores de k para los que sí podemos asegurar que existan superficies de Riemann k -extremales para cada género $g \geq 2$ son $k = 1, 2, 3, 6$ y 12 (ver Teorema 4 en [Gir18]).

En el siguiente capítulo nos dedicaremos a detallar y extender estos conceptos para superficies no-orientables, incluyendo también el caso de superficies planas. Con ello veremos hasta qué punto podemos responder las preguntas que han quedado abiertas en la literatura sobre estos temas, trabajando los casos orientables y no-orientables de manera interrelacionada.

Parte II

Resultados propios sobre las superficies k -extremales

Capítulo 3

Resultados inspirados en la literatura

3.1 Teoremas y preguntas fundamentales

En esta sección expondremos una serie de resultados nuevos en la línea de los ya vistos en la sección anterior, para así luego proponer una lista de cuatro preguntas fundamentales sobre las cuales girarán nuestros resultados principales.

Lo primero que haremos será demostrar que para cualquier superficie hiperbólica, independiente de si es orientable o no, podemos hallar un dominio fundamental en términos de las CDV asociadas a un k -packing (no necesariamente extremal).

Teorema 3.1. *Sea K un grupo NEC y sean $q_1, q_2 \dots q_k$ los centros de un k -packing (no necesariamente extremal) en la superficie uniformizada por K . Si $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/K$ es la proyección natural y $\{p_1, p_2 \dots p_k\} \subseteq \mathbb{D}$ cumple que $\pi(p_j) = q_j$ para cada $j \in \{1 \dots k\}$, entonces la unión siguiente de CDV*

$$F := \bigcup_{i=1}^k P_C(p_i)$$

resulta ser un dominio fundamental para nuestro grupo original K .

Demostración. Para demostrar lo anterior debemos verificar dos cosas:

1. Para cada $x \in \mathbb{D}$ existe $\gamma \in K$ tal que $\gamma(x) \in F$.
2. Si $z \in F \cap \gamma(F)$ con $\gamma \in K - \{1\}$, entonces obligatoriamente z debe estar en el borde de F .

Para ello utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.2. (*Lema 1 en [Gir18]*) Si $C = \pi^{-1}(\{q_1, \dots, q_k\})$ entonces para cada $p \in C$ y para cada $\gamma \in K$ tenemos que $D_C(\gamma(p)) = \gamma(D_C(p))$.

Demostración. Notemos que cada $\gamma \in K$ es una isometría de \mathbb{D} , por lo que tenemos

$$\begin{aligned} D_C(\gamma(p)) &= \{z \in \mathbb{D} : d(z, \gamma(p)) \leq d(z, \gamma_1 \gamma(p)), \forall \gamma_1 \in K\} \\ &= \{z \in \mathbb{D} : d(\gamma^{-1}(z), p) \leq d(\gamma^{-1}(z), \gamma^{-1} \gamma_1 \gamma(p)) \mid \forall \gamma_1 \in K\}. \end{aligned}$$

Como para cada $\gamma \in K$ la función $f \mapsto \gamma^{-1} f \gamma$ es una biyección de K en sí mismo, entonces el conjunto anterior es igual a

$$\{z \in \mathbb{D} : d(\gamma^{-1}(z), p) \leq d(\gamma^{-1}(z), f(p)) \mid \forall f \in K\}.$$

Lo anterior significa que $z \in D_C(\gamma(p))$ si y solamente si

$$d(\gamma^{-1}(z), p) \leq d(\gamma^{-1}(z), f(p)) \mid \forall f \in K,$$

que es equivalente a decir que $\gamma^{-1}(z) \in D_C(p)$, es decir, $z \in \gamma(D_C(p))$. ■

Ahora podemos proceder a demostrar el punto **1**. Tomemos un $x \in \mathbb{D}$. Como las CDV de C forman una teselación de \mathbb{D} , entonces x debe pertenecer a alguna CDV de la forma $D_C(y)$ para un cierto $y \in C$. Como y está en $C = \pi^{-1}(\{q_1, q_2, \dots, q_k\})$ entonces $y = \gamma(p_j)$ para algún $\gamma \in K$ y para algún j fijo. Esto significa que nuestro x está en $D_C(\gamma(p_j))$, que gracias al Lema anterior sabemos que es lo mismo que decir que x está en $\gamma(D_C(p_j))$. Así tendremos que $\gamma^{-1}(x) \in D_C(p_j) \subseteq F$, es decir, $\gamma^{-1}(x) \in F$.

Ahora demostraremos el punto **2**, es decir, que si $z \in F \cap \gamma(F)$ para algún $\gamma \in K - \{1\}$, entonces obligatoriamente z debe estar en el borde de F . Lo primero que debemos observar es que si

$$z \in \bigcup_{i=1}^k D_C(p_i) \cap \gamma \left(\bigcup_{i=1}^k D_C(p_i) \right)$$

entonces $z \in D_C(p_a) \cap D_C(\gamma(p_b))$ para algunos $a, b \in \{1 \dots k\}$. Dado que las CDV se intersectan solamente en sus aristas o vértices, entonces z estará en el interior de una arista o será un vértice de la teselación generada por dichas CDV.

Si z está en el interior de una arista de $D_C(p_a) \cap (D_C(\gamma(p_b)))$ entonces dicha intersección será justamente aquella arista, ya que las CDV son convexas. Ya que $\gamma \neq 1$ y los interiores de las CDV $D_C(p_b)$ y $D_C(\gamma(p_b))$ no tienen puntos interiores comunes, entonces obligatoriamente z estará en el borde de F .

Si z fuera un vértice de $D_C(p_a) \cap D_C(\gamma(p_b))$, entonces z podría ser un punto interior de F o no. Supongamos que sí lo es. Entonces existe un pequeño disco en torno a z que está completamente contenido en F y que intersectará los interiores tanto de $D_C(p_a)$ como de $D_C(\gamma(p_b))$. Pero sabemos que el interior de $D_C(\gamma(p_b))$ no intersecta a F (pues $\gamma \neq 1$) lo que nos lleva a un absurdo. Entonces z no puede ser un punto interior de F , lo que lo obliga a estar en el borde de F . ■

Acabamos de demostrar que K admite un dominio fundamental dado por la unión de k CDV asociadas a las preimágenes de los centros del k -packing en X . Ahora estamos en condiciones de demostrar un teorema análogo al Teorema 2.7 que funcione tanto en el caso orientable como no-orientable.

Teorema 3.3. *El radio máximo $R_{\chi,k}$ que puede tener un k -packing sobre una superficie hiperbólica (orientable o no) de característica de Euler χ es*

$$R_{\chi,k} = \cosh^{-1} \left(\left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{6(k-\chi)}} \right) \right).$$

Demostración. Sea $K \leq \text{Aut}^{\pm}(\mathbb{D})$ un grupo NEC que uniformiza una superficie hiperbólica X . Consideremos un k -packing de radio R sobre X , cuyos centros en X llamaremos $q_1, q_2 \dots q_k$. Sabemos que la preimagen de dicho k -packing a través de la proyección natural $\pi : \mathbb{D} \rightarrow X$ será un conjunto infinito de discos hiperbólicos de radio R en \mathbb{D} (recuerde la Figura 2.2), cuyos centros generarán una teselación de \mathbb{D} a través de sus CDV. Llamemos C al conjunto infinito de todos esos centros.

Consideremos ahora un conjunto de k puntos $\{p_1, p_2 \dots p_k\} \subseteq C$ de tal manera que $\pi(p_j) = q_j$, para cada $j \in \{1 \dots k\}$. Por el Teorema 3.1 sabemos que el conjunto

$$F = \bigcup_{i=1}^k D_C(p_i)$$

resulta ser un dominio fundamental para nuestro grupo original K .

Por el teorema de Böröczky sabemos que para cualquier $j \in \{1 \dots k\}$ tenemos la desigualdad

$$\frac{\text{Área de un círculo de radio } R}{\text{Área de la CDV que lo contiene}} = \frac{2\pi(\cosh(R) - 1)}{\text{Area}(D_C(p_j))} \leq \frac{3\alpha_R(\cosh(R) - 1)}{\pi - 3\alpha_R},$$

donde α_R es un ángulo interior del triángulo equilátero de lado $2R$. Lo anterior se traduce en que

$$\text{Area}(D_C(p_j)) \geq \frac{2\pi(\pi - 3\alpha_R)}{3\alpha_R}.$$

Si sumamos las áreas de todas las CDV de la forma $D_C(p_j)$ obtendremos, gracias al teorema de Gauss-Bonnet, el área $-2\pi\chi$ de F , por lo que

$$-2\pi\chi = \sum_{j=1}^k \text{Area}(D_C(p_j)) \geq \sum_{j=1}^k \left(\frac{2\pi(\pi - 3\alpha_R)}{3\alpha_R} \right) = \frac{2k\pi(\pi - 3\alpha_R)}{3\alpha_R},$$

lo que nos lleva directamente a que

$$\alpha_R \geq \frac{k\pi}{3(k-\chi)}.$$

Dado que queremos una desigualdad que involucre a R en vez de α_R , podemos observar la Figura 3.1.

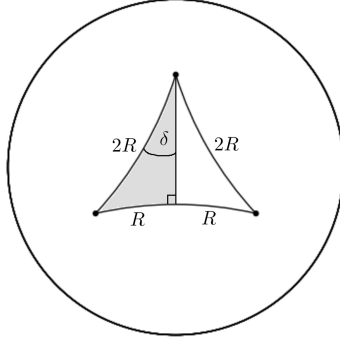


Figura 3.1: Mitad del triángulo equilátero de ángulo $2\delta = \alpha_R$ y lado $2R$ en \mathbb{D} .

Por el teorema del seno hiperbólico (ver Teorema 1.4) aplicado al triángulo oscuro obtenemos

$$\frac{\sinh(R)}{\sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right)} = \frac{\sinh(2R)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Considerando que $\sinh(2R) = 2 \sinh(R) \cosh(R)$ obtenemos de lo anterior que

$$\sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) = \frac{1}{2 \cosh(R)},$$

y dado que la función $x \mapsto \sin(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $]0, \frac{\pi}{6}[$ en el cual vive $\frac{\alpha_R}{2}$ entonces tenemos que

$$\frac{1}{2 \cosh(R)} = \sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\frac{k\pi}{3(k-\chi)}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{\frac{6(k-\chi)}{k}}\right),$$

que es lo mismo que decir que

$$\cosh(R) \leq \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{\frac{6(k-\chi)}{k}}\right)}.$$

Finalmente, dado que $x \mapsto \cosh^{-1}$ es una función creciente en $]0, +\infty[$ entonces

$$R \leq \cosh^{-1}\left(\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{\frac{6(k-\chi)}{k}}\right)}\right) = R_{\chi,k}.$$

■

La demostración del teorema anterior nos indica la forma específica que deberá tener un dominio fundamental para alcanzar dicha cota, con la cual conseguiremos caracterizar las superficies no-orientables k -extremales:

Teorema 3.4. *Un grupo NEC $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ uniformizará una superficie hiperbólica k -extremal de característica de Euler χ (orientable o no) si y solamente si K admite como dominio fundamental una unión de k N -ágonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, con $N = \frac{6(k-\chi)}{k}$ lados cada uno.*

Demostración. Para verificar que el dominio está compuesto por el mismo tipo de polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ basta observar que, por el teorema de Böröczky, para conseguir la densidad máxima de cada disco sobre su CDV respectiva necesitamos que todos los centros sucesivos del empaquetamiento de discos en \mathbb{D} formen entre sí triángulos equiláteros de lado $2R$. Esto, como podemos ver en la parte superior izquierda de la Figura 3.2, obliga a que entre cada terna de círculos del empaquetamiento haya un vértice de las CDV donde de junten 3 aristas con ángulos de $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

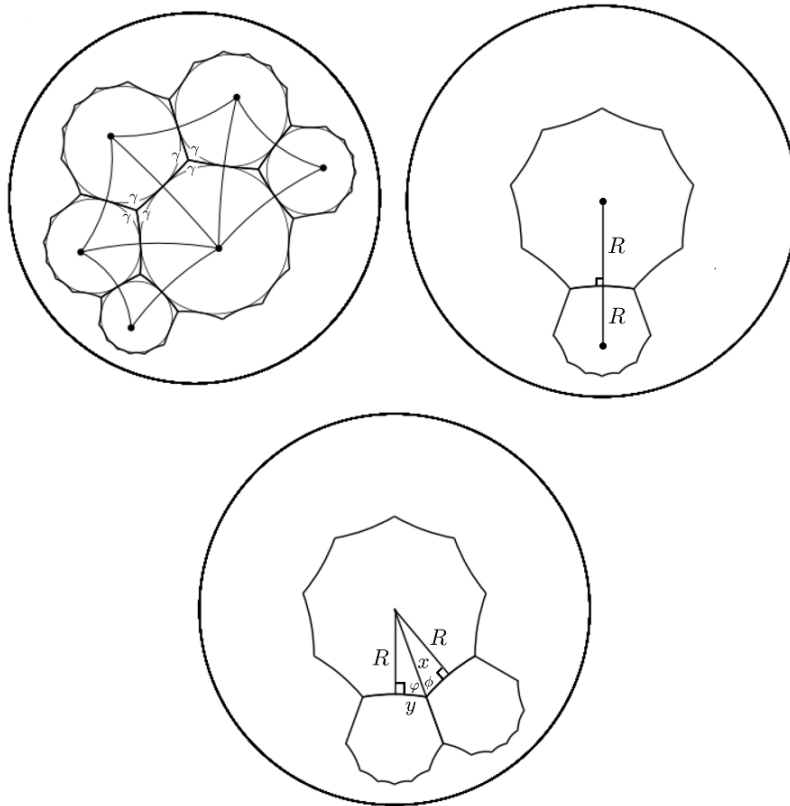


Figura 3.2: Las tres figuras están hechas con 9-ágonos regulares. Cada ángulo de cada una de las CDV debe ser de $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ (arriba izquierda). La geodésica que une dos centros consecutivos de la teselación queda dividida en dos partes iguales por la arista común (arriba derecha). Todos los triángulos rectángulos son congruentes (abajo).

En la parte superior derecha de la Figura 3.2 podemos visualizar cómo es que la geodésica que une dos centros consecutivos de los polígonos de la teselación queda dividida en dos partes iguales por la arista común de dichos polígonos, por lo que el valor de todas las distancias entre un centro y su arista respectiva es R . Esto nos lleva a la configuración de triángulos de la Figura 3.2 abajo, donde sabemos que $\varphi + \phi = \frac{2\pi}{3}$. Si aplicamos el Teorema 1.4 a ambos triángulos obtendremos que

$$\frac{\sinh(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sinh(R)}{\sin(\varphi)} = \frac{\sinh(R)}{\sin(\phi)},$$

y por lo tanto $\sin(\varphi) = \sin(\phi) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)$. De esto resulta de manera directa que

$$\varphi = \phi = \frac{\pi}{3}.$$

Si utilizamos el Teorema 1.5 sobre el triángulo rectángulo con el lado y obtenemos que

$$\sinh(y) = \frac{\tanh(R)}{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)},$$

el cual es un valor fijo. Con esto podemos concluir que todos los triángulos rectángulos que conforman la teselación tienen lados R, y, x , lo cual significa que son congruentes y que unidos forman polígonos regulares con la misma cantidad de lados.

Si denotamos por N dicha cantidad de lados entonces podemos concluir nuestra demostración comparando el área de la unión de $2kN$ triángulos rectángulos (que conforman la unión de k N -ágonos regulares) con el área del dominio fundamental de la superficie en términos de χ . Como cada triángulo rectángulo tiene ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{N}$ entonces

$$2kN \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{N} \right) \right) = \frac{k\pi(N-6)}{3}.$$

Si comparamos este valor con el área total del dominio fundamental tendremos que $\frac{k\pi(N-6)}{3} = -2\pi\chi$, y por lo tanto $N = \frac{6(k-\chi)}{k}$. ■

También podemos obtener como consecuencia de todo lo anterior una caracterización de la superficies k -extremales tanto orientables como no-orientables en términos de grupos triangulares, extendiendo lo obtenido en el Teorema 2.8:

Corolario 3.4.1. *Un grupo NEC libre de torsión $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ uniformizará una superficie hiperbólica k -extremal (orientable o no) de característica de Euler χ sí y solamente sí K está contenido en un grupo triangular extendido $\Delta^\pm\left(2, 3, \frac{6(k-\chi)}{k}\right)$ (con índice $12(k-\chi)$).*

Demostración. Esto es consecuencia del Teorema 3.4, ya que la existencia de un dominio fundamental para el grupo NEC K dado por una unión de N -ágonos es equivalente a la inclusión de K en un grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, N)$ generado por las reflexiones sobre los lados de uno de los $2kN = 2k \cdot \frac{6(k-\chi)}{k} = 12(k-\chi)$ triángulos rectángulos que conforman cualquiera de sus N -ágonos. De esta manera el índice de K en $\Delta^\pm(2, 3, N)$ será $2kN$ en el caso no-orientable, mientras que en el caso orientable dicho grupo tendrá índice kN en el grupo Fuchsiano $\Delta(2, 3, N)$, o sea también tendrá índice $2kN$ en $\Delta^\pm(2, 3, N)$. ■

Corolario 3.4.2. *Ninguna superficie hiperbólica k -extremal puede tener borde.*

Demostración. Supongamos que existe una superficie hiperbólica X con alguna componente de borde que sí sea k -extremal. Por la caracterización dada en la demostración del Teorema 3.4 tenemos que dicha superficie admitirá un dominio fundamental dado por la unión de k N -ágonos regulares, cada uno con ángulos $\frac{2\pi}{3}$. Si $p \in X$ es un punto en alguna de las componentes de borde, entonces la suma total de los ángulos correspondientes a cada elemento del ciclo de vértices asociado a p en el dominio fundamental de X debe sumar π . Pero el ángulo de un vértice en el borde del dominio fundamental solamente puede ser de $\frac{2\pi}{3}$ (si está solamente en un polígono) ó $\frac{4\pi}{3}$ (si está en la intersección de dos polígonos), lo que imposibilita que la suma de los ángulos en dicho ciclo de vértices sea exactamente π . Esto significa que ninguna superficie con borde admite un dominio como el requerido. ■

Este resultado es interesante ya que en ningún momento en este trabajo habíamos puesto restricciones sobre nuestras superficies k -extremales aparte de la compacidad, y ahora hemos descubierto que tienen una nueva restricción topológica: ninguna de ellas puede tener borde.

Con respecto a la k -extremalidad en el caso plano podemos ver cuánto podemos recuperar de los argumentos anteriores hechos en el caso hiperbólico, notando algunas diferencias. Comencemos recordando que el teorema de Böröczky nos indica que la máxima densidad de círculos en \mathbb{C} dentro de sus CDV respectivas se consigue cuando dichas CDV son hexágonos regulares. En estas condiciones vemos que, para replicar el Lema 3.2, necesitamos que el grupo uniformizador solamente contenga isometrías de \mathbb{C} , lo cual sabemos que siempre sucede pues los sidepairing asociados a polígonos regulares siempre son isometrías (ver Observación 1.4). Esto tendrá como consecuencia que para que una superficie plana contenga un empaquetamiento de k discos de densidad máxima en sus respectivas CDV, obligatoriamente debe admitir algún dominio fundamental que sea la unión de k hexágonos regulares, lo cual nos lleva al resultado siguiente:

Teorema 3.5. *Un grupo $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{C})$ uniformizará una superficie plana (orientable o no) que admita un empaquetamiento de k discos disjuntos de densidad máxima si y solamente si K admite como dominio fundamental una unión de k hexágonos regulares.*

Por el teorema anterior podemos extender la definición de k -extremalidad dada en la Definición 2.1 al caso plano como sigue:

Definición 3.1. Diremos que una superficie plana es k -extremal si admite un dominio fundamental dado por la unión de k hexágonos regulares. Al empaquetamiento dado por los k círculos inscritos a dichos hexágonos lo denominaremos k -packing extremal.

Exactamente por las mismas razones dadas en el Corolario 3.4.1 tenemos que la caracterización de las superficies planas k -extremales en términos de la forma de su dominio fundamental tiene su equivalente algebraico:

Corolario 3.5.1. Un grupo libre de torsión $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{C})$ uniformizará una superficie k -extremal plana (orientable o no) sí y solamente sí K está contenido en un grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, 6)$ con índice $12k$.

Observación 3.1. Debemos dejar claro que el Teorema 3.3 no tiene paralelo en el caso plano, básicamente porque en \mathbb{D} la imagen de un polígono regular por cualquier elemento de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ es una figura isométrica al polígono original, mientras que en \mathbb{C} la imagen de un hexágono regular por un elemento de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{C})$ no es necesariamente un hexágono isométrico al original. Esto es así ya que $\text{Isom}(\mathbb{D}) = \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ pero $\text{Isom}(\mathbb{C}) \subsetneq \text{Aut}^\pm(\mathbb{C})$, lo cual nos permite que en \mathbb{C} , a diferencia de \mathbb{D} , podamos ampliar figuras manteniendo sus ángulos y proporciones métricas. En última instancia esto nos dice que aunque podamos definir la k -extremalidad de una superficie hiperbólica recurriendo tanto al radio máximo como a la forma de su dominio fundamental, en el caso plano solamente podemos describirla en términos de la forma de su dominio fundamental.

Ya habiendo caracterizado nuestras superficies k -extremales tanto en el caso orientable como no-orientable y tanto en el caso hiperbólico como plano, podemos proceder a analizar el comportamiento del valor de la densidad de los k -packings extremales en ellas. Comencemos con el caso hiperbólico. Dado que en este caso el radio máximo de un k -packing está acotado por $R_{\chi,k}$, entonces la densidad óptima de dicho k -packing será

$$\frac{k \cdot 2\pi(\cosh(R_{\chi,k}) - 1)}{-2\pi\chi} = \frac{6 \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{N})} - 1 \right)}{N - 6},$$

donde $N = \frac{6(k-\chi)}{k}$, que como ya hemos visto en el Teorema 3.4, es el número de lados de los polígonos regulares que conforman su dominio fundamental.

Así podemos ver que esta densidad no depende del valor de k , sino que solamente depende de la cantidad N de lados que genera su dominio fundamental. No es difícil observar que dicha expresión es una función estrictamente creciente en N , y dado que el valor de N crece con el género de la superficie (pues $N = \frac{6(k-\chi)}{k}$ y χ disminuye a medida que aumenta el género) entonces esto nos indica que la densidad alcanzará sus mayores valores a medida que el género tiende a infinito.

El mínimo valor de esta densidad en nuestras superficies hiperbólicas se alcanza cuando sus dominios fundamentales están conformados por los polígonos regulares con la menor cantidad de lados posibles, es decir, por heptágonos, y su valor será

$$\frac{6 \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{7})} - 1 \right)}{7 - 6} \left(\approx 0.91429. \right.$$

A pesar de que el valor de las densidades va aumentando a medida que crece N , es curioso observar que su valor no tiende a 1 a medida que N tiende a infinito, ya que tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{6 \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{N})} - 1 \right)}{N - 6} \left(= \frac{3}{\pi} \approx 0.95492. \right.$$

De esta manera hemos visto que a medida que N viaja de 7 en adelante, el valor de la densidad viaja de $6 \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{7})} - 1 \right) \left(a \frac{3}{\pi} \right.$. Y si recordamos lo visto con la Figura 2.4 que la densidad en el caso de $N = 6$ corresponde a

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90689,$$

entonces podemos concluir que las densidades óptimas forman una sucesión estrictamente creciente en relación a N , a partir no solo de $N = 7$ sino de $N = 6$.

De hecho, es interesante observar que el valor de la densidad para $N = 6$ “proviene” del caso hiperbólico, ya que

$$\lim_{N \rightarrow 6^+} \frac{6 \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{N})} - 1 \right)}{N - 6} \left(= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \right.$$

Esta curiosa observación la hizo Coxeter en la página 265 de [Cox54], en la cual vemos que considera esta densidad asociada a \mathbb{C} como el límite de una función que, por un lado, refleja una situación definida exclusivamente en \mathbb{D} ; y por otro lado, es *discreta*.

Los resultados que hemos expuesto en esta sección están claramente inspirados en la idea de extender lo ya obtenido en la literatura para superficies hiperbólicas y planas que admiten empaquetamientos de discos de densidad máxima, y todo esto nos servirá de base para poder abordar las cuatro preguntas fundamentales siguientes que guiarán el resto de nuestro trabajo, y que responderemos detalladamente en las secciones posteriores:

P1. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies k -extremales, tanto orientables como no-orientables, de género g ?

P2. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies de género g , tanto orientables como no-orientables, que sean simultáneamente k_1 - y k_2 -extremales, con $k_1 \neq k_2$?

P3. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies k -extremales de género g , tanto orientables como no-orientables, con dos o más k -packings extremales?

P4. ¿Existirá algún camino viable computacionalmente que nos permita determinar la totalidad de k -packings del mismo tipo sobre una superficie k -extremal dada, tanto en el caso orientable como no-orientable?

3.2 La existencia de superficies k -extremales

Comenzaremos abordando la primera de las cuatro preguntas recién propuestas:

P1. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies k -extremales, tanto orientables como no-orientables, de género g ?

Por un lado notemos que DeBlois dio una respuesta a **P1** en [DeB20] para el caso orientable y no-orientable; mientras que por otro lado Girondo abordó en [Gir18] el caso orientable de la pregunta **P1** en un lenguaje similar al que utilizamos en este trabajo. En esta sección expondremos una demostración para el caso no-orientable, que obtuvimos de manera independiente y cuyo lenguaje es coherente con el del resto de esta tesis. El teorema que demostraremos es el siguiente.

Teorema 3.6. *Una condición suficiente para que exista una superficie hiperbólica no-orientable k -extremal de género g es que k divida a $6(g - 2)$.*

Demostración. Dividiremos la demostración en los siguientes puntos:

1. La existencia de una superficie no-orientable k -extremal de género g es equivalente a la existencia de un grupo NEC K que admite como un dominio fundamental la unión de k polígonos regulares de N lados, donde $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$.

2. Dado un valor fijo de $N \geq 7$ existe una infinidad de valores de g y k tales que $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$. Si hacemos una columna con todos los pares (g, k) que cumplen dicha igualdad bajo un cierto valor de N y ordenándolos de acuerdo al tamaño de k , y si hacemos este trabajo para cada valor de $N \geq 7$, obtenemos la siguiente matriz infinita:

N	7	8	9	10	11	12	13	...
	(3, 6)	(3, 3)	(3, 2)	(4, 3)	(7, 6)	(3, 1)	(9, 6)	...
	(4, 12)	(4, 6)	(4, 4)	(6, 6)	(12, 12)	(4, 2)	(16, 12)	...
	(5, 18)	(5, 9)	(5, 6)	(8, 9)	(17, 18)	(5, 3)	(23, 6)	...

Diremos que una una superficie k -extremal de género g no-orientable es *primitiva* si el par (g, k) pertenece a la primera fila de pares (g, k) de esta matriz (o sea, que tenga el menor k posible para dicho N). También llamaremos *primitivo* a dicho par (g, k) y al grupo que uniformice dicha superficie. En estas condiciones el valor de k en el par primitivo (g, k) asociado a cada N será $k_0 = \frac{6}{\gcd(6, N)}$.

3. Existe un grupo NEC que uniformiza una superficie *primitiva* no-orientable k -extremal de género g para $N = 7, 8, 9$ y 12 .

4. A partir de las superficies primitivas del punto **3** es posible construir grupos NEC que uniformicen superficies *primitivas* no-orientables k -extremales de género g para cada $N \geq 7$.

5. A partir de las superficies primitivas construidas en el punto **4** es posible construir grupos NEC que uniformicen superficies no-orientables k -extremales de género g para todos los pares (g, k) de la matriz infinita anterior.

El punto **1** es precisamente el contenido del Teorema 3.4.

El punto **2** comienza con una manera visual de expresar las soluciones de la ecuación $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$, ordenando los pares (g, k) bajo el valor de N correspondiente. Dichos ordenamientos permiten ver de manera clara a lo que nos referimos con una superficie primitiva. Para demostrar que el valor de k en el par primitivo (g, k) asociado a N es $\frac{6}{\gcd(6, N)}$ notaremos que, por el punto **1**, debemos tener la igualdad $k(N - 6) = 6(g - 2)$, la cual dividiremos por $\gcd(6, N - 6)$ y obtendremos la siguiente igualdad de números enteros

$$k \frac{(N - 6)}{\gcd(6, N - 6)} = (g - 2) \frac{6}{\gcd(6, N - 6)}.$$

Dado que $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$ divide al lado derecho, entonces debe dividir también al lado izquierdo, es decir $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$ divide a $k \frac{(N - 6)}{\gcd(6, N - 6)}$. Pero $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$ y $\frac{(N - 6)}{\gcd(6, N - 6)}$ son coprimos, por lo que $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$ divide a k . De esta manera sabemos que cualquier k que cumpla la ecuación $k(N - 6) = 6(g - 2)$ debe ser divisible por $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$, y evidentemente el más pequeño valor que cumple dicho requisito es precisamente $\frac{6}{\gcd(6, N - 6)}$. Como los divisores comunes de 6 y $N - 6$ son los mismos que los de 6 y N , entonces $\gcd(6, N - 6) = \gcd(6, N)$ y por lo tanto el menor valor de k será $\frac{6}{\gcd(6, N)}$, como queríamos. Si llamamos k_0 a este valor y g_0 a su género asociado, por la definición de superficie primitiva sabemos que el par (g_0, k_0) es el par primitivo para dicho N . Por otro lado, por la propia definición de k_0 sabemos que este número divide a k para cada k que cumple la ecuación original (observe nuevamente la matriz del punto **2**).

El punto **3** es cierto pues basta con considerar las 4 superficies no-orientables de la Figura 3.3, cuyos dominios son uniones de polígonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Una forma de obtener dichas superficies¹ es pidiéndole al programa GAP ([GAP21]) subgrupos de índice $2kN$ en el grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ que contengan algún elemento anticonformal, para los pares $(N, k) = (7, 6), (8, 3), (9, 2), (12, 1)$.

¹ Para una exposición muy detallada de cómo construir una superficie a partir del grupo que nos entrega GAP le sugerimos ver el punto 2 del procedimiento total en la sección 7.1.

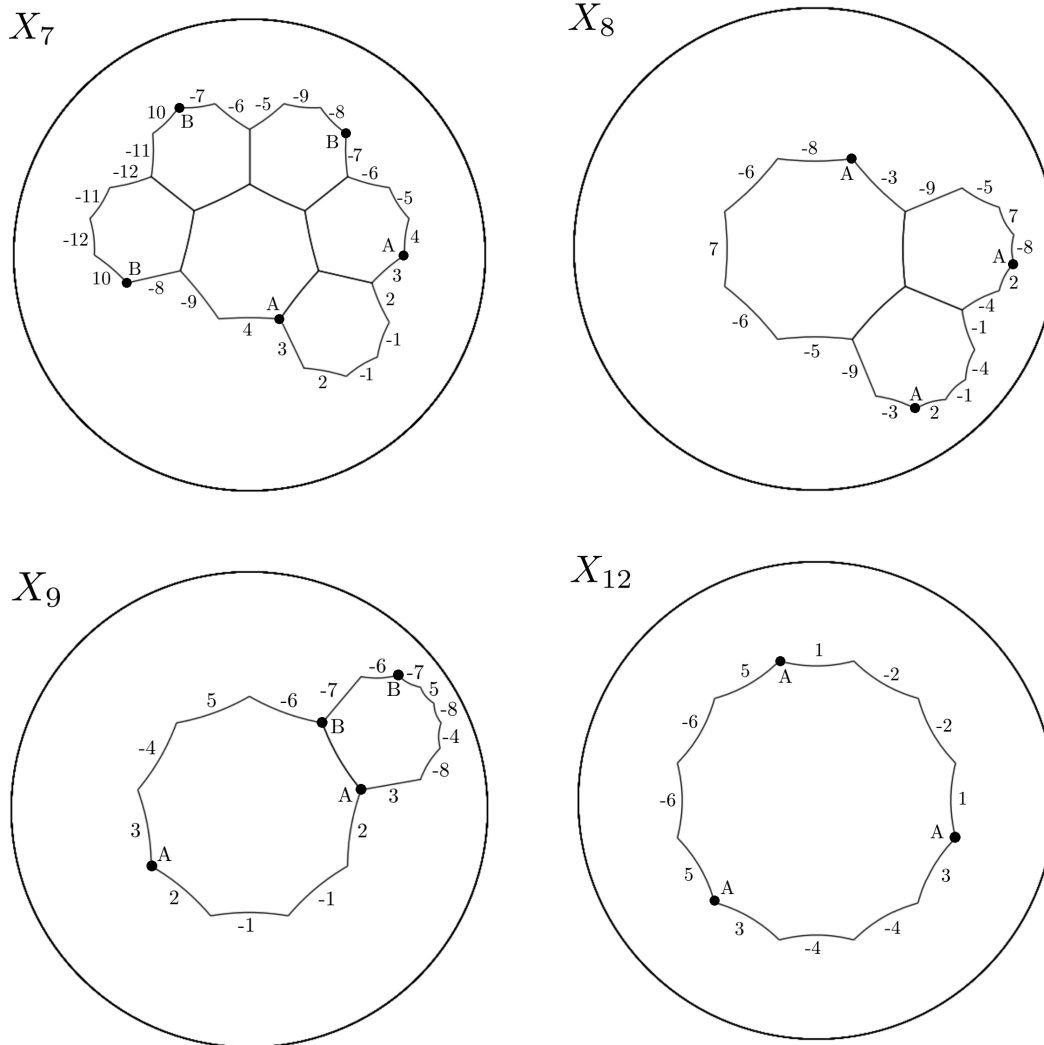


Figura 3.3: Las cuatro superficies primitivas no-orientables X_7 , X_8 , X_9 y X_{12} con las que construiremos todas las demás, con $(g, k) = (3, 6)$, $(3, 3)$, $(3, 2)$ y $(3, 1)$, respectivamente.

El punto 4 esta basado en una serie de “manipulaciones” que diseñamos sobre los dominios fundamentales de las cuatro superficies anteriores que nos permiten aumentar sistemáticamente la cantidad de lados de los polígonos regulares de éstos. De esta manera manipulamos dominios con valores pequeños de N para conseguir dominios de superficies con un mayor valor de N . Hemos llamado *edge-grafting* a cada una de las cuatro manipulaciones EG1, EG2, EG3 y EG4 de los dominios que exponemos en la Figura 3.4.

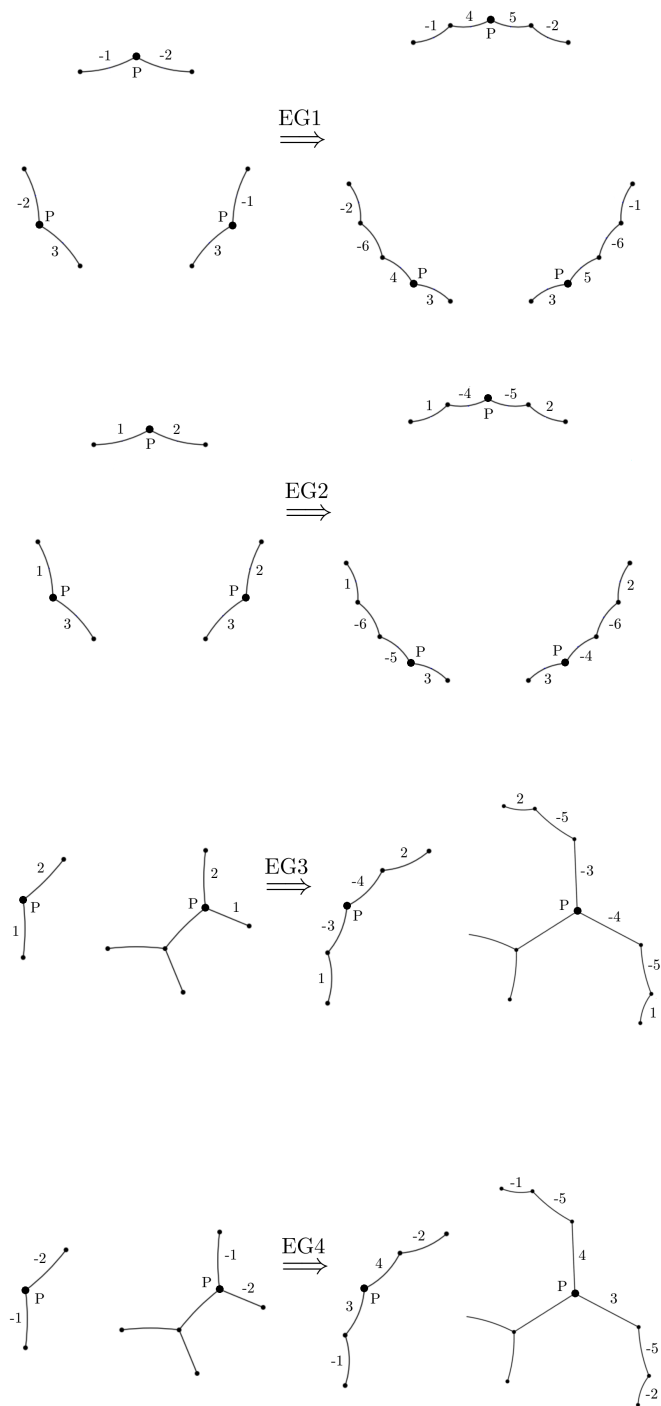


Figura 3.4: Cuatro edge-graftings diferentes en un ciclo de vértice P .

Para ver cómo realizar estas operaciones observemos el dominio fundamental de la superficie X_8 en la Figura 3.3, poniendo atención en el ciclo del vértice A . Si aplicamos el edge-grafting EG1 a dicho vértice A lo que haremos es insertar tres pares de nuevas aristas que se emparejarán como lo indica el esquema de EG1 en la Figura 3.4, con la importante propiedad de que dicha manipulación deja intactos los sidepairings de las aristas antiguas. Así es como podemos reemplazar los tres 8-ágonos originales por tres 10-ágonos regulares también con ángulos de $\frac{2\pi}{3}$. En otras palabras, EG1 aplicado al ciclo del vértice A en X_8 nos entrega la superficie X_{10} en la Figura 3.5, que no es otra cosa sino una superficie 3-extremal de género 4 uniformizada por un subgrupo de índice 60 en el grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, 10)$. Notemos que el par (g, k) correspondiente a la superficie primitiva de $N = 10$ es precisamente $(4, 3)$, por lo tanto acabamos de construir una superficie primitiva asociada a $N = 10$.

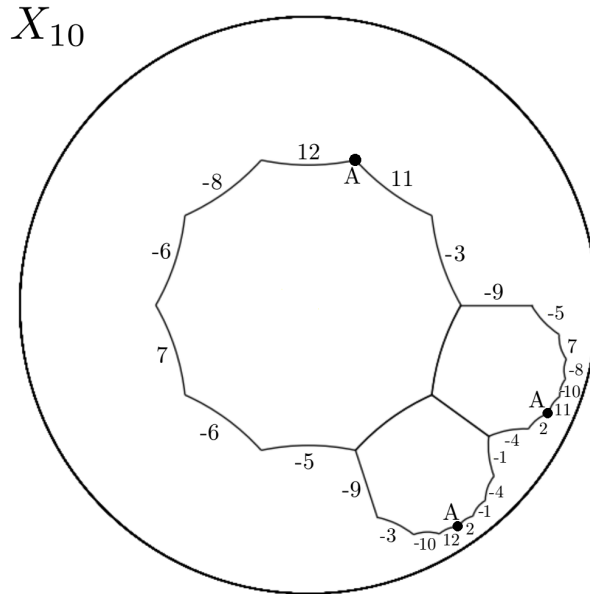


Figura 3.5: La superficie X_{10} obtenida aplicando EG1 al ciclo del vértice A de X_8 .

Notemos que si aplicamos EG2 al vértice A de X_{10} obtenemos una superficie 3-extremal de género 5 uniformizada por un subgrupo de índice 72 en el grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, 12)$. Dado que el par (g, k) primitivo para dicho N es $(3, 1)$ y el que obtuvimos es $(5, 3)$, podemos ver claramente que los edge-graftings no necesariamente nos conducen a superficies primitivas.

Ya hemos visto como trabajan EG1 y EG2 en las superficies anteriores, pero EG3 y EG4 tienen un pequeño detalle que debemos tener en cuenta. A diferencia de EG1 y EG2, sucede que EG3 y EG4 involucran un vértice P que solamente puede aparecer 2 veces en el borde del dominio fundamental: una vez como vértice de un único polígono (ángulo $\frac{2\pi}{3}$) y otra vez como el vértice común de dos polígonos adyacentes (ángulo $\frac{4\pi}{3}$).

Es importante destacar que, tal cual con EG1 y EG2, las manipulaciones dadas por EG3 y EG4 pueden ser aplicadas de manera consecutiva, una tras otra, de manera indefinida en cualquier orden, ya que la configuración resultante en una de ellas es la configuración inicial de la otra. Tanto EG3 como EG4 pueden ser aplicados, en ese mismo orden, sobre los vértices A y B de la superficie X_9 de la Figura 3.3 (una superficie primitiva 2-extremal de género 3). El resultado, X_{15} , es una superficie primitiva 2-extremal de género 5.

Otra importante combinación de edge-graftings es útil a la hora de producir superficies primitivas para el caso de $N = 11$ a partir de la superficie X_7 de la Figura 3.3. El procedimiento comienza por aplicar EG3 al vértice A y EG1 al vértice B , lo que produce un incremento de dos aristas en cada polígono, que nos entrega una superficie 6-extremal con $N = 9$ (género 5), la cual no es primitiva pues el par primitivo de $N = 9$ es $(3, 2)$. Pero si ahora aplicamos a esta nueva superficie EG4 y EG2 obtendremos una superficie X_{11} que resulta ser 6-extremal de género 7 ($N = 11$) y por lo tanto primitiva.

Resumiendo, hemos construido superficies primitivas extremales X_N para los seis casos básicos $7 \leq N \leq 12$. Notemos que para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\gcd(6, N) = \gcd(6, N + 6k)$, y por lo tanto los valores respectivos de k_0 para ambos números N y $N + 6k$ son iguales. Este comportamiento cíclico nos permite saber cuándo una superficie construida a partir de las seis superficies básicas y los edge-graftings será o no primitiva de manera inequívoca. Por ejemplo, utilizando los edge-graftings que hemos descrito arriba, podemos construir superficies a partir de X_7 cuyo N asociado sea $7, 9, 11, 13, 15 \dots$, pero solamente serán primitivas aquellas cuyos N cumplan $\frac{6}{\gcd(6, N)} = 6$. Estos valores son precisamente aquellos que cumplen $N \equiv \pm 1 \pmod{6}$, por lo que este procedimiento nos permite construir ejemplos de superficies primitivas para cada uno de dichos valores de N . De la misma manera es que a partir de X_8 , con los edge-graftings descritos arriba para obtener X_{10} , podemos construir ejemplos de superficies primitivas para $N \equiv \pm 2 \pmod{6}$. Por otro lado, con los edge-graftings que aplicamos a X_9 para obtener X_{15} podemos construir ejemplos de superficies primitivas para cualquier $N \equiv 3 \pmod{6}$. Finalmente podemos construir, a partir de X_{12} y aplicando alternadamente los edge-graftings EG2 y EG1 a los vértices indicados en la Figura 3.3, ejemplos de superficies primitivas para cada $N \equiv 0 \pmod{6}$.

El punto **5** nos indica que estamos en condiciones de construir superficies para todos los demás pares (g, k) de la matriz infinita que vimos en el punto **2** (los no-primitivos que nos faltaban). Para ver que este punto es cierto nos apoyaremos en el lema siguiente:

Lema 3.7. *Supongamos que K es un grupo NEC libre de torsión que uniformiza una superficie no-orientable y sin borde de género $g \geq 3$. Tenemos así que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subgrupo $K_n \leq K$ tal que $[K : K_n] = n$ y K_n uniformizará también una superficie no-orientable y sin borde.*

Demostración. La signatura de K es $(g; -; [-]; \{-\})$, por lo que este grupo admite una presentación

$$K = \left\langle d_1, d_2, \dots, d_g : \prod_{i=1}^g d_i^2 = 1 \right\rangle$$

donde las d_i 's son glide-reflections, cada una con orden infinito. Si $h : K \rightarrow \mathbb{Z}$ es el homomorfismo sobreyectivo determinado por

$$d_1 \mapsto 2$$

$$d_2 \mapsto 1$$

$$d_3 \mapsto 1$$

$$d_j \mapsto 0, \quad \forall j \in \{4 \dots g\},$$

entonces podemos tomar como $h^{-1}(n\mathbb{Z})$ el grupo K_n buscado. Para ver que K_n siempre tendrá un elemento anticonformal basta con observar que $d_1 d_2^{-1} d_3^{-1}$ es un elemento anticonformal que está en $h^{-1}(n\mathbb{Z})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ver que K_n uniformizará una superficie sin borde basta con notar que las componentes de borde provienen de las reflexiones que tenga el grupo, pero como K no tenía ninguna, entonces K_n tampoco la tendrá. ■

Notemos ahora que si un grupo NEC K uniformiza una superficie no-orientable k -extremal de género g , y si $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$, entonces obligatoriamente este grupo debe estar incluido en un grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, N)$ con un índice $2kN$ que depende directamente de k , y que ya sabemos que será un múltiplo de $k_0 = \frac{6}{\gcd(6, N)}$.

De esta manera podemos justificar el punto **5** como sigue: consideremos cualquier par (g, k) que cumpla la condición que k divida a $6(g-2)$. Si dicho par es primitivo, entonces ya sabemos como construir una superficie para dicho par gracias a los puntos **3** y **4**. En caso de que no sea primitivo, bastará con ver bajo qué N está dicho par (g, k) en la matriz dada en el punto **2**, y considerando que la superficie primitiva para dicho N tiene asociada el par (g_0, k_0) entonces tomaremos un subgrupo K de índice $\frac{k}{k_0}$ del grupo primitivo asociado $K_{(g_0, k_0)}$ (podemos hacer esto gracias al Lema 3.7), de tal manera que tendremos las inclusiones $K \leq K_{(g_0, k_0)} \leq \Delta^\pm(2, 3, N)$ y por lo tanto

$$[\Delta^\pm(2, 3, N) : K] = [\Delta^\pm(2, 3, N) : K_{(g_0, k_0)}][K_{(g_0, k_0)} : K] = 2k_0N \cdot \frac{k}{k_0} = 2kN,$$

lo que significa que el grupo K que hemos construido uniformiza una superficie no-orientable para nuestro par no-primitivo (g, k) . Con esto hemos finalmente demostrado el punto **5**. ■

Ahora analizaremos qué sucede con la existencia de superficies k -extremales planas. Recordemos que Bavard mostró como ejemplos de superficies 1-extremales planas un toro y una botella de Klein, como vimos en la Figura 2.5. Al problema de si existen superficies planas k -extremales, tanto orientables como no-orientables, le damos respuesta en el teorema siguiente:

Teorema 3.8. *Existen superficies planas k -extremales orientables y no-orientables para cada $k \geq 1$.*

Demostración. En la Figura 3.6 podemos ver dos configuraciones en \mathbb{C} de hexágonos regulares, que a través de las identificaciones de los lados indicadas por los números sobre ellos obtendremos un toro complejo k -extremal (arriba) y una botella de Klein k -extremal (abajo).

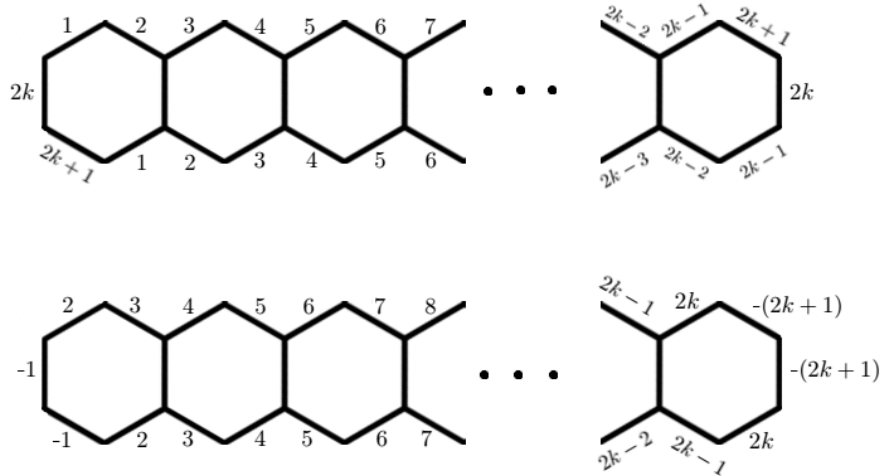


Figura 3.6: Un toro k -extremal (arriba) y una botella de Klein k -extremal (abajo). ■

Para finalizar esta sección nos gustaría agregar una serie de resultados que son consecuencias de las condiciones de existencia de este tipo de superficies, similares a los obtenidos en el Teorema 4 de [Gir18]. Con estos resultados extendemos el trabajo de este autor a las superficies hiperbólicas no-orientables:

Teorema 3.9. *Los únicos valores de k que cumplen que existe alguna superficie hiperbólica k -extremal no-orientable para cada género $g \geq 3$ son $k = 1, 2, 3$ y 6 .*

Demostración. Dado que la condición de divisibilidad $k \mid 6(g-2)$ es necesaria y suficiente para la existencia de una superficie k -extremal de género g , entonces podemos obtener lo pedido en el teorema gracias al hecho de que son equivalentes que $k \mid 6(g-2)$ para cada $g \geq 3$ y que $k \mid 6$. ■

Es curioso que para cualquier género $g \geq 3$ podamos encontrar una superficie que admita un 6-packing, pero no necesariamente un 5-packing. La dependencia aritmética en una propiedad que en apariencia es puramente métrica/topológica es muy interesante, y a continuación veremos dos resultados más en la misma línea.

Teorema 3.10. *Para un valor dado de k existirán superficies k -extremales no-orientables de género g sí y solamente sí $\frac{k}{\gcd(k,6)}$ divide a $(g-2)$. En particular, para un valor dado de k existen infinitos valores de $g \geq 3$ tal que existe una superficie hiperbólica k -extremal no-orientable de género g .*

Demostración. Recordemos que si N es el número de lados de cada polígono que define el dominio fundamental de la superficie k -extremal de género g en cuestión, entonces tenemos que $k(N-6) = 6(g-2)$, y al dividir a ambos lados de la igualdad por $\gcd(k,6)$ obtenemos la siguiente igualdad de números enteros

$$(N-6)\frac{k}{\gcd(k,6)} = (g-2)\frac{6}{\gcd(k,6)}.$$

De manera similar a lo que hicimos en el punto **2** de la demostración del Teorema 3.6 podemos ver que como $\frac{k}{\gcd(k,6)}$ divide al lado izquierdo de la ecuación, entonces también debe dividir al lado derecho, y como dicho número es coprimo con $\frac{6}{\gcd(k,6)}$ entonces debemos tener que $\frac{k}{\gcd(k,6)}$ debe dividir a $(g-2)$. El recíproco es evidente pues si $\frac{k}{\gcd(k,6)}$ divide a $(g-2)$ entonces la igualdad anterior resulta ser una igualdad de números enteros, y concluimos la existencia de la superficie k -extremal de género g por la condición de divisibilidad $k \mid 6(g-2)$. ■

Finalmente, en contraste a la infinitud de valores de g para un k dado, tenemos el teorema siguiente:

Teorema 3.11. *Para un valor dado de $g \geq 3$ existirá una cantidad finita de valores de k tal que exista una superficie hiperbólica no-orientable k -extremal de género g .*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la condición de divisibilidad, pues los valores de k deben dividir al número fijo $6(g-2)$. ■

3.3 Múltiples k -packings extremales de diferente tipo

Ahora nos toca abordar la pregunta **P2**, que recordamos a continuación:

P2. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies de género g , tanto orientables como no-orientables, que sean simultáneamente k_1 - y k_2 -extremales, con $k_1 \neq k_2$?

Recordemos que Girono abordó esta pregunta en el caso orientable en el siguiente teorema:

Teorema 3.12. (*Teorema 5 en [Gir18]*) *Una condición necesaria y suficiente para que exista una superficie de Riemann de género g que sea simultáneamente $k_1, k_2 \dots k_j$ -extremal, con $j > 1$ y $k_1 < k_2 < \dots < k_j$, es que $j = 2$ y el par (k_1, k_2) cumpla que $(k_1, k_2) = (g - 1, 4(g - 1))$ (sin restricciones sobre g) ó $(k_1, k_2) = (\frac{3}{2}(g - 1), 12(g - 1))$ (con g sea impar).*

Nada hay dicho en la literatura sobre el caso de superficies no-orientables, por lo que procedemos a presentar nuestros resultados al respecto, que de hecho nos permiten dar una versión constructiva a la demostración de la condición suficiente que da Girono en su teorema anterior.

Teorema 3.13. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una superficie no-orientable de género g que sea simultáneamente $k_1, k_2 \dots k_j$ -extremal, con $j > 1$ y $k_1 < k_2 < \dots < k_j$, es que $j = 2$ y que el par (k_1, k_2) cumpla que $(k_1, k_2) = (\frac{1}{2}(g - 2), 2(g - 2))$ (con g par) ó $(k_1, k_2) = (\frac{3}{4}(g - 2), 6(g - 2))$ (con $g \equiv 2 \pmod{4}$).*

Antes de realizar la demostración es importante que observemos que, a diferencia del caso orientable visto en el Teorema 3.12, aquí resulta necesario que g sea par. En la sección 7.1 estudiaremos todas las superficies no-orientables k -extremales de género 3 (impar), y ya sabemos gracias a este teorema que si $k' \neq k$ entonces dichas superficies k -extremales no podrán ser a la vez k' -extremales.

Demostración. Primero demostraremos que dicha condición es necesaria. Para ello supongamos que el grupo NEC K uniformiza una superficie no-orientable que es k_1 -extremal y k_2 -extremal al mismo tiempo, con $k_1 < k_2$. Por la caracterización de estas superficies en términos de grupos triangulares tenemos que

$$K \leq \Delta_1^\pm := \Delta^\pm \left(2, 3, \frac{6g + 6k_1 - 12}{k_1} \right), \quad K \leq \Delta_2^\pm := \Delta^\pm \left(2, 3, \frac{6g + 6k_2 - 12}{k_2} \right) \left($$

donde las inclusiones tienen índices $12g + 12k_i - 24$, $i \in \{1, 2\}$.

En estas condiciones tenemos que Δ_1^\pm y Δ_2^\pm son conmensurables, es decir, $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm$ está contenido en ambos grupos Δ_1^\pm y Δ_2^\pm con índice finito.

Dado que el subgrupo Fuchsiano canónico de $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm$ es precisamente su subgrupo de índice 2 dado por $\Delta_1^+ \cap \Delta_2^+$, entonces la inclusión $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm \leq \Delta_j^\pm$ tendrá índice finito sí y solamente sí la inclusión $\Delta_1^+ \cap \Delta_2^+ \leq \Delta_j^+$ tiene índice finito ($j \in \{1, 2\}$), lo que se traduce en que Δ_1^\pm y Δ_2^\pm serán conmensurables sí y solamente sí Δ_1^+ y Δ_2^+ lo son.

Gracias a [Tak77b] tenemos una clasificación de las clases de conmensurabilidad de los grupos triangulares, que en particular nos indica que para que dos grupos de la forma $\Delta(2, 3, \cdot)$ estén dentro de la misma clase entonces tenemos solamente dos opciones: el par $(\Delta(2, 3, 14), \Delta(2, 3, 7))$ y el par $(\Delta(2, 3, 18), \Delta(2, 3, 9))$ (ver las clases de conmensurabilidad completas en la Figura 3.7). Esto inmediatamente nos obliga a que el número j de inclusiones diferentes sea menor o igual que 2.

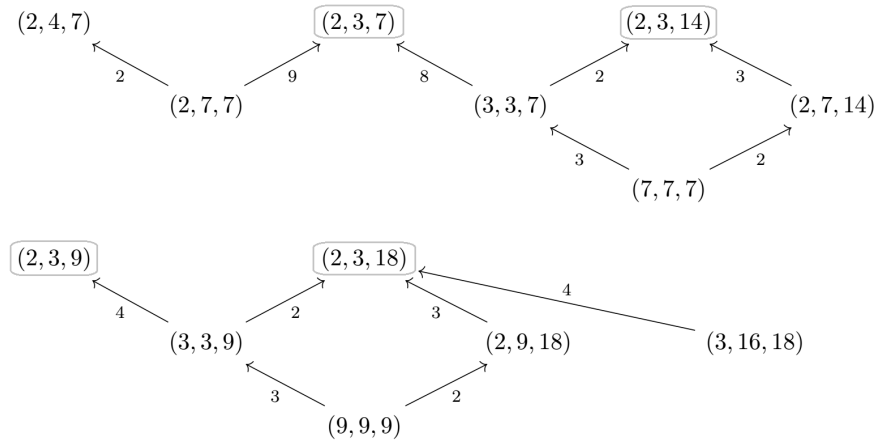


Figura 3.7: Diagramas de Takeuchi para las clases de conmensurabilidad de grupos triangulares que involucran dos o más grupos de la forma $\Delta(2, 3, \cdot)$.

De esta manera tenemos solamente las dos opciones siguientes: $\Delta_1^\pm = \Delta^\pm(2, 3, 14)$ y $\Delta_2^\pm = \Delta^\pm(2, 3, 7)$, ó $\Delta_1^\pm = \Delta^\pm(2, 3, 18)$ y $\Delta_2^\pm = \Delta^\pm(2, 3, 9)$. Así vemos que en el caso del par $(\Delta^\pm(2, 3, 14), \Delta^\pm(2, 3, 7))$ tenemos simultáneamente las dos igualdades

$$\frac{6g + 6k_1 - 12}{k_1} = 14 \quad , \quad \frac{6g + 6k_2 - 12}{k_2} = 7,$$

lo cual significa que $k_1 = \frac{3}{4}(g - 2)$ y $k_2 = 6(g - 2)$ (con $g \equiv 2 \pmod{4}$).

De la misma manera si hacemos los cálculos para el par $(\Delta^\pm(2, 3, 18), \Delta^\pm(2, 3, 9))$ obtendremos que $k_1 = \frac{1}{2}(g - 2)$ y $k_2 = 2(g - 2)$ (con g necesariamente par).

Ahora veremos que la condición del Teorema 3.13 es suficiente. Para ello debemos construir un ejemplo explícito de grupo K que uniformice una superficie no-orientable k -extremal de género g que esté incluido simultáneamente en cada par de grupos triangulares $(\Delta^\pm(2, 3, 14), \Delta^\pm(2, 3, 7))$ y $(\Delta^\pm(2, 3, 18), \Delta^\pm(2, 3, 9))$. Dado que

$$\Delta^\pm(2, 3, 18) \cap \Delta^\pm(2, 3, 9) = \Delta^\pm(3, 3, 9) \quad , \quad \Delta^\pm(2, 3, 14) \cap \Delta^\pm(2, 3, 7) = \Delta^\pm(3, 3, 7),$$

entonces el problema de encontrar grupos NEC que se incluyan simultáneamente en cada par de grupos triangulares es equivalente a hallar subgrupos adecuados de estos grupos $\Delta^\pm(3, 3, \cdot)$. Por eso ahora nuestro objetivo es encontrar ejemplos subgrupos de $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ y $\Delta^\pm(3, 3, 7)$ para cada índice posible que este grupo admita.

Comencemos estudiando el caso del grupo $\Delta^\pm(3, 3, 9)$. De acuerdo con [Izq93] sabemos que el menor índice para un grupo contenido en dicho grupo uniformice una superficie con o sin borde es su llamado índice de Hurwitz, que en el caso del grupo $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ es 18, teniendo todos los demás subgrupos de $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ libres de torsión un índice múltiplo de este valor 18. Por ello podemos intentar construir una superficie no-orientable y sin borde cuyo grupo uniformizador K_{18} esté incluido en $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ con índice 18. La Figura 3.8 muestra un ejemplo de este caso.

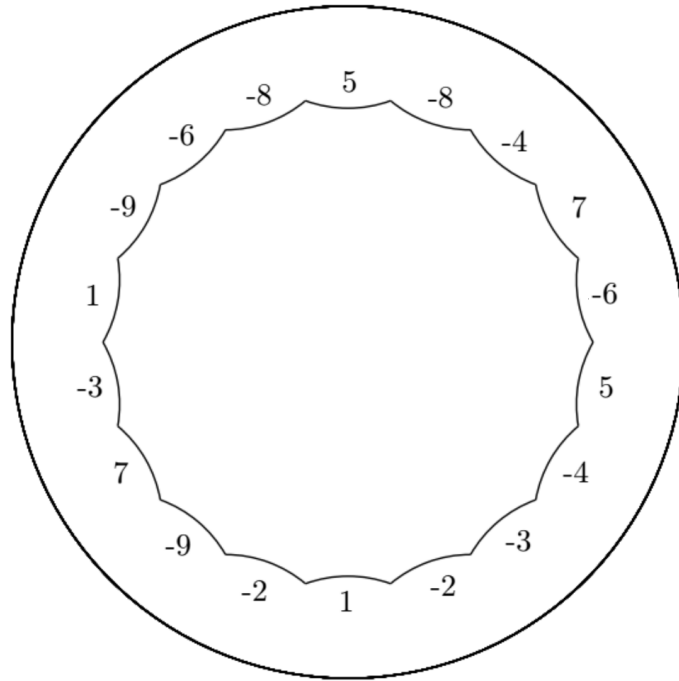


Figura 3.8: Representación del dominio fundamental de una superficie no-orientable uniformizada por un grupo de índice 18 en $\Delta^\pm(3, 3, 9)$.

Dado que las demás superficies uniformizadas por $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ tienen índices múltiplos de 18, basta encontrar subgrupos de K_{18} con índice n para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero esto es precisamente el contenido de nuestro Lema 3.7 que nos permite obtener subgrupos del índice que queramos de K_{18} y que sigan uniformizando superficies no-orientables y sin borde. Hemos cubierto todos los posibles índices de inclusión de grupos NEC libres de torsión dentro del grupo $\Delta^\pm(3, 3, 9)$, por lo que hemos resuelto el problema para este caso.

Podemos estudiar el grupo $\Delta^\pm(3, 3, 7)$ siguiendo la misma línea del caso anterior, teniendo en cuenta que el índice de Hurwitz de $\Delta^\pm(3, 3, 7)$ es 42. La Figura 3.9 nos muestra un ejemplo de una superficie no-orientable y sin borde uniformizada por un grupo K_{42} incluído con índice 42 en $\Delta^\pm(3, 3, 7)$.

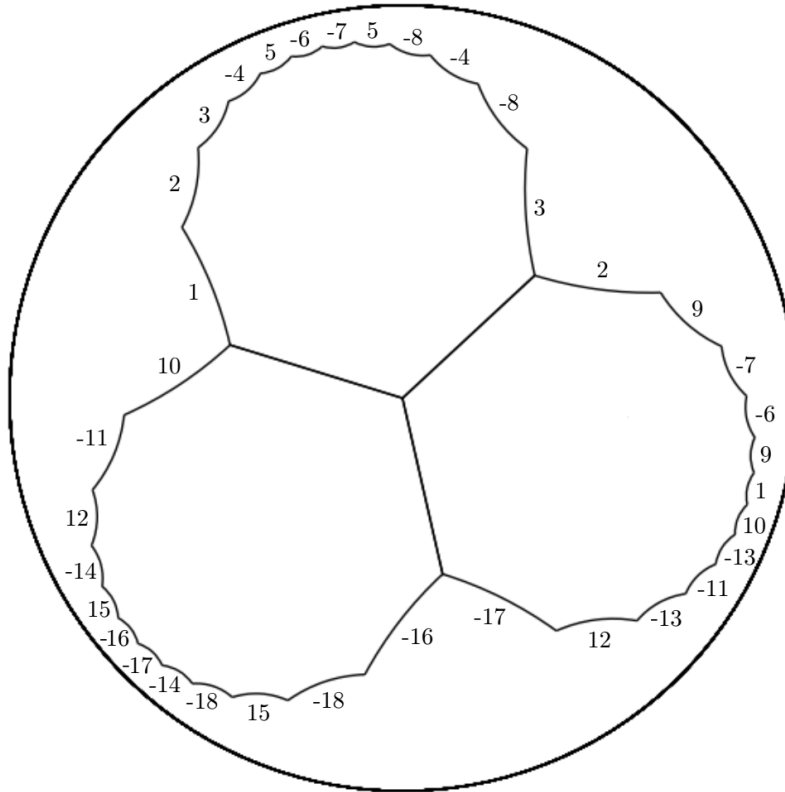


Figura 3.9: Representación del dominio fundamental de una superficie no-orientable uniformizada por un grupo de índice 42 en $\Delta^\pm(3, 3, 7)$.

Hemos cubierto todos los posibles subgrupos de ambos grupos $\Delta^\pm(3, 3, 9)$ y $\Delta^\pm(3, 3, 7)$, con lo cual hemos completado la demostración. ■

De hecho este enfoque nos entrega una manera constructiva de verificar la suficiencia del teorema en el caso orientable (ver Teorema 5 en [Gir18]), ya que podemos definir de manera explícita un subgrupo del menor índice en los grupos Fuchsianos $\Delta(3, 3, 9)$ y $\Delta(3, 3, 7)$. Los índices mínimos requeridos, al igual que en el caso NEC, son 18 y 42, con la condición de que los grupos que busquemos no deben tener elementos anticonformales. La Figura 3.10 nos entrega los grupos Fuchsianos buscados.

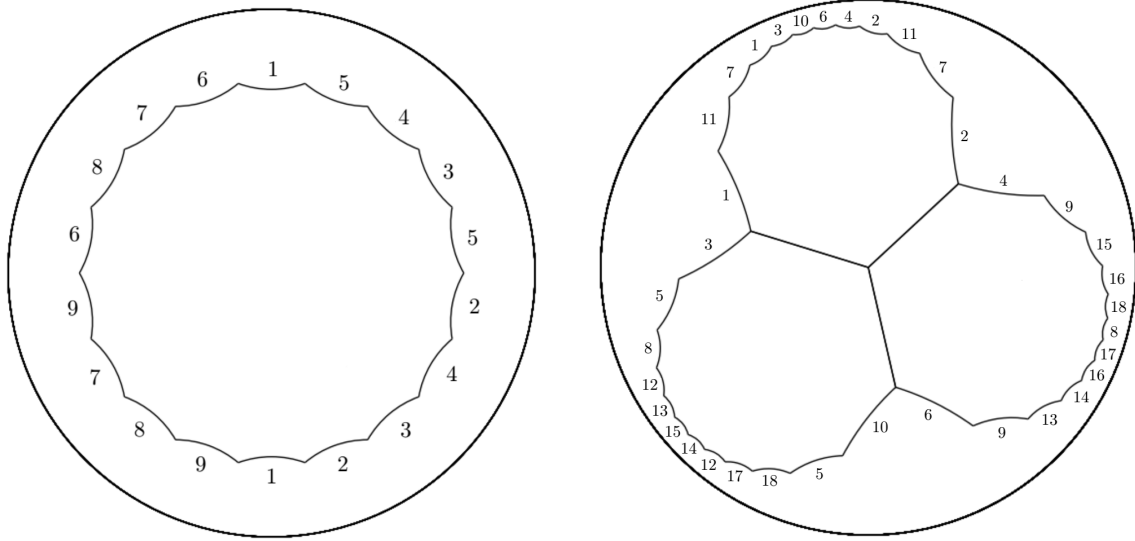


Figura 3.10: Grupos Fuchsianos de índice 18 en $\Delta(3, 3, 9)$ (a la izquierda) y de índice 42 en $\Delta(3, 3, 7)$ (a la derecha).

El único detalle que necesitamos para concluir como hemos hecho antes es una variante del Lema 3.7 que nos permita construir subgrupos de un grupo Fuchsiano dado con el índice que deseemos:

Lema 3.14. *Supongamos que K es un grupo Fuchsiano libre de torsión que uniformiza una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Tenemos así que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subgrupo $K_n \leq K$ tal que $[K : K_n] = n$ y K uniformice también una superficie de Riemann.*

Demostración. La signatura de K es $(g; +; [-]; \{-\})$, por lo que este grupo admite una presentación

$$K = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g : \prod_{i=1}^g (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1) \right\rangle$$

donde las a_i y b_i son transformaciones hiperbólicas, claramente de orden infinito.

Si $h : K \rightarrow \mathbb{Z}$ es el homomorfismo sobreyectivo determinado por

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto 1 \\ b_1 &\mapsto 1 \\ a_j &\mapsto 0, \quad \forall j \in \{2 \dots g\} \\ b_j &\mapsto 0, \quad \forall j \in \{2 \dots g\}, \end{aligned}$$

entonces podemos tomar como $h^{-1}(n\mathbb{Z})$ el grupo K_n buscado. ■

Para finalizar esta sección es importante observar que no podemos extrapolar los razonamientos anteriores relativos a los diagramas de Takeuchi al caso plano, pues los grupos que este autor trabaja son todos grupos NEC. De todas maneras igual podemos dar una respuesta para el caso de \mathbb{C} a la pregunta **P2** con la que abrimos este capítulo:

Teorema 3.15. *Si una superficie plana (orientable o no) resulta ser simultáneamente $k_1, k_2 \dots k_j$ -extremal con $k_1 < k_2 < \dots < k_j$, entonces obligatoriamente $j = 1$.*

Demostración. Supongamos que $j > 1$ y que existe una superficie que es simultáneamente k_1 y k_2 -extremal, con $k_1 < k_2$. En dicho caso tendremos que

$$K \leq \Delta_1^\pm(2, 3, 6), \quad K \leq \Delta_2^\pm(2, 3, 6),$$

con índices respectivos $12k_1, 12k_2$. Dado que los dominios fundamentales de ambos grupos triangulares son triángulos semejantes (por tener los mismos ángulos) entonces uno de ellos es la imagen del otro por un elemento de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{C})$ (que a priori no tiene por qué ser una isometría). De esta manera los grupos Δ_1^\pm y Δ_2^\pm son conjugados, y por lo tanto isomorfos. Esto significa que

$$[\Delta_1^\pm(2, 3, 6) : K] = [\Delta_2^\pm(2, 3, 6) : K],$$

lo que tiene como consecuencia que $12k_1 = 12k_2$, es decir, $k_1 = k_2$. Esto es absurdo pues los k_i deben ser diferentes, lo cual no nos deja otra opción que $j = 1$. ■

3.4 Teorema: Múltiples k -packings extremales del mismo tipo

Ahora abordaremos la pregunta **P3**, que reescribimos a continuación:

P3. ¿Bajo qué condiciones sobre g y k podemos asegurar que existen superficies k -extremales de género g , tanto orientables como no-orientables, con dos o más k -packings extremales?

Recordemos que Girono abordó parte de esta pregunta en su artículo [Gir18] en el caso de superficies de Riemann, determinando una condición *necesaria* para la existencia de superficies con dos o más k -packings extremales:

Teorema 3.16. (*Teorema 6 en [Gir18]*) *Una condición necesaria para que exista una superficie de Riemann k -extremal de género g con dos o más k -packings extremales es que*

$$6 + \frac{12(g-1)}{k} \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

Puesto que en los capítulos posteriores desarrollaremos herramientas que nos permiten demostrar el recíproco del teorema anterior, e incluso ir todavía más allá al cubrir el caso no-orientable, enunciaremos a continuación la siguiente generalización que responderá de manera cabal la pregunta **P3**.

Teorema 3.17. *Una condición necesaria y suficiente para que exista una superficie k -extremal (orientable o no) de característica de Euler χ que admita dos o más k -packings es que los valores de χ y k cumplan*

$$6 - \frac{6\chi}{k} \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

Dado que este resultado es el eje principal sobre el que gira el grueso de nuestro trabajo, consideramos conveniente mostrar un panorama general previo de cómo lo lograremos alcanzar este objetivo. Podemos diseccionar nuestra exposición en los siguientes puntos:

1. Lo primero que haremos será abordar el Teorema 3.17 exclusivamente *en el caso de superficies no-orientables*.

2. La demostración de la condición necesaria del Teorema 3.17 para este caso no-orientable estará inspirada en la demostración que hace Girono en [Gir18] (la cual cubre el caso orientable del Teorema 3.17), por lo que la dejaremos como la última sección del capítulo actual.

3. La primera parte de la demostración de la condición suficiente del Teorema 3.17 para este caso no-orientable la haremos desarrollando una búsqueda experimental geométrica/numérica de superficies k -extremales que contengan un segundo k -packing extremal para dichos valores de N , y esto lo haremos utilizando los software computacionales GAP y SageMath ([Sag18]). El trabajo que realizaremos aquí se traducirá, en última instancia, en la búsqueda de una serie de automorfismos de \mathbb{D} que mueven un k -packing de nuestras superficies especiales en uno diferente. La verificación de que dichos automorfismos cumplen su trabajo se traducirá en que cierta composición de isometrías de \mathbb{D} sea, módulo un pequenísimos margen de error, la identidad de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$.

4. La segunda y última parte de la demostración de la condición suficiente del Teorema 3.17 para este caso no-orientable la haremos verificando de manera algebraica que las composiciones de isometrías arriba mencionadas nos den efectivamente y de manera exacta la identidad de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$. Para ello trasladaremos las isometrías de \mathbb{D} a \mathbb{H} , para así transformar las composiciones de funciones en productos de matrices en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Esto nos permitirá concluir de manera inequívoca que las superficies no-orientables obtenidas admiten más de un k -packing extremal, y habremos concluido la suficiencia del Teorema 3.17 en el caso no-orientable.

5. A partir de las superficies no-orientable halladas en la demostración de la suficiencia del Teorema 3.17 podemos construir, a través de los cubrimientos dobles de ellas, ejemplos para abordar una parte el problema del caso orientable en el mismo teorema. Los casos orientables restantes los podemos hallar reacomodando las herramientas utilizadas en la verificación geométrica/numérica y la verificación algebraica anteriormente mencionados. Esto nos permitirá concluir de manera inequívoca el Teorema 3.17.

Vamos a ello.

3.5 Condición necesaria: conmensuradores y grupos aritméticos

Comencemos demostrando la condición necesaria del Teorema 3.17.

Demostración. Fijemos g y k y sea $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$. Procederemos a demostrar que es necesario que N esté en el conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}$.

Sabemos por la caracterización de las superficies no-orientables k -extremales de género g en términos de grupos triangulares dada en el Teorema 3.17 que si K uniformiza una superficie k -extremal de género g que admite al menos dos k -packings extremales diferentes, entonces debemos tener al menos dos inclusiones diferentes

$$K \leq \Delta_1^\pm = \Delta_1^\pm(2, 3, N) \quad , \quad K \leq \Delta_2^\pm = \Delta_2^\pm(2, 3, N) ,$$

ambas con índice $2kN$.

Dado que dos triángulos en \mathbb{D} con los mismos ángulos siempre son congruentes, entonces es posible encontrar un elemento de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ que mande uno en el otro. De esta manera tendremos una isometría $\gamma \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ que envíe los tres vértices de un triángulo que sea dominio fundamental para Δ_1^\pm (con sus ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{N}$) en los tres vértices de un triángulo que sea dominio fundamental para Δ_2^\pm (con los mismos ángulos), con lo cual concluimos que $\gamma\Delta_1^\pm\gamma^{-1} = \Delta_2^\pm$. No es difícil ver que dicha isometría γ estará en un grupo especial asociado a Δ_1^\pm llamado *conmensurador* de Δ_1^\pm , que se define como el conjunto

$$\text{Comm}_{\text{PGL}(2, \mathbb{R})}^\pm(\Delta_1^\pm) := \left\{ \alpha \in \text{PGL}(2, \mathbb{R}) : \begin{array}{l} \Delta_1^\pm \cap \alpha\Delta_1^\pm\alpha^{-1} \text{ tiene índice finito} \\ \text{tanto en } \Delta_1^\pm \text{ como en } \alpha\Delta_1^\pm\alpha^{-1} \end{array} \right\} \left($$

La razón de esto proviene de observar que las inclusiones

$$K \leq \Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm \leq \Delta_j^\pm, \quad j \in \{1, 2\}$$

nos indican que

$$12(g + k - 2) = [\Delta_j^\pm : K] = [\Delta_j^\pm : \Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm][\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm : K], \quad j \in \{1, 2\},$$

y esto último obliga a que el índice de $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm$ tanto en Δ_1^\pm como en Δ_2^\pm sea finito.

Por la propia definición de $\text{Comm}^\pm(\Delta_1^\pm)$ podemos ver que $\Delta_1^\pm \leq \text{Comm}^\pm(\Delta_1^\pm)$, y en nuestro caso especial de grupos triangulares de la forma $\Delta^\pm(2, 3, N)$ veremos que dicha inclusión de grupos puede ser una igualdad bajo ciertas condiciones especiales.

Consideremos ahora los siguientes puntos:

1. Si $\text{Comm}^\pm(\Delta_1^\pm) = \Delta_1^\pm$ entonces $\Delta_1^\pm = \Delta_2^\pm$.
2. Si $\text{Comm}^\pm(\Delta^\pm(2, 3, N))$ es discreto entonces $\text{Comm}^\pm(\Delta^\pm(2, 3, N)) = \Delta^\pm(2, 3, N)$.
3. Si el subgrupo Fuchsiano canónico $\Delta^+(2, 3, N)$ del grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, N)$ es no-aritmético, entonces $\text{Comm}^\pm(\Delta^\pm(2, 3, N))$ es un grupo discreto.
4. Un grupo triangular Fuchsiano $\Delta^+(2, 3, N)$ es no-aritmético si y solamente si

$$N \notin \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

Si asumimos que los cuatro puntos anteriores son ciertos, obtendremos como consecuencia que si una superficie no-orientable k -extremal está uniformizada por un grupo NEC K contenido en un grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ tal que el grupo $\Delta(2, 3, N)$ es no-aritmético, entonces el k -packing será único. Esto sucederá siempre que

$$6 + \frac{6(g-2)}{k} \notin \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

Por eso es que ahora justificaremos los cuatro puntos anteriores.

Para justificar el punto **1** basta recordar que γ estaba en $\text{Comm}^\pm(\Delta_1^\pm)$, y como estamos asumiendo que este último grupo es ahora igual a Δ_1^\pm entonces $\gamma \in \Delta_1^\pm$. En estas condiciones tendremos que $\Delta_1^\pm = \gamma\Delta_1^\pm\gamma^{-1}$ y como $\Delta_2^\pm = \gamma\Delta_1^\pm\gamma^{-1}$ entonces no queda más remedio que $\Delta_1^\pm = \Delta_2^\pm$.

El punto **2** es una consecuencia inmediata del Teorema 1 de [EI06].

El punto **3** es precisamente el Teorema 3.1 en [GN07], mientras que el punto **4** es consecuencia inmediata del Teorema 3 de [Tak77a].

Acabamos de demostrar que es necesario que N esté dentro de dichos valores para la existencia de dos o más k -packings dentro de una misma superficie. ■

Como nuestra demostración de la condición suficiente del Teorema 3.17 es mucho más extensa que esta demostración de la condición necesaria, y ya que la primera contiene la gran parte de nuestros descubrimientos, consideramos conveniente separar en dos nuevos capítulos las demás partes de esta demostración.

Capítulo 4

Múltiples k -packings extremales: exploración geométrica/numérica

Ahora es el momento de demostrar la condición suficiente del Teorema 3.17 en el caso no-orientable. Para ello lo que haremos será construir un ejemplo explícito de superficie *primitiva* no-orientable k -extremal que admita más de un k -packing para cada valor de N en el conjunto $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}$, para luego a partir de ellas obtener todas las demás superficies posibles. Comenzaremos nuestra construcción de dichas superficies realizando las cuatro observaciones siguientes:

Observación 4.1. *Si un grupo NEC K_N uniformiza una superficie con dos o más k -packings extremales, entonces cualquier subgrupo $K'_N \leq K_N$ de índice finito uniformizará una nueva superficie que admitirá dos o más packings extremales. Esto es cierto pues la cantidad de k -packings extremales de una superficie es igual a la cantidad de inclusiones diferentes en grupos triangulares extendidos de la forma $\Delta^\pm(2, 3, N)$, y si K_N admite dos inclusiones diferentes en dichos grupos, entonces K'_N también lo hará.*

Observación 4.2. *Por el Lema 3.7 sabemos que para cada grupo NEC que uniformice una superficie primitiva no-orientable y sin borde podemos hallar un subgrupo del índice finito que deseemos y que a su vez uniformice nuevamente una superficie no-orientable y sin borde. Si unimos esto con el punto 2 de la demostración del Teorema 3.6 vemos que podemos obtener ejemplos de grupos uniformizadores de superficies k -extremales de género g para cualquier par (g, k) asociado a un N dado, tal cual lo hicimos en nuestra demostración del Teorema 3.6. Si a todo esto le agregamos que K_N “hereda” su extremalidad a todos sus subgrupos, entonces podemos concluir que para resolver el problema de la suficiencia basta con encontrar superficies no-orientables primitivas con dos o más k -packings para cada uno de los once valores de N .*

Observación 4.3. *En los artículos [GN07], [Nak09], [Nak12] y [Nak16] tenemos ejemplos explícitos de superficies 1-extremales no-orientables primitivas con dos 1-packings cuyos N asociados son $N = 12, 18, 24$ y 30 , respectivamente. Dado que los pares primitivos (g_0, k_0) asociados a dichos valores de N tienen $k_0 = 1$, entonces nuestro problema ya está resuelto para esos números. Por eso es que ahora nuestra tarea se reduce a buscar ejemplos explícitos de superficies primitivas para los siete valores restantes, es decir, para $N \in \{7, 8, 9, 10, 11, 14, 16\}$.*

Observación 4.4. *La cantidad de subgrupos de $\Delta^\pm(2, 3, N)$ con índice $2k_0N$ es enorme para los valores de N mayores que 10, por lo que en dichos casos no es apropiado recurrir directamente a GAP para determinarlos todos y estudiarlos uno a uno¹. Por eso es que para aquellos valores de N consideraremos una unión de k_0 N -ágonos regulares que servirá de posible dominio fundamental para un grupo NEC K , de tal manera que K eventualmente uniformice una superficie no-orientable que admita más de un k_0 -packing extremal. Veremos los detalles de esta construcción en el caso de $N = 14$ y luego replicaremos lo esencial de dicho procedimiento para cada uno de los valores restantes de N , incluidos aquellos con $N \leq 10$. Es importante tener en cuenta que en toda esta sección trabajaremos con el programa computacional SageMath, el cual nos permite trabajar numéricamente en el disco hiperbólico \mathbb{D} de manera altamente precisa, pero en última instancia aproximada.*

Por último, antes de pasar al procedimiento de construcción de las superficies, consideramos apropiado aclarar que el contenido de esta sección está presente en nuestro artículo [GR21c].

Para un N dado, cualquier superficie no-orientable k -extremal de género g está uniformizada por un grupo NEC libre de torsión K contenido en un grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ con índice $2kN$. Tal grupo admite un dominio fundamental F que consiste en la unión de k polígonos regulares de N lados con ángulo $\frac{2\pi}{3}$, cuyo k -packing extremal estará inducido por los discos inscritos a esos k polígonos. Si la superficie extremal resultante admite un segundo k -packing extremal, entonces su grupo uniformizador K admitirá otro dominio fundamental F' dado por la unión de k N -ágonos regulares (la Figura 4.1 muestra un ejemplo de este fenómeno para $N = 7$, con $k = 6$ y $g = 3$).

¹Este tipo de análisis grupo a grupo es lo que realizaremos en la sección 7.1, al clasificar las superficies no-orientables k -extremales de género 3.

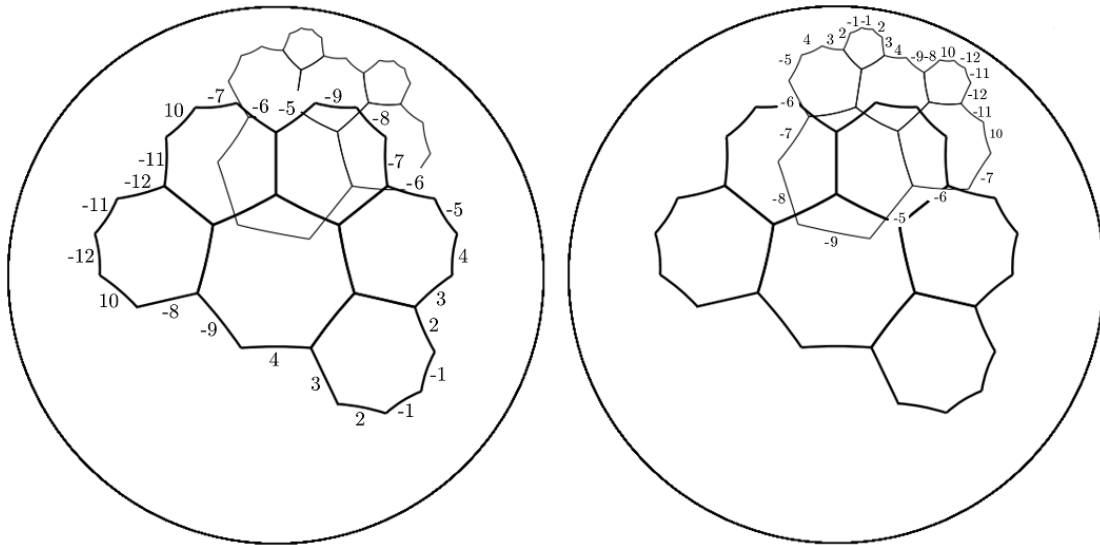


Figura 4.1: Un ejemplo primitivo para $N = 7$ con dos 6-packings extremales. La figura muestra dos dominios fundamentales diferentes para el mismo grupo NEC K , siendo ambos la unión de 6 heptágonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Los números sobre las aristas son los sidepairings que las emparejan, siendo negativos si el sidepairing es anticonformal. Todos estos sidepairings generan finalmente el grupo K . Sorprendentemente ambos conjuntos de sidepairings generan el mismo grupo K .

Lo principal a observar aquí es que los k centros de los N -ágonos que conforman F' deben ser puntos muy especiales, pues veremos a continuación que deben obedecer propiedades métricas muy específicas con respecto a K . El siguiente lema, consecuencia directa de que dos teselaciones por los mismos N -ágonos son una imagen de la otra por una isometría de \mathbb{D} , nos indica dichas restricciones:

Lema 4.1. *Sea X una superficie no-orientable k -extremal de género g uniformizada por K , y sea $\pi : \mathbb{D} \rightarrow X$ la proyección natural. Sea q el centro de uno de los k discos que forman un k -packing extremal en X , sea $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$ y sea \mathcal{T} una teselación de \mathbb{D} por N -ágonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Así tendremos que para cada $\gamma \in K$ y para cada $p \in \pi^{-1}(q)$ la distancia $d(p, \gamma(p))$ debe coincidir con la distancia entre algún par de centros de los polígonos que conforman \mathcal{T} . Las llamaremos distancias admisibles y las denotaremos por $d_0 < d_1 < \dots$, formando el conjunto infinito que denotaremos por \mathcal{D} .*

Para determinar la mayor cantidad posible de distancias admisibles consideraremos la configuración geométrica de la Figura 4.2, que representa la teselación \mathcal{T} formada por copias de un N -ágono regular P_0 centrado en el origen. Este polígono P_0 tiene una arista que corta a la parte inferior del eje Y en un punto que llamaremos C , y al vértice de P_0 adyacente a C hacia la derecha lo llamaremos A . Si llamamos B al origen, entonces denotaremos por a, b, c las reflexiones con respecto a las geodésicas \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} .

Lema 4.2. *Utilizando las notaciones descritas arriba, definamos $R_m = (ca)^m ab$. De esta manera, dado un polígono P en \mathcal{T} , existe una transformación de la forma*

$$R_{i_1} R_{i_2} \cdots R_{i_k}$$

que envía P_0 a P , donde $0 \leq i_j < N$ para $j = 1, \dots, k$.

Demostración. Si elegimos un polígono arbitrario P en la teselación, entonces podemos conectarlo al origen a través de una curva poligonal Γ que une los centros de una sucesión de polígonos adyacentes $P_0, P_1, \dots, P_k = P$. La Figura 4.2 nos muestra la construcción de un ejemplo para el caso de $N = 7$.

Ahora etiquetemos las aristas del polígono central en sentido antihorario, asignándole el 0 a la arista que contiene al punto C , y sea i_1 la etiqueta correspondiente a la arista e donde Γ corta al polígono central P_0 . Le asignamos la etiqueta 0 a la arista e vista dentro de P_1 , y completamos el etiquetado de dicho polígono también en sentido antihorario. Luego definimos como i_2 la etiqueta de la arista de P_1 donde Γ deja atrás a P_1 , y así sucesivamente. De esta manera construimos una sucesión de números i_1, i_2, \dots, i_k . Afirmamos que la transformación dada por $R_{i_1} R_{i_2} \cdots R_{i_k}$ envía P_0 a $P_k = P$.

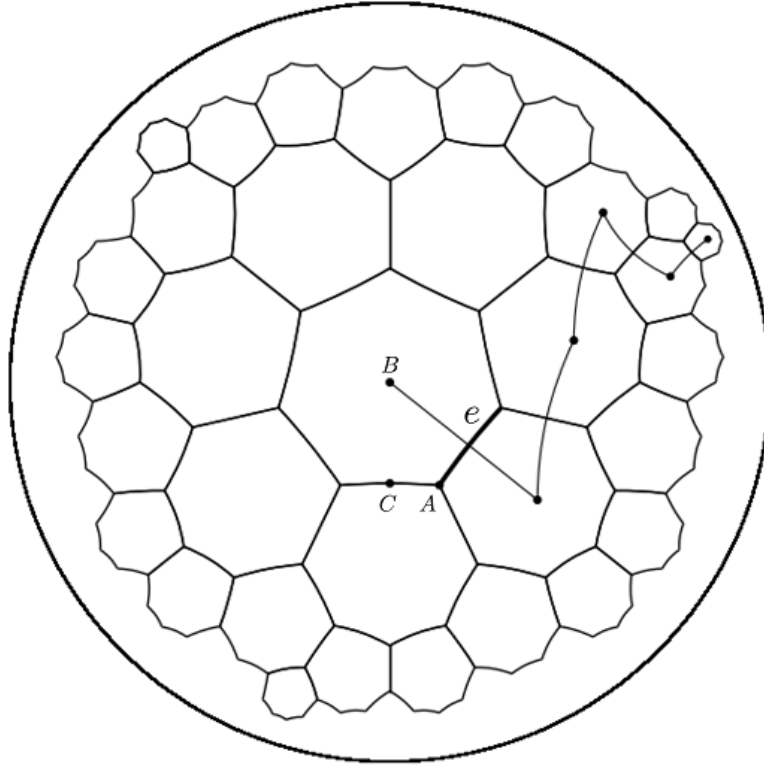


Figura 4.2: La teselación \mathcal{T} y un bosquejo de la construcción para el caso de $N = 7$. En este caso $k = 5$ y $i_1 = 1, i_2 = 6, i_3 = 4, i_4 = 1, i_5 = 5$.

La demostración va por inducción sobre el índice k . Tomando $k = 1$ tenemos el caso donde P es un vecino directo del polígono central P_0 , que es evidente.

Ahora asumamos que la afirmación es cierta para polígonos cuyos centros pueden ser unidos al origen por una curva poligonal con k segmentos. Asumamos que Γ es dicha curva poligonal que conecta el origen con el centro de cierto polígono P , cruzando la sucesión de polígonos $P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1} = P$, y definamos $R_{i_1}R_{i_2} \cdots R_{i_k}R_{i_{k+1}}$ como arriba. Por la hipótesis de inducción tenemos que la transformación $R = R_{i_1}R_{i_2} \cdots R_{i_k}$ envía P_0 a P_k , por lo tanto $RR_{i_{k+1}}$ envía P_0 a uno de los vecinos de P_k que, por construcción, es precisamente P_{k+1} ■

Notemos que el conjunto de las N^k transformaciones $\mathcal{R}_k = \{R_{m_1}R_{m_2} \cdots R_{m_k}, 0 \leq m_i < N\}$ contiene elementos que mueven el polígono central P_0 a cualquier polígono que puede ser conectado a P_0 a través de una curva poligonal Γ de k pasos. Podemos construir una colección de distancias admisibles de la teselación \mathcal{T} calculando la distancia $d(0, R(0))$ para cada R en \mathcal{R}_k . Mientras más grande es el valor de k , más grande será el subconjunto de distancias que obtendremos del conjunto completo de distancias admisibles.

Por otro lado, el lugar geométrico de los puntos que se mueven una distancia prefijada por una transformación hiperbólica conformal lo podemos expresar en términos de la distancia a lo que llamamos el eje de la transformación (o geodésica invariante), por la siguiente fórmula de la función de desplazamiento:

Teorema 4.3. (*Teorema 7.35.1 (i) en [Bea83]*). Si g es una transformación hiperbólica conformal con una longitud de traslación T y eje A , entonces

$$\sinh\left(\frac{d(z, g(z))}{2}\right) = \cosh(d(z, A)) \cdot \sinh\left(\frac{T}{2}\right)$$

El resultado siguiente es un análogo del teorema anterior para las glide reflections:

Teorema 4.4. Si g es una glide reflection con longitud de traslación T y eje A , entonces

$$\cosh\left(\frac{d(z, g(z))}{2}\right) = \cosh(d(z, A)) \cdot \cosh\left(\frac{T}{2}\right)$$

Demostración. Dado que cualquier glide reflection es conjugada a una transformación de la forma $h : z \mapsto -k\bar{z}$, $k > 1$, entonces todo lo que tenemos que hacer es probar este resultado para la transformación h . Para ello calcularemos las tres expresiones involucradas en la fórmula que deseamos demostrar en términos del seno y coseno hiperbólico de las distancias entre puntos del semiplano superior \mathbb{H} (ver el Teorema 1.6).

Primero observamos que el término a la izquierda de la ecuación es

$$\cosh\left(\frac{d(z, h(z))}{2}\right) = \frac{|z - \overline{h(z)}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(h(z))}} = \frac{|z - \overline{-k\bar{z}}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(k\bar{z})}} = \frac{|z|(1+k)}{2y\sqrt{k}},$$

donde $z = x + iy$. Por otro lado, como el eje A' de h es el eje imaginario, tenemos gracias al argumento dado en [Bea83] p.62 que

$$\cosh(d(z, A')) = \frac{|z|}{y}.$$

Finalmente podemos observar que $d(i, ki) = T$ ya que ambos i y ki están sobre el eje A' de h , por lo que

$$\cosh\left(\frac{T}{2}\right) = \cosh\left(\frac{d(i, ki)}{2}\right) = \frac{|i + ki|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ki)}} = \frac{(1+k)}{2\sqrt{k}}. \quad (4.1)$$

■

Sabemos por la Sección 7.20 de [Bea83] que el lugar geométrico de los puntos con un desplazamiento preestablecido bajo una transformación hiperbólica coincide con el lugar geométrico de los puntos a una cierta distancia fija de su eje. Este conjunto tendrá dos componentes, una a cada lado del eje, y cada una de ellas es un arco generalizado de círculo (es decir, arcos de circunferencia o líneas rectas). El teorema siguiente demuestra que lo mismo sucede para las glide reflections, y nos proporciona ecuaciones para dicho lugar geométrico.

Teorema 4.5. *Si g es una transformación hiperbólica o una glide reflection entonces el lugar geométrico de los puntos z en \mathbb{D} que se mueven por g una distancia prefijada D cumple la igualdad siguiente*

$$\frac{|1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)|}{r(1 - |z|^2)} = \sqrt{\frac{4H^2 \left(\frac{D}{2}\right) - \operatorname{tr}^2(g) + 4\varepsilon}{\operatorname{tr}^2(g) - 4\varepsilon}},$$

donde r, z_0 son el radio euclidiano y el centro del eje de g , mientras que el par (H, ε) es $(\sinh, 1)$ si g es conformal o $(\cosh, -1)$ si g es anticonformal.

Demostración. Para demostrar este teorema comenzaremos demostrando un lema que nos facilitará los cálculos:

Lema 4.6. *Si g es una transformación hiperbólica o una glide reflection con longitud de traslación T , y si definimos el par (H, ε) como $(\sinh, 1)$ si g es conformal o $(\cosh, -1)$ si g es anticonformal, entonces tendremos*

$$H^2 \left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\operatorname{tr}^2(g) - 4\varepsilon}{4}.$$

Demostración. En el caso de una transformación g hiperbólica tenemos, gracias a la Sección 7.34 en [Bea83], que

$$\cosh \left(\frac{T}{2}\right) = \frac{|\operatorname{tr}(g)|}{2},$$

lo cual tiene como consecuencia que

$$\sinh^2 \left(\frac{T}{2}\right) = \cosh^2 \left(\frac{T}{2}\right) - 1 = \frac{\operatorname{tr}^2(g)}{4} - 1,$$

que es precisamente lo que indica el enunciado del lema en el caso orientable.

Si ahora consideramos que g es una glide reflection entonces sabemos que g será una transformación conjugada a la isometría

$$h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad h(z) = -k\bar{z},$$

para algún $k > 1$. Gracias a la ecuación 4.1 dada en la demostración del Teorema 4.4, en la cual utilizamos la misma glide reflection h , tenemos que

$$\cosh\left(\frac{T}{2}\right) \left(\frac{1+k}{2\sqrt{k}} \right).$$

De lo anterior es inmediato que

$$\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) \left(\frac{1+k}{2\sqrt{k}} \right)^2 - 1 = \left(\frac{1+k}{2\sqrt{k}}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1-k}{2\sqrt{k}}\right)^2,$$

y como la matriz asociada a h es $\begin{pmatrix} -\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}$ (de lo anterior se desprende que

$$\sinh^2\left(\frac{T}{2}\right) \left(\frac{\text{tr}^2(g)}{4} \right),$$

con lo cual obtenemos

$$\cosh^2\left(\frac{T}{2}\right) \left(\frac{\text{tr}^2(g)}{4} + 1 \right) + 1 = \frac{\text{tr}^2(g)}{4} + 1,$$

que es precisamente lo que indica el enunciado del lema en el caso no-orientable. ■

Continuemos ahora con el teorema. Consideremos una transformación hiperbólica o una glide reflection g con longitud de traslación T y eje A , y si z es un punto cualquiera en \mathbb{H} , entonces gracias a los Teoremas 4.3 y 4.4 tenemos que

$$H\left(\frac{d(z, g(z))}{2}\right) \left(\cosh(d(z, A)) \cdot H\left(\frac{T}{2}\right) \right)$$

Como buscamos los puntos z que cumplan que $d(z, g(z))$ sea una distancia prefijada D , entonces la ecuación anterior se transforma en

$$H\left(\frac{D}{2}\right) \left(\cosh(d(z, A)) \cdot H\left(\frac{T}{2}\right) \right)$$

es decir

$$\cosh(d(z, A)) = \frac{H\left(\frac{D}{2}\right)}{H\left(\frac{T}{2}\right)}.$$

Notemos que gracias al Teorema 1.8 tenemos la siguiente igualdad en \mathbb{D} :

$$\sinh(d(z, A)) = \frac{|1 + |z|^2 - 2\text{Re}(\bar{z}_0 z)|}{r(1 - |z|^2)}.$$

Considerando que la expresión $\frac{H(\frac{D}{2})}{H(\frac{r}{2})}$ no varía si nos trasladamos de \mathbb{H} a \mathbb{D} entonces tendremos

$$\sinh(d(z, A)) = \sqrt{\cosh^2(d(z, A)) - 1} = \sqrt{\left(\frac{H(\frac{D}{2})}{H(\frac{r}{2})}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{H^2(\frac{D}{2})}{H^2(\frac{r}{2})} - 1}.$$

Finalmente si reemplazamos en lo anterior lo obtenido en el Lema 4.6 tendremos

$$\frac{|1 + |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}_0 z)|}{r(1 - |z|^2)} = \sqrt{\frac{H^2(\frac{D}{2})}{\frac{r^2(g) + 4\varepsilon}{4}}} - 1.$$

■

Corolario 4.6.1. *Si g es una transformación hiperbólica o una glide reflection entonces el lugar geométrico de los puntos z en \mathbb{D} que se mueven por g una distancia prefijada son dos arcos de círculo generalizados.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de la ecuación obtenida en el Teorema 4.5, ya que si la interpretamos como una ecuación en el plano xy vemos que está compuesta de polinomios de grado 2 cuyos coeficientes de x^2 e y^2 son iguales. ■

Acabamos de verificar que el lugar geométrico asociado a los puntos de \mathbb{D} que se mueven una distancia prefijada por una transformación anticonformal, al igual que en el caso conformal, es la unión de dos arcos generalizados de círculo, con lo cual estamos en conocimiento del comportamiento de estos *loci* en los casos conformal y anticonformal. Llamaremos a estos lugares geométricos *bananas*, por razones evidentes al mirar, por ejemplo, la Figura 4.5, y llamaremos *banana i de s* a la banana del sidepairing s asociada a la distancia admisible d_i (ver Lema 4.1).

Corolario 4.6.2. *La cantidad de k -packings extremales que una superficie hiperbólica (orientable o no) puede admitir es siempre un número finito.*

Demostración. Por el Lema 4.1 estamos obligados a que los posibles centros de nuevas teselaciones por polígonos regulares deben pertenecer al conjunto de puntos en el dominio fundamental que resultan al intersectar las bananas de los sidepairings que definen dicha superficie, pero para distancias admisibles. Como el Corolario 4.6.1 nos dice que las bananas son círculos o líneas euclidianas entonces sabemos que éstas se cortarán en un número finito de puntos, y como también es finito el número de sidepairings y de distancias admisibles a considerar entonces tendremos que la cantidad de candidatos también será finita. ■

Ahora tenemos todos los ingredientes para dar a conocer el procedimiento que nos permitiría construir explícitamente superficies con más de un k -packing extremal:

Procedimiento geométrico/numérico.

1. Considerando que buscamos un grupo NEC K que uniformice una superficie X no-orientable k -extremal de género g , entonces analizaremos regiones del espacio \mathbb{D} formadas por k polígonos regulares de $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$ lados y ángulo $\frac{2\pi}{3}$ que admitan un conjunto de sidepairings que definan una superficie no-orientable. Hay multitud de posibles configuraciones para la posición relativa entre esos k polígonos, por lo que debemos elegir una para comenzar. Notemos que posteriormente podemos cambiar de configuración si el proceso no es exitoso en alguno de los siguientes pasos.
2. Para el dominio fundamental elegido determinamos el conjunto \mathcal{P} de *todos* los posibles sidepairings entre *todos* los pares de aristas posibles, admitiendo sidepairings anticonformales si queremos construir una superficie anticonformal (que es el caso que estamos abordando, pero pudiera no serlo). El conjunto \mathcal{P} es, por regla general, enorme.
3. Calculamos el conjunto más grande que podamos de distancias admisibles asociadas a una teselación por N -ágonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$.
4. Elegimos un par inicial de sidepairings $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ y calculamos un cierto conjunto \mathcal{C} de puntos en F que admiten como desplazamiento una de las ya calculadas distancias admisibles por p_1 y p_2 , y los llamaremos nuestros *candidatos*. Por el 4.6.2 sabemos que existe solamente una cantidad finita de posibles candidatos para cualquier elección de p_1 y p_2 , y a su vez hay una cantidad finita de formas posibles de elegir dicho par. Nuevamente hay que tener en cuenta que si en nuestra construcción no conseguimos producir una superficie que satisfaga nuestras condiciones para esta elección de p_1, p_2 , basta con cambiar dicho par. Siempre tomaremos uno de los sidepairings p_1, p_2 como anticonformal, para asegurarnos que la superficie resultante, si hubiera, sea no-orientable.
5. Calculamos el desplazamiento de cada punto $x \in \mathcal{C}$ bajo todas las transformaciones en \mathcal{P} , para así determinar el subconjunto $\mathcal{P}_x \subseteq \mathcal{P}$ que consiste de aquellas transformaciones que mueven a x una de las distancias admisibles ya calculadas.
6. Verificamos si hay suficientes transformaciones en \mathcal{P}_x que nos permitan construir un conjunto completo de sidepairings entre las aristas de F tal que cada ciclo de vértices complete un ángulo de 2π . Si éste fuera el caso, el grupo K generado por dichas transformaciones uniformizará una superficie no-orientable k -extremal de género g con su k -packing trivial correspondiente, y pudiera ser que el punto x fuera el centro de uno de los discos de un segundo k -packing extremal *oculto*.
7. Determinamos si existe alguna otra configuración F' de k N -ágonos regulares que sea también un dominio fundamental para K , y que tenga a x como centro de uno de sus polígonos. Si éste es el caso, X admitirá un segundo k -packing extremal. En la práctica este es un paso difícil a menos que uno pueda demostrar la existencia de un automorfismo de X que mueva el k -packing original en el k -packing oculto.

Podemos ejemplificar nuestro procedimiento anterior con el caso de $N = 14$, teniendo en cuenta que puede ser fácilmente adaptado, con menores modificaciones, para cualquiera de los demás valores de N requeridos, es decir, $N = 7, 8, 9, 10, 11$ y 16 .

El ejemplo de superficie primitiva para $N = 14$ que buscamos será una superficie X no-orientable 3-extremal de género 6 que admite un dominio fundamental dado por la unión F de tres 14-ágonos regulares con ángulo $\frac{2\pi}{3}$.

1. Comenzamos eligiendo la región F en la Figura 4.3, conformada por tres 14-ágonos regulares con ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Notemos que en este punto no tenemos la seguridad de que podremos construir una superficie que queremos con este dominio F , pero si alguno de los pasos falla podemos volver a empezar con otra configuración para F . Para lo que viene consideramos conveniente enumerar los polígonos y luego etiquetar las aristas de cada uno de ellos en sentido antihorario de 0 a 13, donde ponemos la etiqueta 0 de un polígono adyacente al central sobre el lado en el que se intersectan ambos polígonos².

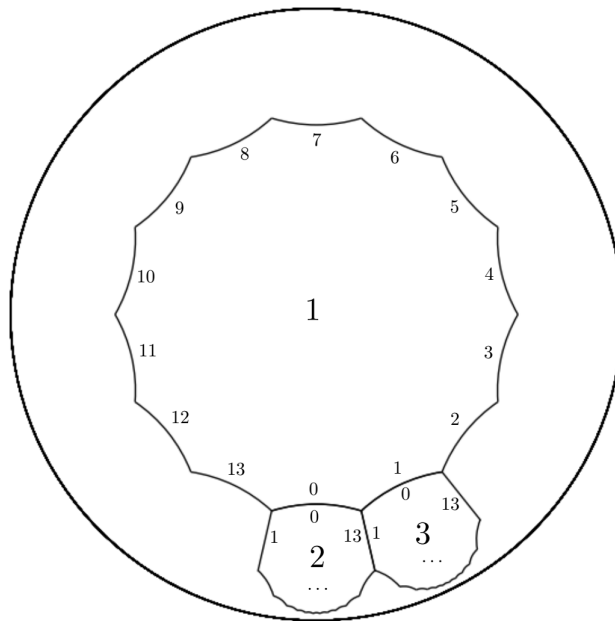


Figura 4.3: El dominio fundamental inicial F y nuestra forma de etiquetar las aristas y los polígonos.

² En toda la tesis, excepto en la última sección, asumiremos que el polígono 1 será el polígono central P , y el polígono $(ca)^j ab(P)$ será el polígono $j + 2$. Solamente en el último capítulo aparecerán superficies cuyos dominios no siguen este patrón, y ahí cambiaremos un poco la notación.

2. Calculamos *todas* las transformaciones conformales y anticonformales que identifican pares de aristas de F , recolectando toda esta información en una lista que llamaremos \mathcal{P} (ver [Gir21] para el código computacional y los resultados). Podemos identificar un elemento p de \mathcal{P} con una tripla (\pm, m_i, n_j) lo que significa que p envía la arista con etiqueta i del polígono m en la arista con etiqueta j del polígono n , y la primera componente de la tripla indica si p es conformal (+) o anticonformal (-). Para ver un ejemplo observe la Figura 4.4.

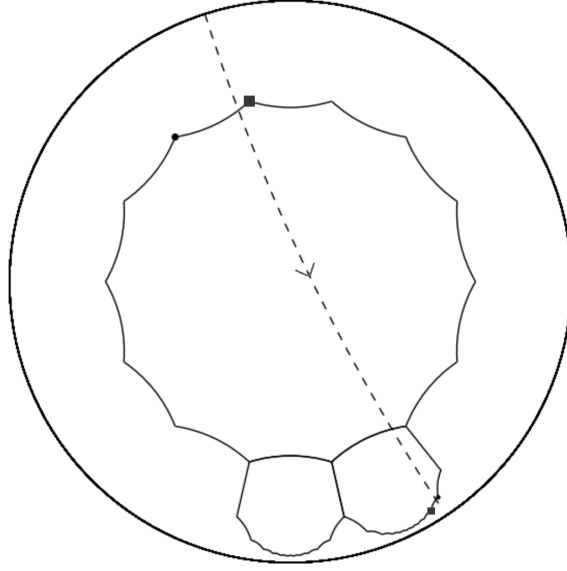


Figura 4.4: La transformación $(-, 1_8, 3_{11})$ es anticonformal y está determinada por su acción sobre el segmento que une los puntos \bullet y \blacksquare . La línea punteada es su eje (orientado).

3. Calculamos un conjunto D de distancias admisibles dadas por las transformaciones en \mathcal{R}_5 (recordemos la notación para \mathcal{R}_5 dada inmediatamente después de la demostración del Lema 4.2. Ver [Gir21] para ver el código empleado y la información obtenida). Es importante dejar claro que para otros valores de N consideramos otros \mathcal{R}_k , dependiendo esencialmente de cuán grande es N .
4. Elegimos el siguiente par de sidepairings iniciales:

$$p_0 = (-, 1_{13}, 1_{10}), \quad p_1 = (+, 1_2, 2_7).$$

Ahora calculamos el conjunto de puntos que admiten como desplazamiento una distancia admisible en D para p_0 y p_1 ; en la Figura 4.5 mostramos algunas de sus bananas correspondientes (el código está disponible en [Gir21]).

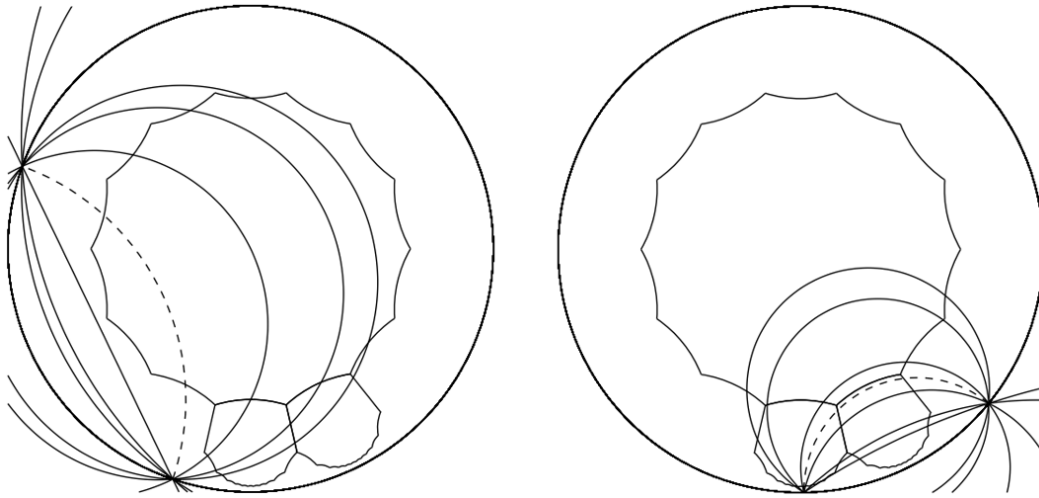


Figura 4.5: Las primeras bananas correspondientes a los sidepairings iniciales p_0 (izquierda) y p_1 (derecha). Las líneas punteadas indican los ejes de dichas transformaciones.

La Figura 4.6 nos muestra algunos de los puntos en el conjunto \mathcal{C} de candidatos obtenidos como intersección de bananas de los sidepairings p_0 y p_1 .

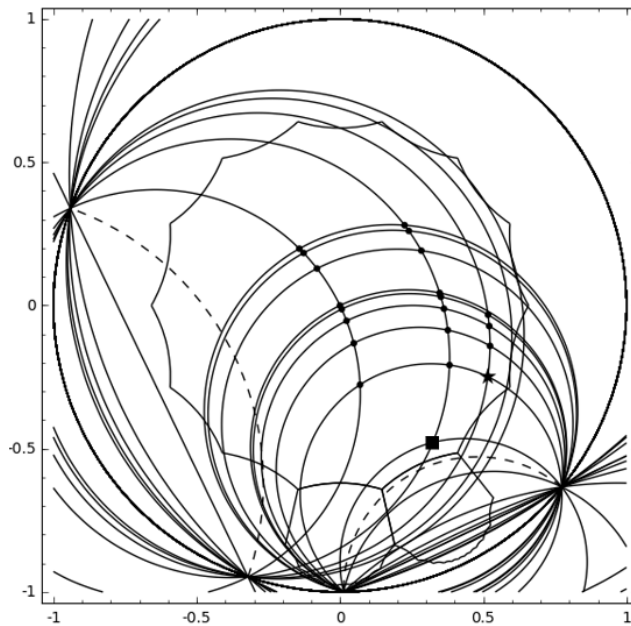


Figura 4.6: La construcción de un subconjunto \mathcal{C} del conjunto de candidatos dados por la intersección de algunas bananas de p_0 y p_1 .

5. Para cada uno de los puntos $x \in \mathcal{C}$ definimos una lista \mathcal{P}_x de todos los sidepairings

p en \mathcal{P} que desplacen dicho punto x una distancia admisible, lo que es equivalente a decir que cada uno de ellos tiene alguna banana que pase por x (siempre con un error $< 10^{-4}$). Por ejemplo, para el punto x etiquetado como ■ en la Figura 4.6, cuyas coordenadas son aproximadamente $x \approx 0.3241 - 0.4777i$, encontramos que

$$\mathcal{P}_x = \{(-, 1_{13}, 1_{10}), (+, 1_2, 2_7), (-, 1_{11}, 2_1), (+, 2_8, 3_{13})\}.$$

6. En el caso de $x \approx 0.3241 - 0.4777i$ la lista \mathcal{P}_x no contiene ningún sidepairing que involucre la arista con etiqueta 3 en el polígono 1, por lo que este punto c no resulta ser un buen candidato.

Solamente dos puntos de \mathcal{C} marcados en la Figura 4.6 satisfacen la condición de que \mathcal{P}_x contenga suficientes sidepairings como para poder elegir uno de ellos para cada arista de F . Uno de estos es obviamente el origen, y el otro es

$$x \approx 0.5159 - 0.2484i,$$

marcado como ★ en la Figura 4.6. La lista \mathcal{P}_x de este último candidato es enorme, y contiene muchísimos sidepairings para cada arista de F . Por ejemplo, si observamos la arista con etiqueta 3 del polígono 1, obtenemos en \mathcal{P}_x los siguientes sidepairings:

$$(+, 1_3, 1_{11}), (-, 1_3, 1_8), (+, 1_3, 2_{10}), (-, 1_3, 2_7), (+, 1_3, 3_{11}), (-, 1_3, 3_8).$$

Considerando todos los elementos de \mathcal{P}_x que corresponden a cada arista, todo lo que tenemos que hacer es elegir, *por inspección directa*, un conjunto de transformaciones que puedan emparejar todas las aristas de F y que generen un grupo K que uniformice una superficie sin borde. El conjunto preciso que hemos encontrado en este caso está en la Tabla 4.1, donde $G_i = (ca)^i(ab)(ca)(ab)(ca)^{-i}$. Observemos que G_0 y G_1 son rotaciones de orden 14 que fijan los centros de los polígonos 2 y 3, respectivamente.

7. La superficie $X = \mathbb{D}/K$ tiene un punto $[x]_K \approx [0.5159 - 0.2484i]_K$ que puede jugar un rol especial en nuestra búsqueda, pues satisface los requerimientos métricos que un centro de uno de los discos de un 3-packing debe cumplir.

La Figura 4.7, sacada de los ficheros de SageMath disponibles en [Gir21], nos muestran cuán milagrosamente una banana de cada sidepairing pasa por este punto.

	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 14)$
s_1	$(-, 1_{13}, 1_{10})$	$(ca)^{-4}b(ca)$
s_2	$(+, 1_2, 2_7)$	$G_0^7(ca)^{-2}$
s_3	$(-, 2_1, 1_{11})$	$(ca)^{-3}aG_0^{-1}$
s_4	$(+, 3_{13}, 2_8)$	$G_0^9G_1^2$
s_5	$(+, 1_{12}, 1_7)$	$(ca)^7ab(ca)^2$
s_6	$(-, 1_8, 2_2)$	$G_0^2a(ca)^6$
s_7	$(+, 1_5, 2_3)$	$G_0^3(ca)^9$
s_8	$(-, 1_9, 1_6)$	$(ca)^6b(ca)^5$
s_9	$(+, 1_4, 3_5)$	$G_1^5(ca)^{-3}$
s_{10}	$(+, 1_3, 2_{10})$	$G_0^{-4}(ca)^{-3}$
s_{11}	$(+, 2_9, 3_6)$	$G_1^5G_0^4$
s_{12}	$(+, 3_{12}, 3_7)$	$G_1^7(ca)(ab)(ca)^{-1}G_1^2$
s_{13}	$(+, 2_6, 2_{11})$	$G_0^{-3}abG_0^{-6}$
s_{14}	$(+, 2_4, 3_4)$	$G_1^3G_0^{-5}$
s_{15}	$(+, 3_3, 3_{11})$	$G_1^{-3}(ca)(ab)(ca)^{-1}G_1^{-3}$
s_{16}	$(+, 2_5, 3_{10})$	$G_1^{-5}G_0^{-6}$
s_{17}	$(+, 2_{12}, 3_9)$	$G_1^{-6}G_0$
s_{18}	$(+, 3_2, 3_8)$	$G_1^{-6}(ca)(ab)(ca)^{-1}G_1^{-2}$

Tabla 4.1: Un conjunto de sidepairings que generan un grupo NEC K que uniformiza un superficie no-orientable 3-extremal de género 6 ($N = 14$).

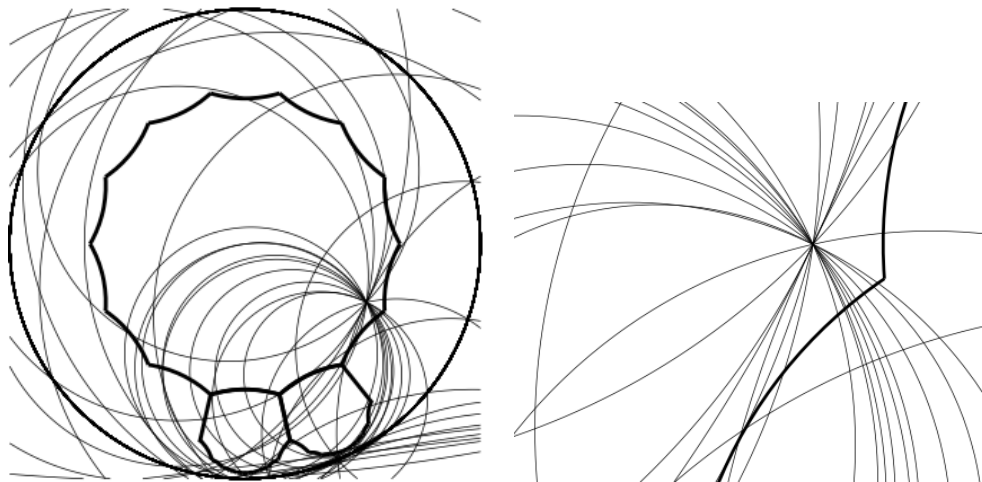


Figura 4.7: El punto $x \approx 0.5159 - 0.2484i$ pertenece a alguna banana de cada sidepairing. En la figura a la derecha hemos hecho un zoom para mostrar lo milagroso que es ver cómo se intersectan todos esos arcos en un mismo punto.

En general el demostrar que existe un segundo 3-packing en una superficie es un tema muy complicado, pero antes de intentar explorarlo con herramientas más sofisticadas vale la pena verificar si, como pasaba en el caso clásico $k = 1$, existe algún automorfismo de X que envíe el 3-packing original a otro fuera de la teselación original (ver [GGD02a]).

Esto es exactamente lo que ocurre en nuestro caso de $N = 14$: si denotamos $O' := (ca)^2 ab(0)$ entonces podemos demostrar, tras un laborioso proceso apoyado en las capacidades gráficas y de cálculo de SageMath, que el elemento elíptico $\tau \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ de orden 2 que permuta el candidato x con O' induce un automorfismo de X . El corazón de esta demostración radica en que τ conjuga cada sidepairing en un elemento de K , lo que significa que τ normaliza el grupo K . Debemos destacar que τ no es un elemento de $\Delta^\pm(2, 3, N)$, por lo que la verificación de que aquel elemento de $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ normaliza K no se reduce a una serie de productos en términos de $a, b, c \in \Delta^\pm(2, 3, N)$. El asunto no es para nada evidente, y es por ello que exponemos a continuación nuestra aproximación al problema.

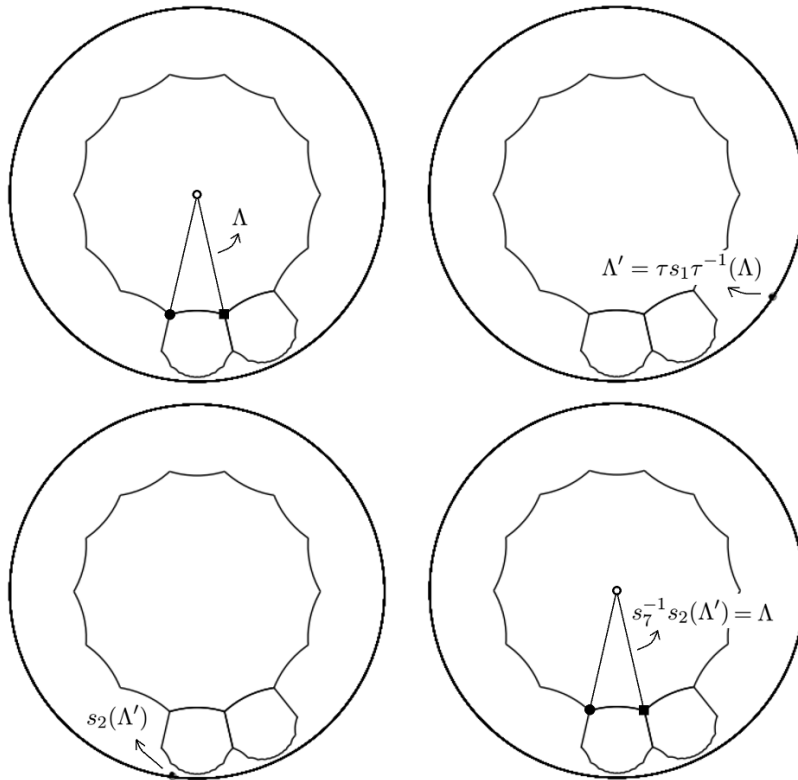


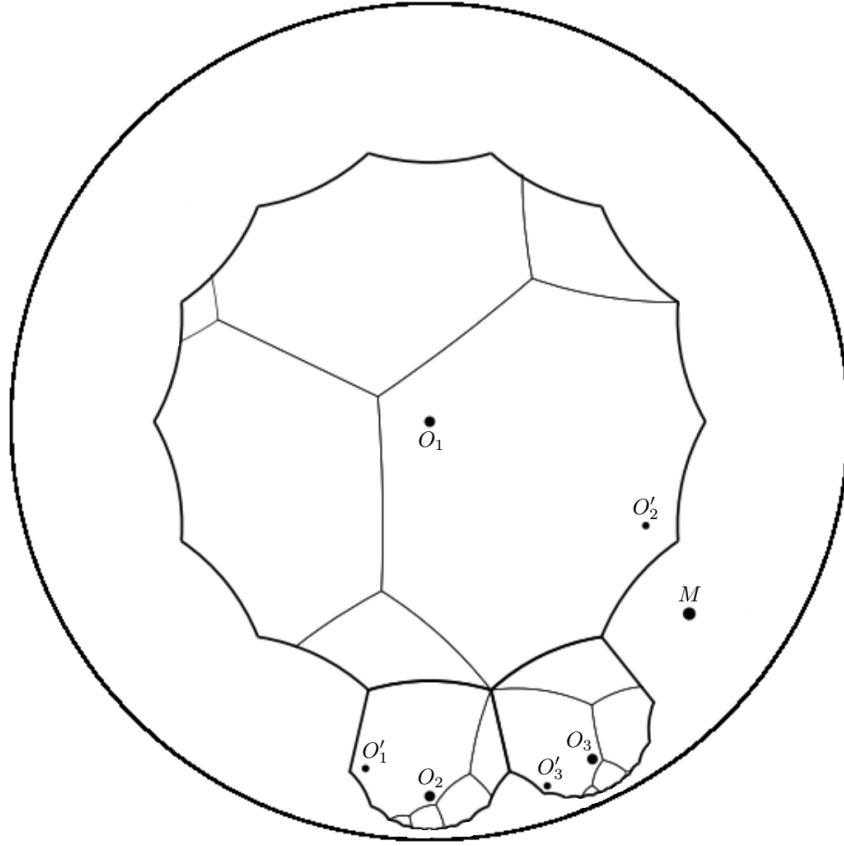
Figura 4.8: El triángulo Λ de vértices $a(A), A, 0$ (arriba izquierda) se traslada a $\Lambda' = \tau s_1 \tau^{-1}(\Lambda)$ (arriba derecha). El triángulo Λ' está tan cerca del borde de \mathbb{D} que es prácticamente imperceptible. Luego trasladamos Λ' por elementos de K (abajo izquierda y luego derecha) obteniendo eventualmente que $s_7^{-1} s_2 \tau s_1 \tau^{-1} = 1$.

Observemos en la Figura 4.8 superior izquierda el triángulo Λ de vértices $a(A)$, A , 0 (respectivamente \bullet , \blacksquare , \circ). Si trasladamos Λ por la isometría $\tau s_1 \tau^{-1}$ obtenemos Λ' en la figura superior derecha, donde podemos ver que Λ' se acerca bastante al borde, y por eso el triángulo se ve muy pequeño y aplastado. Nuestro objetivo es encontrar un elemento de K que devuelva Λ' a la posición de Λ , ya que así al componer dicho elemento con $\tau s_1 \tau^{-1}$ obtendríamos la identidad (la única transformación de Möbius que fija 3 puntos), con lo cual tendríamos que $\tau s_1 \tau^{-1}$ es un elemento de K . El proceso de devolver el triángulo Λ' a Λ es la parte más experimental de nuestro procedimiento, ya que requiere ir probando cómo es que los sidepairings van moviendo Λ' . La distancia de las sucesivas traslaciones de Λ' al eje de una transformación es un buen indicador de qué tan conveniente es mover aquel triángulo por dicha transformación, y precisamente así es como determinamos que era conveniente mover Λ' primero por s_2 (figura inferior izquierda), y posteriormente por s_7^{-1} (figura inferior derecha). Esto significa que $s_7^{-1} s_2 \tau s_1 \tau^{-1} = 1$, o sea $\tau s_1 \tau^{-1} = s_2^{-1} s_7 \in K$ (siempre con un pequeño margen de error).

Utilizando como modelo el razonamiento anterior podemos verificar, tras una detallada revisión, que para cada sidepairing $s \in K$ existe un elemento $k \in K$ tal que $\tau s \tau^{-1} = k$. La Tabla 4.9 que condensa esta información, mientras que la figura sobre ella nos indica la forma en que τ mueve la teselación original en una nueva (ver el fichero SageMath en [Gir21] donde están realizados estos cálculos).

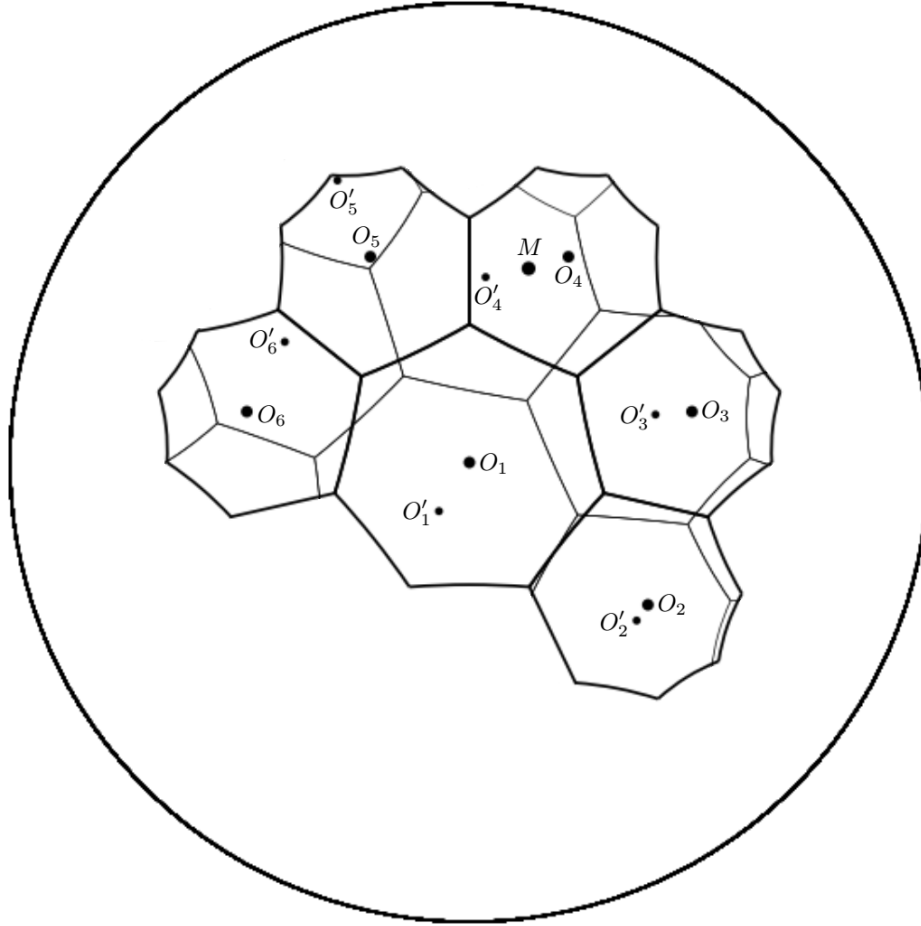
La demostración geométrica/numérica del teorema que hemos abordado en esta sección estará completa si es que conseguimos aplicar de manera exitosa el procedimiento recién descrito a cada uno de los pares (g, k) primitivos asociados a los valores de N requeridos, que son $N = 7, 8, 9, 10, 11, 16$. Por ello hemos construido las figuras 4.10 a la 4.15 que contienen toda la información que define a estas superficies. Bajo cada figura tenemos una tabla que muestra, por un lado, los sidepairings que definen al grupo NEC uniformizador $K \leq \Delta^\pm(2, 3, N)$, y por otro lado, el resultado de conjugar dichos generadores por un elemento elíptico de orden 2 que fija un punto específico M . Todo esto demuestra eventualmente que τ induce un automorfismo de la superficie que envía los centros O_j del k -packing original a los centros $O'_j = \tau(O_j)$ de la nueva teselación.

En las tablas de las Figuras 4.10 a la 4.15 hemos usado una notación similar a la descrita anteriormente para el caso $N = 14$: a, b, c siempre son las reflexiones con respecto a los lados de un triángulo de ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{N}$, respectivamente (que serán los generadores del grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, N)$) y la transformación G_i será siempre también el producto $(ca)^i(ab)(ca)(ab)(ca)^{-i}$. Las líneas delgadas en las figuras muestran como las CDV correspondientes al segundo k -packing se ven dentro del dominio fundamental de K para el k -packing original. Todos estos ejemplos pueden ser obtenidos mediante el procedimiento general que aplicamos a $N = 14$ (ver [Gir21] para el código SageMath y los cálculos).



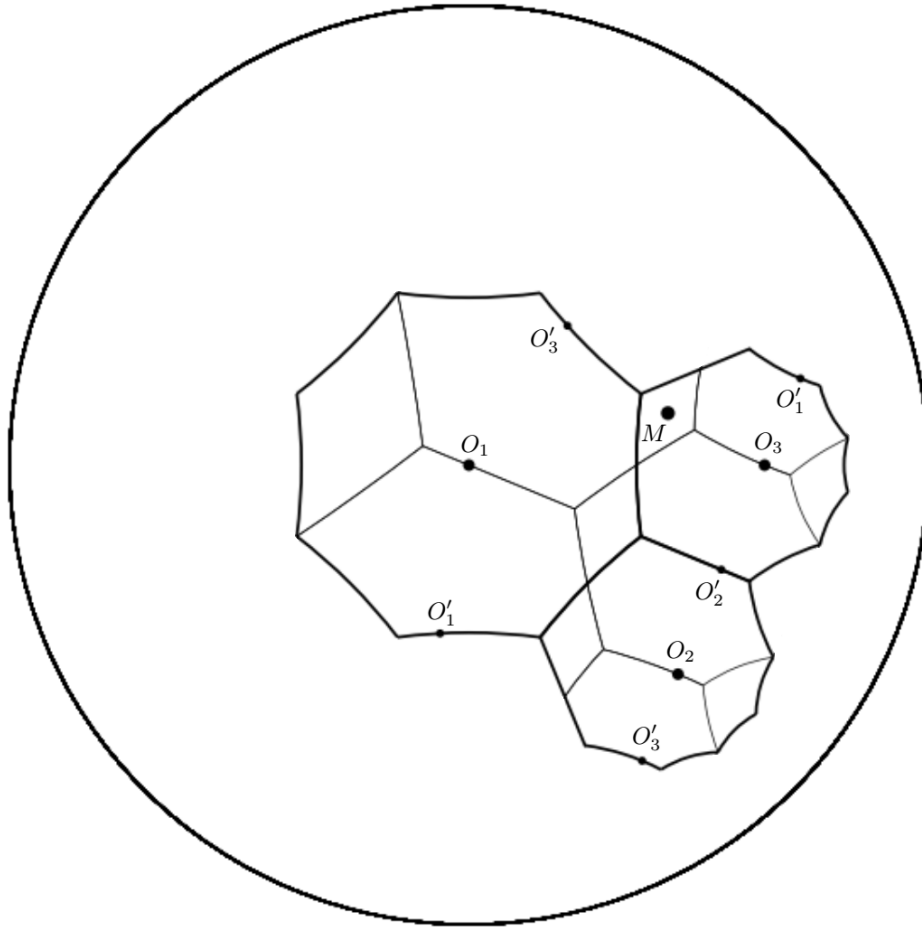
Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$	Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$s_2^{-1} s_7 s_6^{-1} s_2$	s_{10}	$s_2^{-1} s_{11}^{-1} s_{14} s_2$
s_2	$s_7^{-1} s_2$	s_{11}	$s_2^{-1} s_{14}^{-1} s_{11} s_{14} s_2$
s_3	$s_2^{-1} s_7 s_6^{-1} s_2$	s_{12}	$s_2^{-1} s_{16}^{-1} s_{12} s_{16} s_2$
s_4	$s_7^{-1} s_2$	s_{13}	$s_2^{-1} s_7 s_2^{-1} s_{11}^{-1} s_{14} s_2$
s_5	$s_2^{-1} s_6 s_1 s_2$	s_{14}	$s_2^{-1} s_7 s_{14} s_2$
s_6	$s_2^{-1} s_3^{-1} s_7^{-1} s_2$	s_{15}	$s_2^{-1} s_{14}^{-1} s_{16} s_2$
s_7	$s_2^{-1} s_7^{-1} s_2$	s_{16}	$s_2^{-1} s_7 s_{16} s_2$
s_8	$s_2^{-1} s_3^{-1} s_2$	s_{17}	$s_2^{-1} s_{14}^{-1} s_{11} s_4 s_{16} s_2$
s_9	$s_2^{-1} s_{14} s_2$	s_{18}	$s_2^{-1} s_{14}^{-1} s_{11} s_4 s_{16} s_2$

Figura 4.9: Nuestro ejemplo para $N = 14$ es una superficie 3-extremal no-orientable de género 6 con dos 3-packings extremales: los centros O'_j del segundo 3-packing serán las imágenes de los centros O_j del 3-packing trivial a través de τ , un automorfismo de orden 2 de la superficie inducido por la transformación elíptica que fija el punto $M \approx 0.6197 - 0.4592i$. Las líneas delgadas son las partes de la teselación asociadas al segundo 3-packing extremal que están dentro del dominio fundamental F . La información en la tabla justifica que τ normaliza el grupo K (sin olvidar que hemos realizado estas verificaciones con un pequeño margen de error).



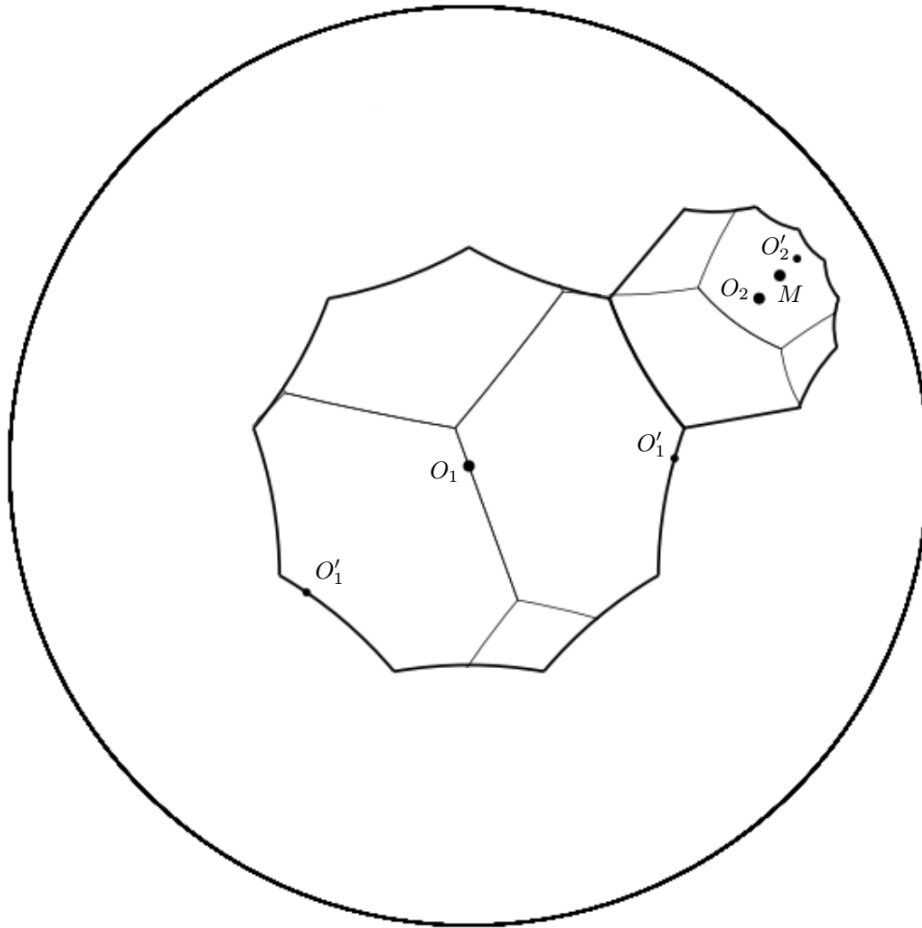
	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 7)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 3_3, 3_4)$	$G_1^4(ca)b(ca)^{-1}G_1^4$	$s_9^{-1}s_1s_9$
s_2	$(+, 3_2, 3_5)$	$G_1^5(ca)ab(ca)^{-1}G_1^5$	$(s_6s_9)^{-1}$
s_3	$(+, 3_1, 4_2)$	$G_2^2(ca)^2ab(ca)^{-1}G_1^{-1}$	$(s_6s_9)^{-1}$
s_4	$(+, 1_0, 4_3)$	$G_2^3(ca)^2$	$(s_6s_9)^{-1}$
s_5	$(-, 4_4, 5_5)$	$G_3^{-2}(ca)^3b(ca)^{-2}G_2^3$	s_6
s_6	$(-, 4_5, 6_2)$	$G_4^2(ca)^4b(ca)^{-2}G_2^2$	s_6
s_7	$(-, 5_2, 6_3)$	$G_4^3(ca)^4b(ca)^{-3}G_3^{-2}$	s_6
s_8	$(-, 5_3, 7_6)$	$G_5^{-1}(ca)^5b(ca)^{-3}G_3^{-3}$	s_9
s_9	$(-, 5_4, 1_6)$	$(ca)^6a(ca)^{-3}G_3^3$	s_9
s_{10}	$(+, 6_4, 7_5)$	$G_5^4G_4^2$	$s_7^{-1}s_9$
s_{11}	$(-, 6_5, 7_3)$	$G_5^2G_4^{-1}(ca)^4a(ca)^{-4}G_4^2$	$s_7^{-1}s_{11}^{-1}s_9$
s_{12}	$(-, 7_2, 7_4)$	$G_5^4(ca)^5b(ca)^{-5}G_5^{-2}$	$s_7^{-1}s_{11}^{-1}s_9$

Figura 4.10: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 6$, $g = 3$, $N = 7$. Aquí $M \approx 0.1288 + 0.4222i$.



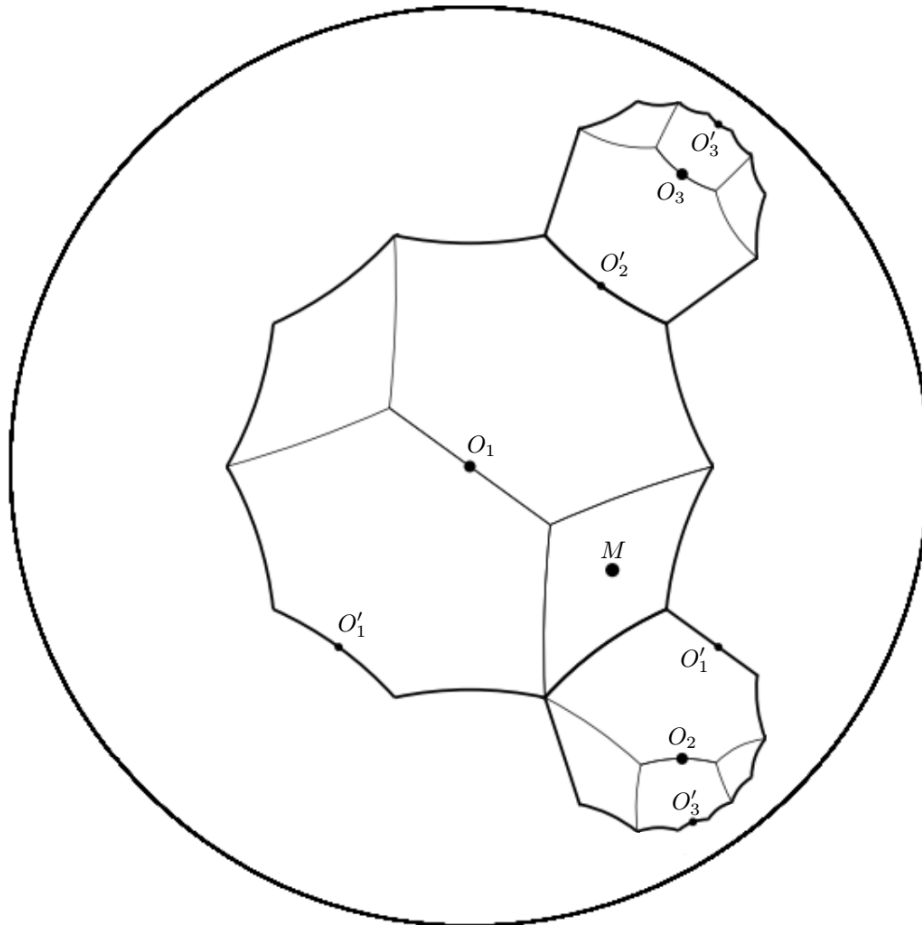
	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 8)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 3_4, 3_6)$	$G_1^{-2}(ca)b(ca)^{-1}G_1^4$	$s_8^{-1}s_4s_8$
s_2	$(+, 3_3, 4_3)$	$G_2^2G_1^4$	s_3s_8
s_3	$(-, 3_2, 1_3)$	$(ca)^2(ca)a(ca)^{-1}G_1^{-2}$	s_3
s_4	$(-, 3_5, 4_2)$	$G_2G_1^{-1}(ca)a(ca)^{-1}G_1^3$	$s_8^{-1}s_4s_8$
s_5	$(-, 1_0, 4_6)$	$G_2^{-2}(ca)^2a$	s_5
s_6	$(-, 1_7, 1_5)$	$(ca)^{-3}b(ca)$	$s_9^{-1}s_7^{-1}$
s_7	$(+, 1_6, 4_5)$	$G_2^{-3}(ca)^4$	s_7
s_8	$(-, 1_4, 4_4)$	$G_2^{-4}(ca)^2a(ca)^4$	s_8
s_9	$(-, 4_7, 3_1)$	$G_1(ca)^{-1}(ca)^2b(ca)^{-2}G_2$	s_5^{-1}

Figura 4.11: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 3$, $g = 3$, $N = 8$. Aquí $M \approx 0.4331 + 0.1131i$.



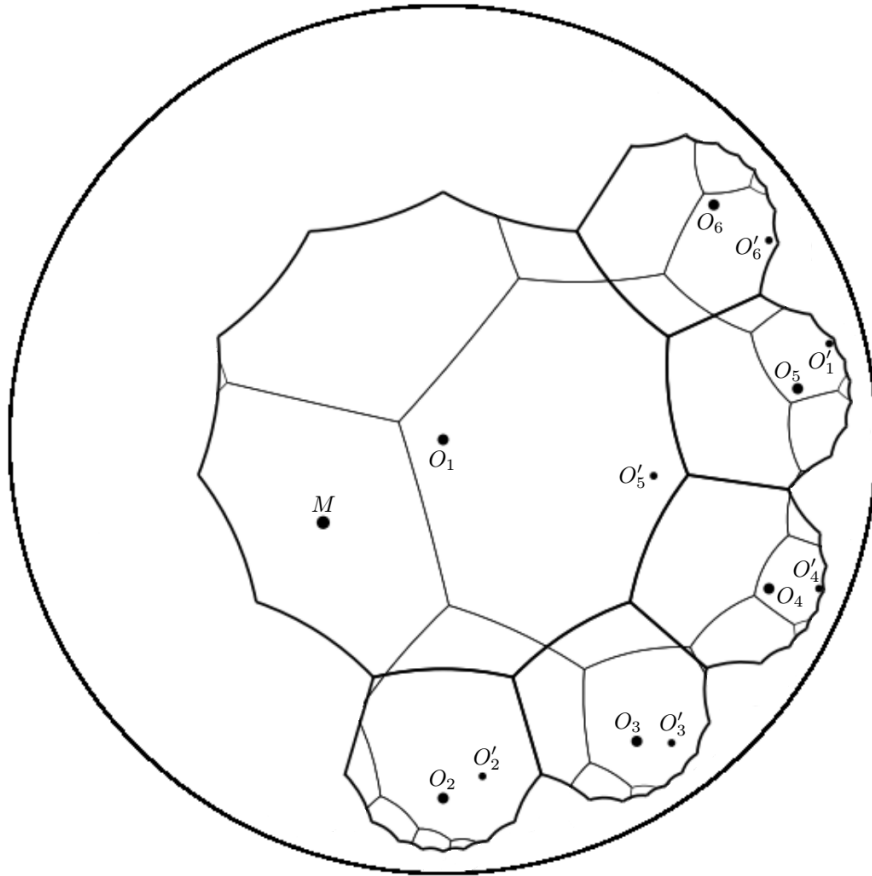
	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^{\pm}(2, 3, 9)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 1_0, 1_1)$	$(ca)b$	$(s_5 s_1^{-1} s_8^{-2})^{-1}$
s_2	$(+, 1_8, 1_2)$	$(ca)^2 ab(ca)$	$(s_5 s_8^{-2})^{-1}$
s_3	$(+, 1_7, 5_1)$	$G_3(ca)^5$	$(s_7^2 s_8^{-2})^{-1}$
s_4	$(-, 1_6, 5_3)$	$G_3^3(ca)^3 a(ca)^3$	$(s_7 s_8^{-2})^{-1}$
s_5	$(+, 1_5, 5_5)$	$G_3^5(ca)^7$	$(s_3 s_5^{-1})^{-1}$
s_6	$(-, 1_4, 5_7)$	$G_3^{-2}(ca)^3 a(ca)^5$	s_8
s_7	$(-, 5_8, 5_6)$	$G_3^{-3}(ca)^3 b(ca)^{-3} G_3$	s_8
s_8	$(-, 5_2, 5_4)$	$G_3^4(ca)^3 b(ca)^{-3} G_3^{-2}$	s_6

Figura 4.12: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 2$, $g = 3$, $N = 9$. Aquí $M \approx 0.6767 + 0.4145i$.



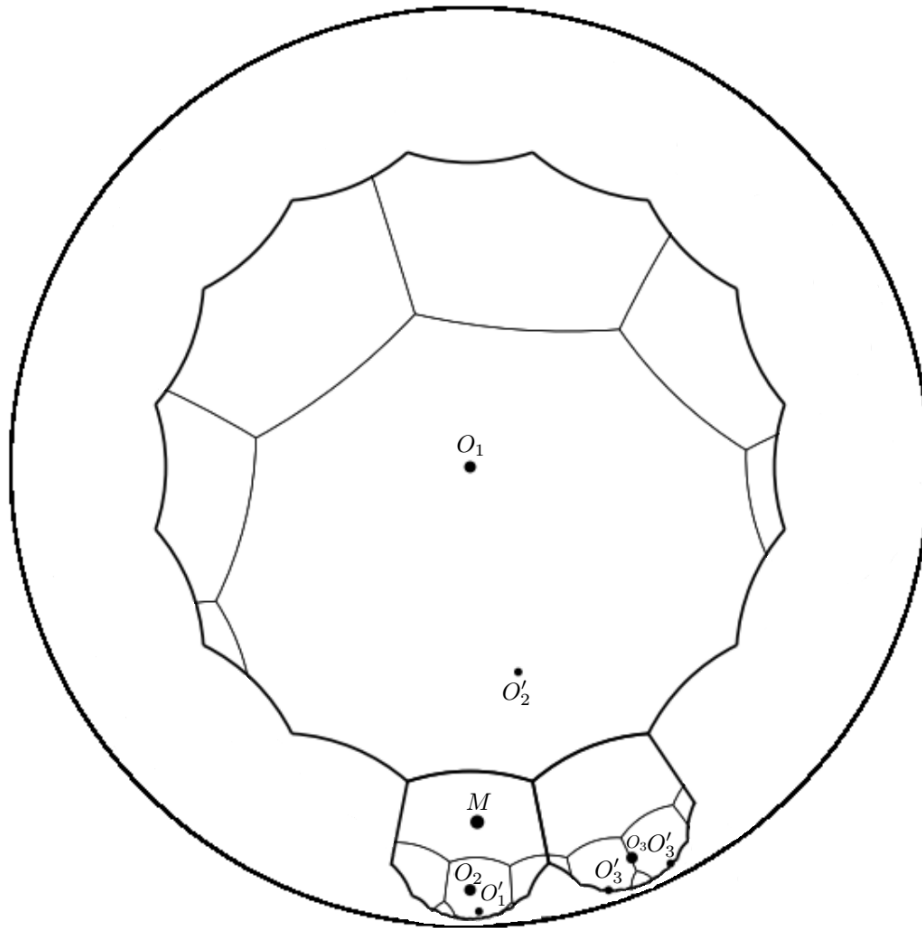
	Sidpairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 10)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 1_0, 1_2)$	$(ca)^2 b$	s_1
s_2	$(-, 1_3, 3_1)$	$(cb)^2 cacac$	s_1^{-1}
s_3	$(+, 1_5, 3_6)$	$cb(ca)^6 ab(ac)^5$	s_3
s_4	$(+, 1_6, 6_6)$	$(ca)^4 ab(ca)^6 ab(ac)^6$	$s_{12}^{-1} s_4 s_5^{-1}$
s_5	$(+, 1_7, 3_3)$	$cb(ca)^3 ab(ac)^7$	s_{12}^{-1}
s_6	$(-, 1_8, 6_2)$	$(ca)^2 ((ca)^2 ab)^2 (ca)^7 c$	$s_1 s_5^{-1}$
s_7	$(-, 1_9, 3_9)$	$cb(ca)^9 ab(ca)^8 c$	s_1
s_8	$(-, 3_2, 6_1)$	$(ca)^4 abcab(ac)^2 abac$	s_1
s_9	$(+, 3_4, 6_5)$	$(ca)^4 ab(ca)^5 (ab)(ac)^4 abac$	$s_4 s_5^{-1}$
s_{10}	$(+, 3_5, 6_7)$	$(ca)^4 ab(ca)^7 (ab)(ac)^5 abac$	$s_4 s_3^{-1}$
s_{11}	$(+, 3_7, 6_9)$	$(ca)^4 ab(ca)^9 (ab)(ac)^7 abac$	s_3^{-1}
s_{12}	$(+, 3_8, 6_3)$	$ca((ca)^3 ab)^2 (ac)^8 abac$	s_5^{-1}
s_{13}	$(+, 6_4, 6_8)$	$(ca)^4 ab(ca)^8 (ab(ac)^4)^2$	$s_1^{-1} s_6 s_3^{-1}$

Figura 4.13: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 3$, $g = 4$, $N = 10$. Aquí $M \approx 0.3103 - 0.2254i$.



	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^{\pm}(2, 3, 11)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 1_{10}, 1_7)$	$(ca)^{-4}b(ca)$	s_1
s_2	$(+, 1_5, 4_5)$	$G_2^5(ca)^{-3}$	$s_1^{-1}s_{20}s_6$
s_3	$(-, 1_8, 2_1)$	$G_0a(ca)^3$	s_1^{-1}
s_4	$(+, 6_{10}, 4_6)$	$G_2^6(ca)^{-2}(ca)^4ab(ca)^{-4}G_4$	$s_1^{-1}s_{20}s_6$
s_5	$(+, 1_6, 5_8)$	$G_3^{-3}(ca)^{-3}$	$s_1^{-1}s_6$
s_6	$(-, 1_9, 5_7)$	$G_3^{-4}(ca)^3a(ca)^2$	s_6
s_7	$(+, 4_4, 5_9)$	$G_3^{-3}G_2^6$	$s_6^{-1}s_{20}^{-1}s_6$
s_8	$(+, 4_3, 6_2)$	$G_4^2(ca)^2(ca)^2ab(ca)^{-2}G_2^{-3}$	$s_6^{-1}s_{20}^{-1}s_6$
s_9	$(+, 2_2, 5_6)$	$G_3^{-5}(ca)^3abG_0^{-2}$	s_1s_6
s_{10}	$(+, 2_5, 2_9)$	$G_0^{-2}abG_0^6$	$s_1s_{10}s_1^{-1}$
s_{11}	$(+, 2_4, 3_2)$	$G_1^2(ca)abG_0^{-4}$	$s_1s_{10}s_1^{-1}$
s_{12}	$(-, 2_3, 3_7)$	$G_1^{-4}(ca)bG_0^{-3}$	$s_1s_{13}^{-1}s_6$
s_{13}	$(-, 3_6, 5_5)$	$G_3^5(ca)^2(ca)b(ca)^{-1}G_1^{-6}$	$s_1s_{12}^{-1}s_6$
s_{14}	$(-, 3_3, 3_8)$	$G_1^8(ca)b(ca)^{-1}G_1^{-3}$	$s_1s_{10}^{-1}s_{12}s_1^{-1}$
s_{15}	$(-, 4_2, 6_6)$	$G_4^6(ca)^2(ca)^2b(ca)^{-2}G_2^{-2}$	$s_6^{-1}s_{13}s_{18}^{-1}s_6$
s_{16}	$(-, 3_9, 6_5)$	$G_4^5(ca)^3(ca)b(ca)^{-1}G_1^{-9}$	$s_6^{-1}s_{13}s_{18}^{-1}s_6$
s_{17}	$(-, 6_7, 6_3)$	$G_4^3(ca)^4b(ca)^{-4}G_1^{-7}$	$s_6^{-1}s_{17}s_6$
s_{18}	$(+, 3_4, 6_4)$	$G_4^4(ca)^3(ca)ab(ca)^{-1}G_1^{-4}$	$s_1s_{10}^{-1}s_{18}^{-1}s_6$
s_{19}	$(-, 3_5, 6_8)$	$G_4^8(ca)^3(ca)b(ca)^{-1}G_1^{-5}$	$s_1s_{12}^{-1}s_7^{-1}s_6$
s_{20}	$(+, 5_4, 6_9)$	$G_4^9(ca)(ca)^3ab(ca)^{-3}G_3^{-4}$	$s_6^{-1}s_7^{-1}s_6$
s_{21}	$(+, 4_7, 5_3)$	$G_3^3(ca)(ca)^2ab(ca)^{-2}G_2^{-7}$	$s_6^{-1}s_{20}^{-1}s_2^{-1}s_6$
s_{22}	$(+, 2_7, 5_2)$	$G_2^2(ca)^3abG_0^{-7}$	$s_1s_{22}^{-1}s_6$
s_{23}	$(+, 2_8, 4_9)$	$G_2^8(ca)^2abG_0^{-8}$	$s_1s_{22}^{-1}s_6$
s_{24}	$(+, 2_6, 4_8)$	$G_2^8(ca)^2abG_0^{-6}$	$s_1s_{10}s_{22}^{-1}s_6$

Figura 4.14: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 6$, $g = 7$, $N = 11$. Aquí $M \approx -0.2767 - 0.1909i$.



	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^{\pm}(2, 3, 16)$	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	$(-, 1_{15}, 1_{12})$	$(ca)^{-4}b(ca)$	s_{11}^{-1}
s_2	$(-, 2_1, 1_{13})$	$(ca)^{-3}aG_0^{-1}$	s_{11}^{-1}
s_3	$(+, 1_2, 1_5)$	$(ca)^5ab(ca)^{-2}$	s_9^{-1}
s_4	$(+, 3_{15}, 1_6)$	$(ca)^5G_1$	s_9^{-1}
s_5	$(-, 1_{14}, 3_6)$	$G_1^6(ca)a(ca)^2$	$s_{18}^{-1}s_{13}^{-1}s_{20}$
s_6	$(+, 2_2, 3_5)$	$G_1^4G_0^{-3}$	$s_{11}^{-1}s_{18}^{-1}s_{13}^{-1}s_{20}$
s_7	$(+, 1_{11}, 3_7)$	$G_1^7(ca)^6$	$s_{17}^{-1}s_{13}^{-1}s_{20}$
s_8	$(-, 2_6, 2_7)$	$G_0^7bG_0^{-6}$	s_{14}^{-1}
s_9	$(+, 2_5, 2_8)$	$G_0^8abG_0^{-5}$	s_3^{-1}
s_{10}	$(-, 2_{12}, 3_2)$	$G_1G_0^{-1}aG_1^4$	s_1
s_{11}	$(-, 2_{14}, 2_{11})$	$G_0^{-5}bG_0^2$	s_1^{-1}
s_{12}	$(-, 3_{10}, 3_{14})$	$G_1^{-2}(ca)b(ca)^{-1}G_1^6$	$s_{20}^{-1}s_{19}$
s_{13}	$(-, 1_7, 3_{11})$	$G_1^{-5}(ca)a(ca)^9$	$s_{15}^{-1}s_{20}$
s_{14}	$(-, 1_3, 1_4)$	$(ca)^4b(ca)^{-3}$	s_8^{-1}
s_{15}	$(+, 2_9, 3_8)$	$G_1^7G_0^6$	$s_{13}^{-1}s_{20}$
s_{16}	$(+, 1_8, 3_3)$	$G_1^3(ca)^9$	$s_{15}^{-1}s_6$
s_{17}	$(+, 1_{10}, 2_{10})$	$G_0^{10}(ca)^6$	s_{17}
s_{18}	$(-, 1_9, 2_{13})$	$G_0^{-3}a(ca)^7$	$s_{15}^{-1}s_5$
s_{19}	$(+, 2_4, 3_9)$	$G_1^{-8}G_0^{-5}$	$s_{12}^{-1}s_{20}$
s_{20}	$(-, 2_3, 3_{13})$	$G_1^{-4}G_0^{-1}aG_0^{-3}$	s_{20}
s_{21}	$(-, 3_4, 3_{12})$	$G_1^{-4}(ca)b(ca)^{-1}G_1^{-4}$	$s_6^{-1}s_{20}$

Figura 4.15: Información para una superficie que resuelve el caso de $k = 3$, $g = 7$, $N = 16$. Aquí $M \approx 0.0154 - 0.7729i$.

Capítulo 5

Múltiples k -packings extremales: verificación algebraica

Recordemos que en el capítulo anterior hemos conjeturado la existencia de una serie de superficies k -extremales que poseen un automorfismo que envía el k -packing trivial en otro diferente, ya que para cada una de ellas hemos descrito de manera numérica/geométrica (con un pequeñísimo margen de error) cómo es que existe un elemento $\tau \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ que conjuga el grupo uniformizador de la superficie en sí mismo. Para demostrar aquello hemos verificado que el τ hallado en cada superficie cumple que para cada sidepairing s_i de dicha superficie existe un elemento k_i tal que $\tau s_i \tau^{-1} k_i = 1$ (ver las Tablas 4.9 a 4.15). Teniendo esto en cuenta nos dedicaremos en este capítulo a verificar de manera *algebraica* cada una de esas igualdades (que hasta ahora no son sino muy buenas aproximaciones), con lo cual estaríamos en condiciones de confirmar de manera definitiva que las siete superficies que hemos estudiado anteriormente poseen más de un k -packing extremal.

Debemos destacar que el procedimiento numérico que hemos realizado previamente ha sido esencial en esta demostración, puesto que nos ha indicado cuáles son exactamente las identidades que debemos verificar de manera algebraica. Hubiera sido imposible intuir cuáles eran esas identidades sin la parte numérica de nuestro estudio.

Lo primero que haremos será recordar que, gracias a lo que vimos en el Capítulo 1, la composición de dos funciones $g, h \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$ es equivalente al producto de las matrices $g_A, h_A \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Como todas las funciones involucradas en las igualdades anteriores $\tau s_i \tau^{-1} k_i = 1$ están en $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$, entonces lo primero que haremos será trasladarlas a $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$ para así luego verificar que sus matrices asociadas en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ multipliquen la matriz identidad de este grupo.

Trasladaremos un automorfismo $g \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ a $\text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$ como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{g} & \mathbb{D} \\ F \uparrow & & \downarrow F^{-1} \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{\bar{g}} & \mathbb{H} \end{array}$$

Gracias al diagrama anterior vemos que $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ descenderá, a través de la isometría $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $F(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$, a la función $\bar{g} = F^{-1}gF \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{H})$.

No olvidemos que cada transformación $g \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ es una transformación de Möbius, por lo que podemos asociarle una matriz $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. Podemos calcular de manera explícita cuál será la transformación \bar{g} para la transformación g escogida, lo que eventualmente nos entregará que la matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ asociada a \bar{g} es

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1 - g_4 + i(g_2 + g_3) & g_2 - g_3 + i(g_1 + g_4) \\ g_3 - g_2 + i(g_1 + g_4) & g_4 - g_1 + i(g_2 + g_3) \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_1 + g_4 + i(g_3 - g_2) & g_2 + g_3 + i(g_4 - g_1) \\ g_2 + g_3 + i(g_1 - g_4) & g_1 + g_4 + i(g_2 - g_3) \end{pmatrix}$$

dependiendo si g es anticonformal o conformal, respectivamente.

Lo que haremos ahora será fijar una superficie k -extremal de característica de Euler χ cuyo k -packing extremal tenga radio $R = R_{\chi,k}$, y cuyo grupo uniformizador K esté contenido en el grupo triangular $\Delta := \Delta^\pm(2, 3, N)$ descrito en el capítulo anterior. Dicho K está generado por un conjunto finito de sidepairings $\{s_i\}$, y $N = \frac{6(k-\chi)}{k}$. En estas condiciones podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Los siguientes puntos son verdaderos.*

1. Cada elemento de $K \leq \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ es un producto finito de los sidepairings s_i .
2. Todos los sidepairings s_i son productos de las transformaciones $a, b, c \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$.
3. Las matrices asociadas a \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{-R} \\ e^R & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \end{pmatrix}.$$

4. Las componentes de las matrices asociadas a cada \bar{s}_i y \bar{k}_i pertenecen todas a una extensión finita de \mathbb{Q} , de grado a lo más $2 \cdot [\mathbb{Q}(e^R) : \mathbb{Q}]$.

Demostración. Comencemos notando que el punto **1** es una consecuencia de que K está generado por el conjunto finito de sidepairings $\{s_i\}$, mientras que el punto **2** es consecuencia directa de que K está contenido en el grupo

$$\Delta^\pm(2, 3, N) = \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^3 = (ca)^N = 1 \rangle.$$

El punto **3** es más delicado, y lo veremos en detalle. La transformación $a \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ es la reflexión con respecto al eje Y, y por lo tanto está definida por $a(z) = -\bar{z}$. La matriz asociada para a como transformación de Möbius es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (y por lo tanto, utilizando el procedimiento anterior, la matriz asociada en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ de \bar{a} será

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (-1) + i(0 + 0) & 0 - 0 + i(1 + (-1)) \\ 0 - 0 + i(1 + (-1)) & (-1) - 1 + i(0 + 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso ambas representaciones coinciden, pero no sucede así en el caso general.

Por otro lado la transformación c es una reflexión que tiene como eje una rotación del eje Y de $\frac{\pi}{N}$, por lo que si definimos la rotación $R_{\frac{\pi}{N}}$ dada por $R_{\frac{\pi}{N}}(z) = e^{\frac{i\pi}{N}}z$ tendremos que $c = R_{\frac{\pi}{N}} a R_{\frac{\pi}{N}}^{-1}$. De esta manera tenemos que $c(z) = e^{\frac{2\pi i}{N}} \cdot (-\bar{z})$ cuya matriz

como transformación de Möbius es $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{N}} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{i\pi}{N}} \end{pmatrix}$ (y por lo tanto la matriz asociada en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ de \bar{c} será

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{N}} - (-e^{-\frac{i\pi}{N}}) + i(0 + 0) & 0 - 0 + i(e^{\frac{i\pi}{N}} + (-e^{-\frac{i\pi}{N}})) \\ 0 - 0 + i(e^{\frac{i\pi}{N}} + (-e^{-\frac{i\pi}{N}})) & -e^{-\frac{i\pi}{N}} - e^{\frac{i\pi}{N}} + i(0 + 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \end{pmatrix}$$

Lo único que nos queda es determinar la transformación asociada a b . Observemos la Figura 5.1.

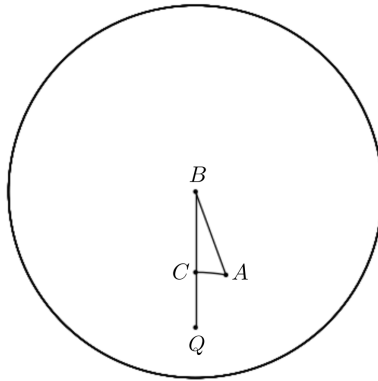


Figura 5.1: Dominio fundamental de $\Delta^\pm(2, 3, N)$ junto con el punto $Q = b(B)$.

Construiremos la matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ asociada a b a partir de ver cómo mueve los puntos $B = 0, C$ y $Q = b(0)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que la transformación es de la forma

$$b(z) = \frac{\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

donde b, c, d son números complejos a determinar. Dado que $b(Q) = 0$ entonces tendremos que $\bar{Q} + b = 0$ por lo que $b = -\bar{Q} = Q$. Así tenemos que

$$b(z) = \frac{\bar{z} + Q}{c\bar{z} + d}.$$

Como $b(0) = Q$ entonces debemos tener que $\frac{Q}{d} = Q$ por lo que $d = 1$ y así obtenemos que

$$b(z) = \frac{\bar{z} + Q}{c\bar{z} + 1}.$$

Por último observemos que $b(C) = C$, lo que se traduce en que $\frac{\bar{C} + Q}{c\bar{C} + 1} = C$, y teniendo en cuenta que $\bar{\bar{C}} = -C$ entonces

$$\frac{-C + Q}{-cC + 1} = C,$$

que eventualmente nos lleva a que $c = \frac{2C - Q}{C^2}$ y por lo tanto la transformación b está dada por

$$b(z) = \frac{\bar{z} + Q}{\frac{2C - Q}{C^2}\bar{z} + 1} = \frac{C^2\bar{z} + C^2Q}{(2C - Q)\bar{z} + C^2}.$$

Observemos que la matriz $\begin{pmatrix} C^2 & C^2Q \\ 2C - Q & C^2 \end{pmatrix}$ (asociada a los coeficientes de la transformación anterior tiene determinante $C^4 - C^2Q(2C - Q) = C^2(C - Q)^2$. Considerando que $C = -i|C|$ y que la distancia hiperbólica entre 0 y C es precisamente R , entonces gracias al Teorema 1.7 tendremos que $|C| = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}$, de lo que resulta que

$$C = (-i) \frac{e^R - 1}{e^R + 1}.$$

Como la distancia hiperbólica entre 0 y $Q = b(0)$ es $2R$ entonces por la misma razón que antes tenemos

$$D = (-i) \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Así tenemos que el determinante $C^2(C - Q)^2$ es un número real positivo, por lo que debemos multiplicar todos los coeficientes de la matriz anterior por i para que resulte de determinante negativo. Como la raíz positiva del anterior determinante era $C(C - Q)$, entonces la matriz para b como elemento de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{iC^2}{C(C - Q)} & \frac{iC^2Q}{C(C - Q)} \\ \frac{i(2C - Q)}{C(C - Q)} & \frac{iC^2}{C(C - Q)} \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la matriz asociada a \bar{b} en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ será

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{iC^2}{C(C - Q)} - \frac{iC^2}{C(C - Q)} + i \left(\frac{iC^2Q}{C(C - Q)} + \frac{i(2C - Q)}{C(C - Q)} \right) \right) & \left(\frac{iC^2Q}{C(C - Q)} - \frac{i(2C - Q)}{C(C - Q)} + i \left(\frac{iC^2}{C(C - Q)} + \frac{iC^2}{C(C - Q)} \right) \right) \\ \left(\frac{i(2C - Q)}{C(C - Q)} - \frac{iC^2Q}{C(C - Q)} + i \left(\frac{iC^2}{C(C - Q)} + \frac{iC^2}{C(C - Q)} \right) \right) & \left(\frac{iC^2}{C(C - Q)} - \frac{iC^2}{C(C - Q)} + i \left(\frac{iC^2Q}{C(C - Q)} + \frac{i(2C - Q)}{C(C - Q)} \right) \right) \end{pmatrix}$$

Si ahora simplificamos esta matriz y luego reemplazamos en ella los valores recién calculados de C y D podemos concluir la demostración del punto **3** al darnos cuenta que la matriz asociada a \bar{b} resulta ser

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-R} \\ e^R & 0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar el punto **4** notemos que gracias a los puntos **1**, **2** y **3** anteriores podemos concluir que los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{s}_i y a \bar{k}_i serán polinomios en los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} . Demostraremos inmediatamente que los coeficientes de estas tres matrices pertenecen a una extensión finita del cuerpo \mathbb{Q} , lo que tendrá como consecuencia que también los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{s}_i y a \bar{k}_i vivirán en dicho cuerpo.

Para ver de qué extensión finita de \mathbb{Q} estamos hablando comencemos observando que si denotamos por ζ_N a la raíz N -ésima de la unidad dada por $e^{\frac{2\pi i}{N}}$ entonces el cuerpo fijo de $\mathbb{Q}(\zeta_{2N})$ con respecto a la conjugación compleja es precisamente $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)$, por lo que el grado de la extensión $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)$ es igual a $\frac{\varphi(2N)}{2}$, donde φ es la función de Euler. En particular tenemos que $\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$ es algebraico para cada $N \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$ es raíz del polinomio

$$x^2 + \cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right) - 1 = 0,$$

entonces el número $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$ es algebraico, ya que la raíz de un polinomio con coeficientes algebraicos es también algebraica.

Por la misma razón tenemos que e^R es algebraico ya que

$$\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \left(\cosh(R) = \frac{e^R + e^{-R}}{2}, \right.$$

o sea e^R cumple la siguiente igualdad polinómica con coeficientes algebraicos

$$\left. (e^R)^2 + e^R \cdot \frac{-1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right) \left(+ 1 = 0. \right.$$

Ahora determinaremos una extensión finita del cuerpo \mathbb{Q} que contiene a todos los coeficientes anteriores. Si definimos $u_0 := e^R$ entonces claramente las matrices asociadas a \bar{a} y a \bar{b} tienen sus coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)$, pero debemos hacer un trabajo adicional para la matriz asociada a \bar{c} .

Para el caso del coeficiente $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$ de la matriz asociada a \bar{c} observemos que

$$\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{2 \cosh(R)} = \frac{1}{2 \left(\frac{e^R + e^{-R}}{2}\right)} \left(= \frac{1}{u_0 + u_0^{-1}} \right.$$

que claramente está en $\mathbb{Q}(u_0)$. Lamentablemente no podemos decir lo mismo de $\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$, ya que

$$\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \left(= \sqrt{1 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{u_0^2 + u_0^{-2} + 1}}{u_0 + u_0^{-1}}. \right.$$

El número $u_0^2 + u_0^{-2} + 1$ no siempre es un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)$, por lo que definimos¹

$$u_1 := \sqrt{1 - \left(\frac{1}{u_0 + u_0^{-1}}\right)^2}.$$

De esta manera estaremos seguros de que los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} estarán en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, y por lo tanto también lo estarán los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{s}_i y \bar{k}_i en cada uno de los productos $\tau s_i \tau^{-1} k_i$. ■

Gracias al teorema anterior sabemos que lo único que nos falta es encontrar la matriz asociada a $\bar{\tau}$. Como τ no es un elemento del grupo triangular Δ entonces no será un producto de las transformaciones a, b, c , y por lo tanto necesitaremos herramientas diferentes para poder determinar los coeficientes de la matriz asociada a $\bar{\tau}$ en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$. Para realizar esta tarea demostraremos el siguiente teorema:

¹ En nuestro trabajo analizamos superficies que requieren $N = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$ y 16 , y de estos valores la expresión $u_0^2 + u_0^{-2} + 1$ es un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)$ sí y solamente si $N \notin \{10, 14\}$.

Teorema 5.2. *Utilizando la notación empleada en el procedimiento geométrico/numérico de la página 65, los siguientes puntos son verdaderos.*

1. *Si R_π es la rotación de orden 2 en $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ que fija un punto $M \in \mathbb{D}$ entonces la matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ asociada a \bar{R}_π será*

$$\left(\begin{pmatrix} -\frac{(M + \bar{M})}{1 - |M|^2} & \frac{(1 - iM)(1 + i\bar{M})}{1 - |M|^2} \\ \frac{(1 + iM)(1 - i\bar{M})}{1 - |M|^2} & \frac{(M + \bar{M})}{1 - |M|^2} \end{pmatrix} \right)$$

2. *Sea $g(z) = \frac{z - O'}{z \cdot \bar{O}' - 1}$ y sea $p = \frac{g(x)}{1 + \sqrt{1 - |g(x)|^2}}$. El punto medio M entre el candidato x y el centro O' de la teselación será*

$$M = \frac{p - O'}{p \cdot \bar{O}' - 1}.$$

3. *El valor del centro O' es un número algebraico que es $O' = 0$ ó*

$$O' = \frac{u_0^2 - 1}{u_0^2 + 1} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi m}{N}\right) - i \cos\left(\frac{2\pi m}{N}\right) \right),$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$. En ambos casos O' estará en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$.

4. *El valor del candidato x es un número algebraico que es la solución de un sistema de ecuaciones de grado a lo más 2 con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$.*

Demostración. Comencemos observando que si lográramos hallar los valores algebraicos del candidato x (punto **4**) y del centro O' (punto **3**) entonces podríamos saber el valor algebraico de M (punto **2**), lo que nos permitiría determinar la matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ asociada a $\bar{\tau}$ (punto **1**).

Empezaremos analizando el punto **4**, estudiando las coordenadas algebraicas del candidato $x \in \mathbb{D}$. Recordemos que gracias al Teorema 4.5 sabemos que la ecuación en \mathbb{D} de la banana n del sidepairing s viene dada por

$$\frac{|1 + |z|^2 - 2\text{Re}(\bar{z}_0 z)|}{r(1 - |z|^2)} = \sqrt{\frac{4H^2 \binom{n}{2} - \text{tr}^2(s) + 4\epsilon}{\text{tr}(s)^2 - 4\epsilon}}. \quad (5.1)$$

Lo que haremos ahora será escribir todos los términos de esta ecuación en función de las componentes de la matriz asociada a \bar{s} , que supondremos que tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

Para ello determinaremos el centro z_0 y el radio r del eje del sidepairing s en términos de A, B, C, D , pues la expresión $\text{tr}^2(s)$ que sale en el lado derecho de la Ecuación 5.1 no es nada más que $(A + D)^2$.

Comencemos estudiando los puntos fijos en $\partial\mathbb{H}$ de la transformación \bar{s} . Si observamos las figuras 1.5 y 1.6 veremos que, independiente de la orientabilidad de s , tendremos que los puntos fijos de \bar{s} serán las soluciones de la ecuación $\frac{Az+B}{Cz+D} = z$. Esto nos entrega los dos puntos siguientes en $\partial\mathbb{H}$

$$w_1 = \frac{A - D - \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C}, \quad w_2 = \frac{A - D + \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C},$$

que podemos reescribir como

$$w_1 = \frac{A - D - \sqrt{(A + D)^2 - 4\epsilon}}{2C}, \quad w_2 = \frac{A - D + \sqrt{(A + D)^2 - 4\epsilon}}{2C}.$$

Si trasladamos estos puntos de $\partial\mathbb{H}$ a $\partial\mathbb{D}$ a través de la isometría $F(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$ obtendremos el par de puntos en $\partial\mathbb{D}$ dados por $z_1 = F(w_1)$ y $z_2 = F(w_2)$. Mediante la configuración geométrica de la Figura 5.2 tenemos una relación directa entre z_0, r y la distancia euclidiana entre z_1 y z_2 , que llamaremos $2d$.

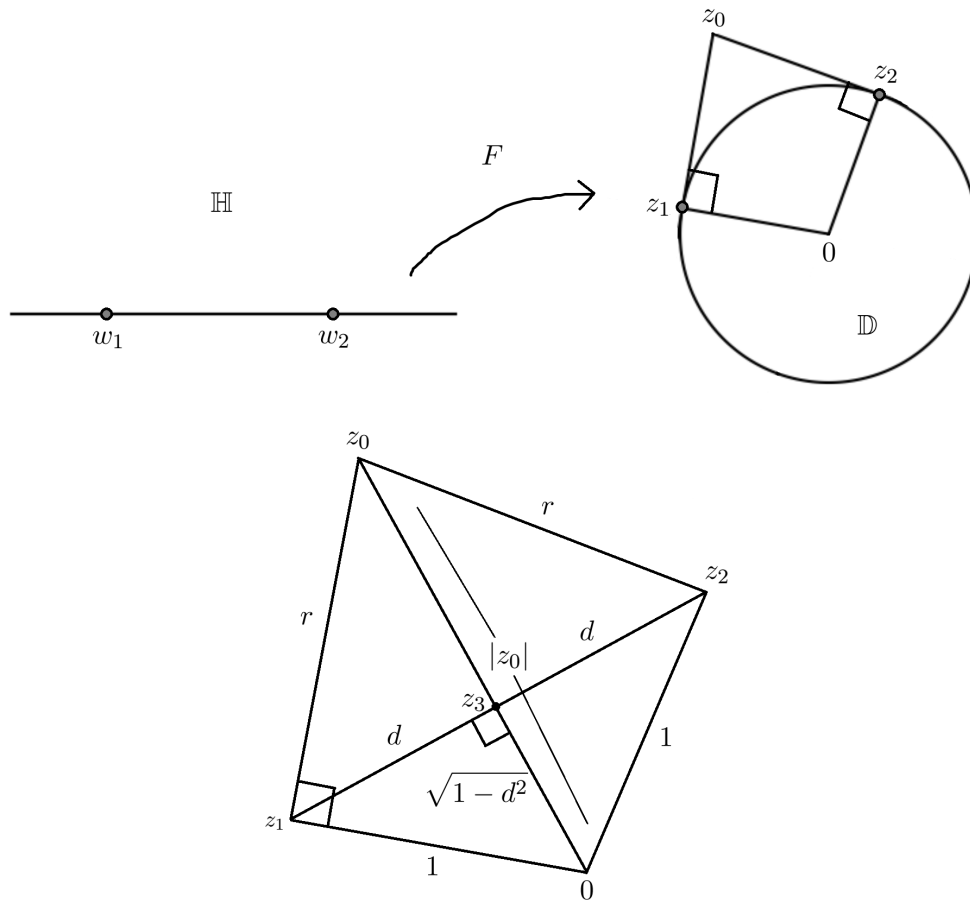


Figura 5.2: Configuración geométrica que revela el valor de $|z_0|$ y r en función de d .

Ya que los triángulos $\triangle z_1 z_3 0$ y $\triangle z_0 z_1 0$ son semejantes entonces tenemos la igualdad $\frac{|z_0|}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}$, que es lo mismo que decir

$$|z_0| = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}.$$

Por otro lado, como $r = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$ entonces tendremos que

$$r = \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}.$$

Por esta razón necesitamos determinar d en términos de los coeficientes de la matriz asociada a \bar{s} , y los términos z_0 y r de la ecuación de la banana saldrán como consecuencia inmediata. Tenemos que

$$d = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{|F(w_1) - F(w_2)|}{2} = \frac{\frac{w_1 - i}{-iw_1 + 1} - \frac{w_2 - i}{-iw_2 + 1}}{2} = \frac{w_2 - w_1}{(-iw_1 + 1)(-iw_2 + 1)},$$

y dado que $|w_1 - w_2| = \frac{\sqrt{(A+D)^2 - 4\epsilon}}{|C|}$, $w_1 + w_2 = \frac{A-D}{C}$ y $w_1 w_2 = -\frac{B}{C}$, entonces reemplazando en la igualdad anterior tendremos que

$$d = \frac{\sqrt{(A+D)^2 - 4\epsilon}}{\sqrt{(B+C)^2 + (A-D)^2}}.$$

De aquí obtenemos inmediatamente que

$$r = \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} = \frac{\sqrt{(A+D)^2 - 4\epsilon}}{|B-C|}$$

y que

$$|z_0| = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} = \frac{\sqrt{(B+C)^2 + (A-D)^2}}{|B-C|}.$$

Para encontrar z_0 basta con observar que el argumento de z_0 y el de $z_1 + z_2$ son el mismo, por lo que $z_0 = |z_0| \cdot \frac{z_1 + z_2}{|z_1 + z_2|}$. Como

$$z_1 + z_2 = 2(C-B) \cdot \frac{(A-D) - i(B+C)}{(B+C)^2 + (A-D)^2}$$

entonces

$$\frac{z_1 + z_2}{|z_1 + z_2|} = \frac{C-B}{|C-B|} \cdot \frac{(A-D) - i(B+C)}{\sqrt{(B+C)^2 + (A-D)^2}} = \frac{|C-B|}{C-B} \cdot \frac{(A-D) - i(B+C)}{\sqrt{(B+C)^2 + (A-D)^2}},$$

donde esta última igualdad es consecuencia de que $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ para cualquier $x \neq 0$. De esta manera tendremos

$$z_0 = |z_0| \cdot \frac{|C-B|}{(C-B)} \cdot \frac{(A-D) - i(B+C)}{\sqrt{(B+C)^2 + (A-D)^2}} = \frac{A-D - i(B+C)}{C-B}.$$

Por esta razón si reemplazamos los valores recién calculados de z_0 y r en la Ecuación 5.1 obtendremos de manera completamente explícita que la ecuación de la banana n del sidepairing s en términos de la matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ asociada a \bar{s} está dada por

$$(B - C)(1 + x^2 + y^2) + 2(x(A - D) - y(B + C)) = (1 - x^2 - y^2) \sqrt{4H^2 \left(\frac{d_n}{2}\right) - (A + D)^2 + 4\epsilon} \quad (5.2)$$

Con respecto a la ecuación anterior podemos hacer las siguientes observaciones:

i) El hecho de que el lado izquierdo de la ecuación 5.2 esté encerrado en un valor absoluto refleja el hecho de que el lugar geométrico que conforma su solución tiene dos componentes: una curva a cada lado del eje del sidepairing s .

ii) Para obtener el candidato es necesario resolver un sistema que involucra dos ecuaciones de este tipo, y dado que éstas son cuadráticas en x e y (o lineales si es que la banana es una recta euclidiana), entonces uno podría esperar que dichas soluciones involucren raíces cuadradas provenientes de la ecuación cuadrática. Dado que para realizar cálculos que involucren al menos los elementos \bar{s}_i y \bar{k}_i utilizaremos el cuerpo de base $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, entonces la adición de la raíz cuadrada mencionada anteriormente podría obligarnos a extender dicho cuerpo. Pero en las superficies que estudiamos estos subradicandos resultan siempre ser cuadrados en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, y de esa manera es innecesario extenderlo.

iii) A pesar de que la ecuación 5.2 involucra una raíz en el lado derecho, sucede que el subradicando es un cuadrado en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ en todos los casos que hemos estudiado. De esta manera vemos que aquí tampoco es necesario realizar una nueva extensión de cuerpos.

iv) Para calcular los valores de $4H^2 \left(\frac{d_n}{2}\right)$ utilizaremos trigonometría hiperbólica sobre ciertos triángulos especiales de la teselación original para obtener $\cosh(d_n)$, que a través de las igualdades $\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x)+1}{2}$ y $\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ nos entregarán lo que queremos. Como los valores necesarios de d_n que requeriremos dependerán de cada superficie entonces este punto quedará más claro cuando analicemos posteriormente un ejemplo, que completará lo visto anteriormente para $N = 14$ en la verificación geométrica/numérica.

En resumen, con la expresión algebraica de la banana dada en la ecuación 5.2 podemos determinar las coordenadas exactas del candidato x , que según hemos visto están siempre dentro de $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, tal cual sucede con los coeficientes de las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} . Acabamos de terminar nuestro análisis del punto 4.

Ahora procederemos a estudiar el punto **3**, con el cual determinaremos algebraicamente O' . Para ello comencemos observando que todos los centros O' descritos en el capítulo anterior tienen la forma $(ca)^m ab(0)$, donde $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, o en algunos casos $O' = 0$. Dejando de lado este último caso podemos ver que la distancia euclidiana entre 0 y O' es siempre la misma, y gracias al Teorema 1.7 sabemos que viene dada por

$$d_e(0, O') = \frac{e^{dh(0, O')} - 1}{e^{dh(0, O')} + 1} = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1} = \frac{u_0^2 - 1}{u_0^2 + 1}.$$

De esta manera vemos que el módulo de O' siempre está en $\mathbb{Q}(u_0)$.

El argumento de $O' = (ca)^m ab(0)$ no es nada más que girar m veces un ángulo de $\frac{2\pi m}{N}$ en sentido antihorario y a partir de $ab(0)$. Como $ab(0)$ tiene argumento $\frac{3\pi}{2}$ entonces el argumento de O' es $\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi m}{N}$, y de esa manera

$$O' = |O'|e^{i \cdot \arg(O')} = \frac{u_0^2 - 1}{u_0^2 + 1} \cdot \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi m}{N} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi m}{N} \right) \right) \left($$

es decir

$$O' = \frac{u_0^2 - 1}{u_0^2 + 1} \cdot \left(\sin \left(\frac{2\pi m}{N} \right) \left(-i \cos \left(\frac{2\pi m}{N} \right) \right) \right) \left($$

Dado que tanto $\cos \left(\frac{2\pi m}{N} \right)$ como $\sin \left(\frac{2\pi m}{N} \right)$ son polinomios en $\cos \left(\frac{\pi}{N} \right)$ y $\sin \left(\frac{\pi}{N} \right)$, entonces tenemos que O' tiene ambas coordenadas en nuestro cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$. Con esto hemos terminado nuestro análisis del punto **3**.

Ahora estudiaremos el punto **2**, que nos permitirá determinar algebraicamente el punto medio M entre el candidato x y el centro O' . Para ello comenzaremos observando que la transformación $g(z) = \frac{iz - iO'}{iO'z - i} \in \text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ es una transformación elíptica de orden dos que permuta O' y 0 , entonces la preimagen por g del punto medio p de la geodésica que une $g(O') = 0$ y $g(x)$ nos dará el punto medio M entre O' y x (ver Figura 5.3).

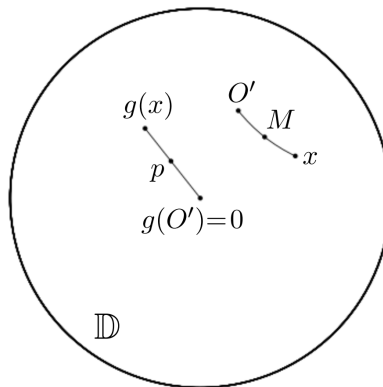


Figura 5.3: La transformación g permite determinar el punto medio M entre O' y x .

Como la distancia hiperbólica $d_h(0, g(x))$ es el doble que la distancia $d_h(0, p)$, entonces la relación entre $d_e(0, g(x)) = |g(x)|$ y $d_e(0, p) = |p|$ es

$$2 \ln \left(\frac{1 + |p|}{1 - |p|} \right) = \ln \left(\frac{1 + |g(x)|}{1 - |g(x)|} \right) \left($$

y si despejamos $|p|$ de lo anterior obtenemos

$$p = \frac{g(x)}{|g(x)|} |p| = \frac{g(x)}{|g(x)|} \frac{\sqrt{\frac{1+|g(x)|}{1-|g(x)|}} - 1}{\sqrt{\frac{1+|g(x)|}{1-|g(x)|}} + 1} = \frac{g(x)}{1 + \sqrt{1 - |g(x)|^2}}.$$

Finalmente podemos determinar M como

$$M = g(p) = \frac{p - O'}{p \cdot \overline{O'} - 1}$$

ya que $g^{-1}(p) = M = g(p)$ porque g tiene orden dos.

El único detalle a tener en cuenta es que en los cálculos anteriores hubo que determinar un punto p , que requirió tomar la raíz $\sqrt{1 - |g(x)|^2}$, y sucede que *en ninguna las superficies que hemos estudiado* dicho subradicando es un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$. Esto significa que siempre requeriremos una nueva extensión de cuerpos por el elemento

$$u_2 := \sqrt{1 - |g(x)|^2}.$$

Es en esta nueva extensión $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)$ en la que podemos trabajar con las coordenadas algebraicas del punto medio M , con lo cual finalizamos nuestro análisis de punto **2**.

Lo único que nos queda por verificar es el punto **1**, que se reduce a la búsqueda de la matriz en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ asociada a la rotación $R_{\pi, M}$ de orden dos con punto fijo $M \in \mathbb{D}$. Lo primero que hay que observar es que $R_{\pi, M}$ es la conjugación de R_{π} por f , donde R_{π} es la transformación elíptica de orden dos definida por $R_{\pi}(z) = -z$ y f es la transformación elíptica de orden dos definida por

$$f(z) = \frac{iz - iM}{i\overline{M}z - i},$$

que permuta M y el origen 0 .

Como las matrices asociadas a las transformaciones R_π y g son

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i}{1-|M|^2} & \frac{-iM}{1-|M|^2} \\ \frac{i\bar{M}}{1-|M|^2} & \frac{-i}{1-|M|^2} \end{pmatrix},$$

entonces la matriz asociada a $R_{\pi,M} = fR_\pi f^{-1}$ en $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ será

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{1-|M|^2} & \frac{-iM}{1-|M|^2} \\ \frac{i\bar{M}}{1-|M|^2} & \frac{-i}{1-|M|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{1-|M|^2} & \frac{-iM}{1-|M|^2} \\ \frac{i\bar{M}}{1-|M|^2} & \frac{-i}{1-|M|^2} \end{pmatrix}^{-1},$$

que es lo mismo que

$$\begin{pmatrix} \frac{i(1+|M|^2)}{1-|M|^2} & \frac{-2iM}{1-|M|^2} \\ \frac{2i\bar{M}}{1-|M|^2} & \frac{-i(1+|M|^2)}{1-|M|^2} \end{pmatrix}.$$

Si ahora trasladamos esta matriz a $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ como al inicio de este capítulo veremos que la matriz asociada a $\overline{R_{\pi,M}}$ será

$$\begin{pmatrix} \frac{-(M+\bar{M})}{1-|M|^2} & \frac{(1-iM)(1+i\bar{M})}{1-|M|^2} \\ \frac{(1+iM)(1-i\bar{M})}{1-|M|^2} & \frac{(M+\bar{M})}{1-|M|^2} \end{pmatrix},$$

con lo cual demostramos el punto 1 y acabamos esta demostración. ■

Recordemos que nuestra transformación τ es una rotación de orden dos en $\text{Aut}^\pm(\mathbb{D})$ y que fija el punto medio M entre el candidato x y el centro O' de la teselación original (ver el punto 7 del procedimiento del capítulo anterior). De esta manera gracias al Teorema 5.2 recién demostrado tenemos que las componentes de $\bar{\tau}$ viven en el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)$ (recuerde la definición de u_2 en el punto 2 de la demostración anterior), y como las componentes de \bar{s}_i y \bar{k}_i viven en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ entonces la verificación de los productos matriciales asociados a las igualdades $\tau s_i \tau^{-1} k_i = 1$ será un cálculo que debemos realizar en el espacio matricial

$$\text{PGL}(2, \mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)).$$

Esto nos permitirá realizar los cálculos de manera computacionalmente viable gracias al software SageMath, a través del procedimiento que expondremos a continuación, el cual le sugerimos al lector que complementa con la lectura de nuestro artículo [GR21b].

Procedimiento algebraico.

1. Definimos la extensión de cuerpos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(u_0)$ donde $u_0 = e^R$, y si $N \in \{10, 14\}$ volvemos a extender y obtenemos $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ donde $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$. (Esto nos permite definir las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} , que son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e^{-R} \\ e^R & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \end{pmatrix}$$

2. Definimos las matrices asociadas a cada sidepairing \bar{s}_i .
3. Determinamos las coordenadas algebraicas del candidato x como corte de la banana j_1 de un sidepairing s_{i_1} con la banana j_2 de un sidepairing s_{i_2} .
4. Definimos las coordenadas algebraicas de O' .
5. Definimos las coordenadas algebraicas de M en términos de x y de O' , y extendemos el cuerpo en el que trabajamos a $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)$ de acuerdo lo visto en el punto **2** de la demostración del Teorema 5.2.
6. Definimos la matriz asociada a $\bar{\tau}$ en términos de M .
7. Verificamos que el producto de las matrices asociadas a cada uno de los productos $\bar{\tau} \cdot \bar{s}_i \cdot \bar{\tau}^{-1} \cdot \bar{k}_i$ sea la matriz identidad de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

Podemos ejemplificar nuestro procedimiento anterior con el caso de $N = 14$, lo que nos permitirá concluir que la superficie obtenida de manera geométrico/numérica en el capítulo anterior para este valor de N tiene, en efecto, un 3-packing diferente del trivial. Hay que tener en cuenta que este procedimiento puede ser fácilmente adaptado, con menores modificaciones, para cualquiera de los demás valores de N requeridos, es decir, $N = 7, 8, 9, 10, 11$ y 16 . Comencemos.

1. Como $N = 14$ definiremos el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}\right)} \approx 4.2591$$

como la mayor solución real de su polinomio mínimo, que es

$$x^6 - 4x^5 - x^4 - x^2 - 4x + 1,$$

lo que significa que la extensión $\mathbb{Q}(u_0)$ tendrá grado 6 en \mathbb{Q} . Dado que

$$u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \notin \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{14}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0)$$

entonces extendemos nuevamente y obtenemos el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ de grado 12 en \mathbb{Q} .

2. Los sidepairings que definen nuestra superficie están en la Tabla 4.1. Al trasladarlos a \mathbb{H} y luego tomar sus matrices asociadas en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ obtenemos una lista de 18 matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$. Por ejemplo, las matrices asociadas a los sidepairings \bar{s}_2 y \bar{s}_{10} son respectivamente

$$\left(\begin{pmatrix} 2u_0^5 + \frac{31u_0^4}{4} + 3u_0^3 + \frac{u_0^2}{2} + u + \frac{31}{4} \\ -\frac{u_0^4}{8} + \frac{u_0^3}{4} + \frac{u_0^2}{4} + \frac{u_0}{4} - \frac{1}{8} \end{pmatrix} u_1 \begin{pmatrix} -\frac{7u_0^5}{2} + \frac{105u_0^4}{8} + \frac{27u_0^3}{4} + \frac{7u_0^2}{4} + \frac{17u_0}{4} + \frac{121}{8} \\ \left(-\frac{u_0^4}{4} + u_0^3 + \frac{u_0^2}{2} + u_0 - \frac{1}{4}\right) u_1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2u_0^5 - \frac{15u_0^4}{2} - 4u_0^3 - \frac{u_0^2}{2} - 2u_0 - 8 \\ -\frac{u_0^4}{8} + \frac{u_0^3}{2} + \frac{3u_0^2}{4} + \frac{3}{8} \end{pmatrix} u_1 \begin{pmatrix} \frac{5u_0^5}{2} - \frac{75u_0^4}{8} - 5u_0^3 - \frac{3u_0^2}{4} - 2u_0 - \frac{87}{8} \\ \left(-\frac{u_0^2}{2} + \frac{1}{2}\right) u_1 \end{pmatrix} \right).$$

3. El candidato $x \approx 0.5159 - 0.2484i$ que encontramos para nuestra superficie es la intersección de la banana 2 de s_2 con la banana 1 de s_{10} . Como ambos sidepairings son conformales entonces la ecuación 5.2 tiene en su lado derecho $4H^2 \left(\frac{d_n}{2}\right) \left(= \sinh^2\left(\frac{d_n}{2}\right)\right)$, y por lo tanto debemos calcular estos valores para d_1 y d_2 . Comenzaremos por d_1 .

Por la Figura 5.4 y el Teorema 1.4 tenemos que

$$\cosh(d_1) = \sinh^2(d_0) - \sinh^2(d_0) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{14}\right) \left(\quad \right) \quad (5.3)$$

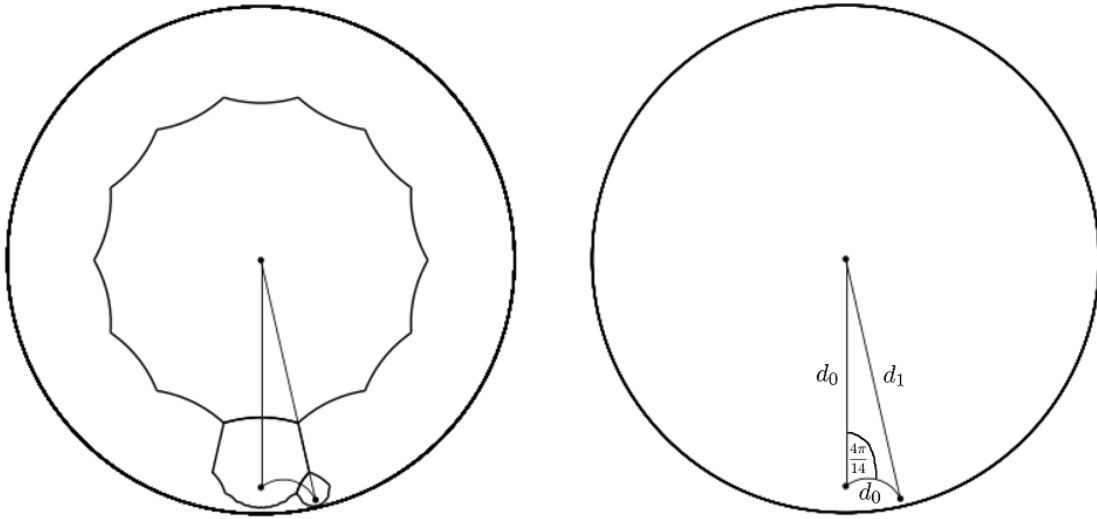


Figura 5.4: Determinando d_1 en términos de d_0 .

Como

$$\cosh(d_0) = \cosh(2R) = 2 \cosh^2(R) - 1 = 2 \left(\frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)} \right)^2 - 1$$

entonces si reemplazamos $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{u_0 + u_0^{-1}}$ tendremos

$$\cosh(d_0) = -2u_0^5 + \frac{15u_0^4}{2} + 4u_0^3 + u_0^2 + 2u_0 + \frac{17}{2}.$$

De esta manera

$$\sinh^2(d_0) = \cosh^2(d_0) - 1 = -18u_0^5 + 68u_0^4 + 34u_0^3 + 8u_0^2 + 20u_0 + 76.$$

Lo único que nos falta por dejar en términos de u_0 y u_1 en la ecuación 5.3 es $\cos\left(\frac{4\pi}{14}\right)$, (que podemos reescribir como

$$\cos\left(\frac{4\pi}{14}\right) = 8 \cos^4\left(\frac{\pi}{14}\right) \left(8 \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + 1 = 8u_1^4 - 8u_1^2 + 1, \right.$$

ya que $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) = u_1$.

Si reemplazamos los valores anteriores en la ecuación 5.3 obtendremos que

$$\cosh(d_1) = -7u_0^5 + \frac{53u_0^4}{2} + 13u_0^3 + 3u_0^2 + 8u_0 + \frac{59}{2}.$$

De esta manera el término trigonométrico que sale a la derecha de la ecuación 5.3 relativo al sidepairing conformal s_{10} será

$$\sinh^2\left(\frac{d_1}{2}\right) = \cosh^2\left(\frac{d_1}{2}\right) \left(1 = \frac{\cosh(d_1) + 1}{2} - 1, \right.$$

lo que significa que

$$\sinh^2\left(\frac{d_1}{2}\right) = -\frac{7u_0^5}{2} + \frac{53u_0^4}{4} + \frac{13u_0^3}{2} + \frac{3u_0^2}{2} + 4u_0 + \frac{57}{4}.$$

Si denotamos por $\begin{pmatrix} A_{10} & B_{10} \\ C_{10} & D_{10} \end{pmatrix}$ (la matriz asociada a $\overline{s_{10}}$ entonces el lado derecho de la ecuación de la banana que estamos estudiando será

$$(1 - x^2 - y^2) \sqrt{4 \sinh^2\left(\frac{d_1}{2}\right) \left((A_{10} + D_{10})^2 + 4. \right)}$$

Como ya comentamos en la descripción general del procedimiento algebraico sucede que el subradicando que va a la derecha es siempre un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, y en este caso particular tenemos

$$(1 - x^2 - y^2) \left(\frac{u_0^5}{2} - \frac{7u_0^4}{4} - \frac{3u_0^3}{2} - \frac{u_0^2}{2} - \frac{7}{4} \right).$$

Para finalizar la ecuación de la banana para el sidepairing s_{10} observemos que su lado izquierdo es $|(B_{10} - C_{10})(1 + x^2 + y^2) + 2(x(A_{10} - D_{10}) - y(B_{10} + C_{10}))|$ donde

$$\begin{aligned} B_{10} - C_{10} &= \frac{5u_0^5}{2} - \frac{37u_0^4}{4} - \frac{11u_0^3}{2} - \frac{3u_0^2}{2} - 2u_0 - \frac{45}{4}, \\ A_{10} - D_{10} &= \left(2u_0^5 - \frac{15u_0^4}{2} - 4u_0^3 - 2u_0 - \frac{17}{2} \right) u_1, \\ B_{10} + C_{10} &= \frac{5u_0^5}{2} - \frac{19u_0^4}{2} - \frac{9u_0^3}{2} - 2u_0 - \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Estamos listos con la banana del sidepairing s_{10} .

Ahora podemos utilizar un razonamiento análogo al anterior para determinar la ecuación de la banana 2 del sidepairing s_2 , y para ello comenzaremos observando que gracias a la Figura 5.5 tenemos

$$\cosh(d_2) = \cosh^2(d_0) - \sinh^2(d_0) \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{14}\right)$$

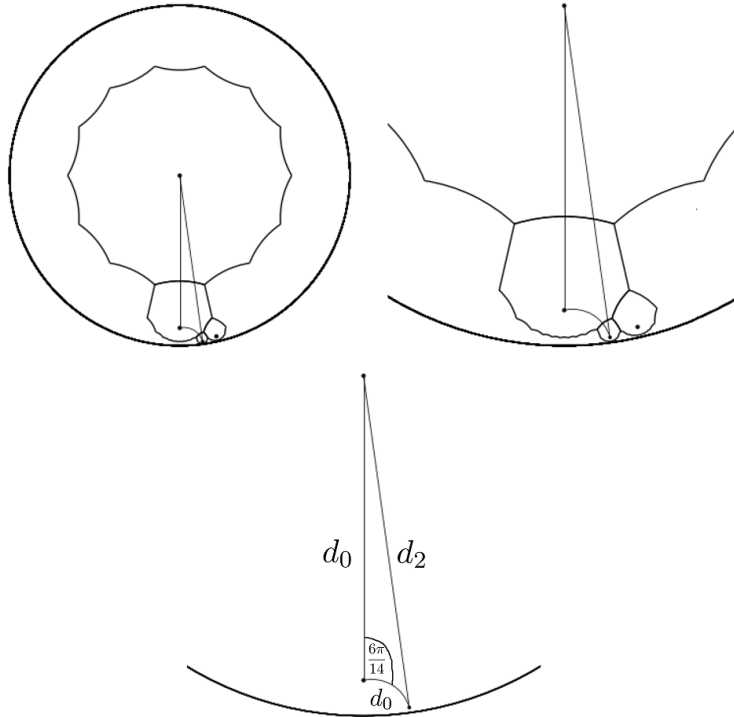


Figura 5.5: Determinando d_2 en términos de d_0 .

Como ya tenemos $\cosh^2(d_0)$ y $\sinh^2(d_0)$ en términos de u_0 y u_1 entonces solo nos falta estudiar la expresión $\cos\left(\frac{6\pi}{14}\right)$. Así es como tenemos

$$\cos\left(\frac{6\pi}{14}\right) = 32 \cos^6\left(\frac{\pi}{14}\right) - 48 \cos^4\left(\frac{\pi}{14}\right) + 18 \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) - 1 = 32u_1^6 - 48u_1^4 + 18u_1^2 - 1.$$

Tal cual hicimos para s_{10} obtenemos que

$$\sinh^2\left(\frac{d_2}{2}\right) = \frac{\cosh(d_2) + 1}{2} - 1 = -7u_0^5 + \frac{53u_0^4}{2} + 13u_0^3 + 3u_0^2 + 8u_0 + \frac{59}{2}.$$

Continuando con nuestros cálculos llegamos a que el lado derecho de la ecuación de la banana 2 de s_2 es

$$(1 - x^2 - y^2) \left(\frac{3u_0^5}{2} - \frac{23u_0^4}{4} - \frac{5u_0^3}{2} - \frac{u_0^2}{2} - 2u_0 - \frac{31}{4} \right),$$

y el lado izquierdo es $|(B_2 - C_2)(1 + x^2 + y^2) + 2(x(A_2 - D_2) - y(B_2 + C_2))|$ donde

$$\begin{aligned} B_2 - C_2 &= -\frac{7u_0^5}{2} + \frac{53u_0^4}{4} + \frac{13u_0^3}{2} + \frac{3u_0^2}{2} + 4u_0 + \frac{61}{4}, \\ A_2 - D_2 &= (-2u_0^5 + 8u_0^4 + 2u_0^3 + 8)u_1, \\ B_2 + C_2 &= -\frac{7u_0^5}{2} + 13u_0^4 + 7u_0^3 + 2u_0^2 + \frac{9u_0}{2} + 15. \end{aligned}$$

Ahora que tenemos las ecuaciones de ambas bananas debemos decidir cuáles arcos generalizados de círculo son los que se intersectan en nuestro candidato

$$x \approx 0.5159 - 0.2484i$$

Como el valor absoluto de la ecuación 5.2 de la banana nos entrega una curva a cada lado del eje, entonces debemos ser capaces de decidir si tomamos el valor positivo o negativo de la expresión que va dentro del valor absoluto en cada caso, lo cual se reduce a decidir los valores de $N_1, N_2 \in \{\pm 1\}$ en el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} N_1 \left((B_2 - C_2)(1 + x^2 + y^2) + 2(x(A_2 - D_2) - y(B_2 + C_2)) \right) &= (1 - x^2 - y^2) \sqrt{4 \sinh^2\left(\frac{d_2}{2}\right) - (A_2 + D_2)^2 + 4}, \\ N_2 \left((B_{10} - C_{10})(1 + x^2 + y^2) + 2(x(A_{10} - D_{10}) - y(B_{10} + C_{10})) \right) &= (1 - x^2 - y^2) \sqrt{4 \sinh^2\left(\frac{d_1}{2}\right) - (A_{10} + D_{10})^2 + 4}. \end{aligned}$$

Por ello realizamos la Figura 5.6 en SageMath que nos muestra los cuatro arcos junto al punto x , con lo cual visualmente podemos saber los valores buscados de N_1 y N_2 . En este dibujo el arco asociado a $N_i = 1$ va con una línea sólida, mientras que si $N_i = -1$ entonces va con una línea punteada. El par de bananas del sidepairing s_2 lo dibujamos con una línea gruesa mientras que el par del sidepairing s_{10} lo dibujamos con una línea delgada.

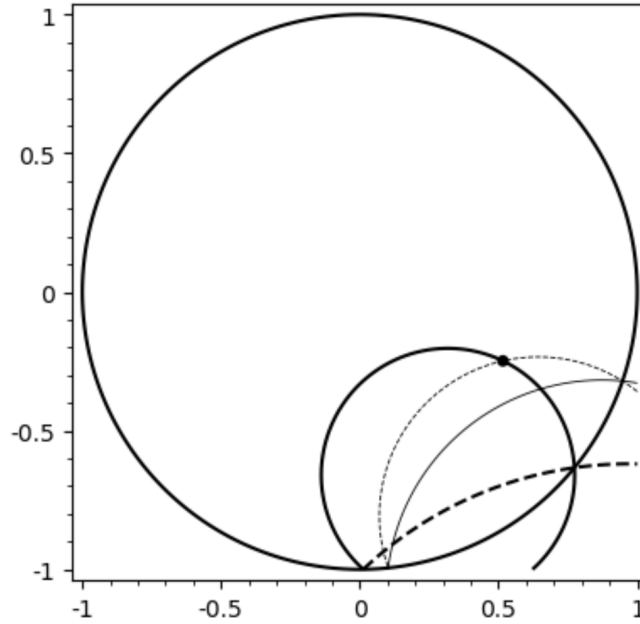


Figura 5.6: Los cuatro arcos de círculo generalizado que resultan de las bananas de los sidepairings s_2 y s_{10} . Solo dos de ellos se cortan en el candidato $x \approx 0.5159 - 0.2484i$.

Aquí podemos ver claramente que $N_1 = 1$ y $N_2 = -1$, por lo que podemos resolver directamente el sistema de ecuaciones cuadráticas para x e y . Como destacamos en la observación **ii** del punto **4** de la demostración del Teorema 5.2, en principio sería posible que al resolver este sistema cuadrático resulten raíces fuera del cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$, pero esto no sucede nunca en las superficies que estudiamos en este trabajo. En particular en esta superficie para $N = 14$ obtenemos que al resolver para la coordenada x de x en el sistema obtenemos una ecuación cuadrática con discriminante

$$-664u_0^5 + 2516u_0^4 + 1224u_0^3 + 280u_0^2 + 768u_0 + 2788,$$

que es un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ cuya raíz es

$$(-12u_0^5 + 44u_0^4 + 28u_0^3 + 16u_0 + 52)u_1.$$

La solución para la coordenada x de x será entonces

$$\left(\frac{5u_0^5}{28} - \frac{11u_0^4}{14} + \frac{3u_0^2}{7} + \frac{11u_0}{28} - \frac{9}{14} \right) u_1 \approx 0.5159,$$

y la solución para la coordenada y será

$$-\frac{u_0^4}{8} + \frac{u_0^3}{2} + \frac{u_0}{2} + \frac{1}{8} \approx -0.2484.$$

4. Recordemos que $O' = (ca)^2 ab(0)$, por lo que tendremos que

$$O' = \frac{u_0^2 - 1}{u_0^2 + 1} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot 2}{14}\right) \left(-i \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2}{14}\right) \right) \right) \left($$

y como

$$\cos\left(\frac{4\pi}{14}\right) = 8 \cos^4\left(\frac{\pi}{14}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + 1 = 8u_1^4 - 8u_1^2 + 1,$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{14}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{14}\right) \right) = \left(-\frac{u_0^5}{2} + \frac{7u_0^4}{4} + \frac{3u_0^3}{2} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{3}{4} \right) u_1,$$

entonces la coordenada x de O' será

$$\left(\frac{u_0^4}{4} - \frac{u_0^3}{2} - 2u_0^2 - \frac{3u_0}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(u_1 \approx 0.7001, \right.$$

y su coordenada y será

$$-\frac{u_0^5}{8} + \frac{u_0^4}{2} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{u_0}{8} + \frac{1}{2} \approx -0.5583.$$

5. Para calcular el punto medio M entre el candidato x y el centro O' comenzamos definiendo la transformación elíptica de orden dos dada por $g(z) = \frac{iz - iO'}{iO'z - i}$. Con esta g definimos el punto p como

$$p = \frac{g(x)}{1 + \sqrt{1 - |g(x)|^2}}.$$

Como ya hemos mencionado el subradicando del denominador de p nunca es un cuadrado en $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ en ninguna de las superficies que estudiamos en este trabajo, y en particular tampoco lo es para nuestro caso $N = 14$. Por ello extendemos el cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ por el elemento

$$u_2 = \sqrt{1 - |g(x)|^2} = \sqrt{u_0^5 - 4u_0^4 - u_0^3 - 2u_0 + 1},$$

obteniendo un cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)$ sobre el cual podemos definir las coordenadas del punto M .

Como $M = g(p)$ entonces necesitamos primero las coordenadas x e y de p , que son respectivamente

$$\left(\left(\frac{u_0^5}{4} + u_0^4 + \frac{u_0^3}{4} + 1 \right) u_1 u_2 + \left(\frac{u_0^5}{4} - u_0^4 - \frac{u_0^3}{4} - 1 \right) u_1, \right. \\ \left. \left(\frac{3u_0^5}{16} - \frac{5u_0^4}{8} - \frac{5u_0^3}{8} - \frac{u_0^2}{4} - \frac{9u_0}{16} - \frac{7}{8} \right) \left(u_2 - \frac{3u_0^5}{16} + \frac{5u_0^4}{8} + \frac{5u_0^3}{8} + \frac{u_0^2}{4} + \frac{9u_0}{16} + \frac{7}{8} \right) \right.$$

De esta manera $M = g(p)$ será tendrá como coordenadas x e y los valores

$$\begin{aligned} & -\frac{17u^5}{254} + \frac{29u^4}{127} + \frac{41u^3}{127} - \frac{50u^2}{127} + \frac{15u}{254} + \frac{39}{127} \Big) u_1 u_2 + \frac{20u^5}{127} - \frac{129u^4}{254} - \frac{89u^3}{127} + \frac{28u^2}{127} - \frac{55u}{127} - \frac{191}{254} \Big) \left(u_1 \approx 0.6197, \right. \\ & \left. \frac{19u_0^5}{254} - \frac{167u_0^4}{508} - \frac{u_0^3}{127} + \frac{26u_0^2}{127} + \frac{43u_0}{254} - \frac{137}{508} \right) \left(u_2 - \frac{67u_0^5}{508} + \frac{251u_0^4}{508} + \frac{57u_0^3}{254} + \frac{21u_0^2}{127} + \frac{89u_0}{508} + \frac{285}{508} \approx -0.4592. \right. \end{aligned}$$

6. La matriz asociada a $\bar{\tau}$ es $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(-\frac{25u_0^5}{26} + \frac{47u_0^4}{13} + \frac{22u_0^3}{13} + \frac{10u_0^2}{13} + \frac{29u_0}{26} + \frac{53}{13} \right) u_1 u_2, \\ \tau_2 &= \left(-\frac{97u_0^5}{52} + \frac{181u_0^4}{26} + \frac{97u_0^3}{26} + \frac{29u_0^2}{26} + \frac{115u_0}{52} + \frac{105}{13} \right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{27u_0^5}{52} - 2u_0^4 - \frac{25u_0^3}{26} - \frac{u_0^2}{26} - \frac{u_0}{4} - \frac{59}{26} \right) u_2. \end{aligned}$$

7. Finalmente solo nos queda verificar que los productos matriciales correspondientes a cada uno de los productos $\tau s_i \tau^{-1} k_i$ de la Tabla 4.9 nos dan la matriz identidad de

$$\text{PGL}(2, \mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2)).$$

Este cálculo consiste en simplemente ingresar las matrices en SageMath como elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2))$ para luego multiplicarlas y obtener alguna de las dos matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que sabemos que representan la misma matriz identidad en $\text{PGL}(2, \mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2))$. Todos los detalles de estos cálculos matriciales, así como también los de los realizados en los puntos anteriores, pueden ser consultados en los ficheros adjuntos en el sitio web [Gir21]. De esta manera hemos finalizado de manera incontestable la condición suficiente en el Teorema 3.17 para el caso $N = 14$.

Para conseguir demostrar la suficiencia del caso no-orientable del Teorema 3.17 en su totalidad necesitamos aplicar de manera exitosa el procedimiento recién descrito a cada una de las superficies restantes que hallamos en la sección anterior, y eso es precisamente lo que mostraremos al final de este capítulo, donde dejamos claro en cada caso cuál es la extensión específica de \mathbb{Q} en que consideraremos las entradas de las matrices, así como también las matrices asociadas a las $\bar{\tau}$ correspondientes. Los cálculos a realizar con dichas matrices están en los ficheros de la página web [Gir21].

Antes de pasar a la exposición de los datos algebraicos de las seis superficies restantes nos gustaría agregar un resultado que es consecuencia de lo que hemos expuesto en el procedimiento algebraico, y que consideramos digno de ser resaltado:

Teorema 5.3. *Si una superficie k -extremal admite más de un k -packing extremal para el mismo valor de k , entonces existe una configuración geométrica de teselaciones superpuestas en \mathbb{D} asociadas a los k -packings extremales de la superficie tal que todos los centros de todas esas teselaciones tienen sus coordenadas en una extensión finita de \mathbb{Q} . De hecho el grado de dicha extensión no puede ser mayor que 320.*

Demostración. Consideremos un dominio fundamental de la superficie k -extremal (no necesariamente primitiva ni tampoco necesariamente asociada a los 7 valores de N trabajados en este capítulo) dado por k N -ángulos regulares, con uno de ellos centrado en el origen como hicimos en el procedimiento geométrico/numérico de la sección anterior. Sabemos por el Lema 4.1 que cualquier centro de una nueva teselación debe trasladarse una *distancia admisible* d_n por cada uno de los sidepairings que definen el grupo uniformizador de la superficie, y por lo tanto es necesario que tanto dicho centro pertenezca a una banana de cada uno de los sidepairings.

Por todo lo que hemos visto en el procedimiento algebraico sabemos que las coordenadas de la intersección de dos bananas dependen del cuerpo en el que vivan las componentes de la matriz $\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}$ (asociada al sidepairing \bar{s}_i , así como también dependen de una serie de raíces cuadradas que podrían surgir de los cálculos en los puntos 1, 3, 4 y 5 de nuestro procedimiento algebraico. Analicemos cada uno de ellos.

Si comenzamos con la extensión $\mathbb{Q}(u_0)$ entonces por el punto 1 nos podríamos ver en la situación de realizar una extensión por el elemento $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$. Por el punto 3 nos podemos ver en la situación de extender por la raíz cuadrada que sale a la derecha de la ecuación de la banana, así como luego al resolver el sistema cuadrático en x e y . En el punto 4 nos podríamos ver en la situación de que el centro O' que consideremos no sea de la forma $(ca)^m ab(0)$, pero en cualquier caso sería, por definición, un elemento de la forma $\gamma(0)$ con $\gamma \in K$. Si la matriz asociada a $\bar{\gamma}$ en $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ es $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}$ (entonces en dicho caso tendríamos que O' será el número complejo

$$\gamma(0) = \frac{\gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2}{\gamma_3 \cdot 0 + \gamma_4} = \frac{\gamma_2}{\gamma_4},$$

y como $\gamma_i \in \mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ entonces O' también estará en dicho cuerpo y no requeriremos una nueva extensión aquí. Finalmente en el punto 5 requerimos un cálculo de raíz al calcular $\sqrt{1 - |g(x)|^2}$, y esto podría requerir que realicemos una extensión de grado 2 del cuerpo en el que estemos trabajando.

Como cada una de dichas raíces nos exigen realizar una extensión de grado 1 o 2 (dependiendo si la raíz está o no en el cuerpo previo, respectivamente), y como en total son cuatro raíces que aparecen en el proceso, entonces en el peor de los casos necesitamos extender $\mathbb{Q}(u_0)$ un total de cuatro veces, generando una extensión a partir de $\mathbb{Q}(u_0)$ de grado a lo más $2^4 = 16$.

Lo único que nos faltaría determinar es el valor de $[\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}]$ para cada valor de $N \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}$. Para ello tenemos que recordar que cuando vimos que e^R es un número algebraico observamos que lo era porque cumplía la ecuación cuadrática con coeficientes algebraicos dada por

$$\left(e^R \right)^2 + e^R \cdot \frac{-1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} + 1 = 0,$$

cuya solución es

$$e^R = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}.$$

Ingresando este valor en SageMath y pidiéndole su polinomio mínimo podemos obtener que las parejas buscadas $(N, [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}])$ son las siguientes

$(7, 12), (8, 8), (9, 12), (10, 4), (11, 20), (12, 8), (14, 6), (16, 16), (18, 6), (24, 16), (30, 8)$.

Esto nos indica que si emparejamos cada valor de N con el grado máximo posible $i_N = 16[\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}]$ requerido para poder realizar el procedimiento algebraico *en cualquier superficie que admita más de un k -packing extremal* obtendremos las parejas (N, i_N) siguientes

$(7, 192), (8, 128), (9, 192), (10, 64), (11, 320), (12, 128), (14, 96), (16, 256), (18, 96), (24, 196), (30, 128)$.

El mayor grado de entre los valores anteriores es 320, que solamente podría ser alcanzado en el caso de $N = 11$. ■

Caso N=7. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{7})}\right)} \approx 1.7250$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^{12} - 2x^{10} - x^8 - \frac{36x^6}{7} - x^4 - 2x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \emptyset & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{7u_0^8}{16} + \frac{7u_0^6}{8} + \frac{7u_0^4}{8} + \frac{11u_0^2}{8} + \frac{5}{16}\right) & -\frac{7u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{7u_0^7}{32} + \frac{25u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{57u_0}{64} \\ -\frac{7u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{7u_0^7}{32} + \frac{25u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{57u_0}{64} & -\frac{7u_0^8}{16} + \frac{7u_0^6}{8} + \frac{7u_0^4}{8} + \frac{11u_0^2}{8} + \frac{5}{16} \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{49u_0^{10}}{4} - \frac{133u_0^8}{4} + \frac{21u_0^6}{4} - \frac{91u_0^4}{2} + 3u_0^2 + \frac{21}{4}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 12 = 24.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\left(\frac{775u_0^{11}}{5312} - \frac{927u_0^9}{5312} - \frac{1105u_0^7}{2656} - \frac{15469u_0^5}{18592} - \frac{2789u_0^3}{5312} - \frac{1483u_0}{5312}\right)u_2, \\ \tau_2 &= \left(-\frac{731u_0^{10}}{5312} + \frac{1707u_0^8}{5312} + \frac{383u_0^6}{2656} + \frac{9875u_0^4}{18592} + \frac{1277u_0^2}{5312} + \frac{1579}{5312}\right)u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{3045u_0^{10}}{5312} - \frac{5733u_0^8}{5312} - \frac{1617u_0^6}{2656} - \frac{8411u_0^4}{2656} - \frac{6627u_0^2}{5312} - \frac{9509}{5312}\right)u_2. \end{aligned}$$

Caso N=8. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)} \approx 2.1474$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^8 - 4x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} son

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & - \begin{pmatrix} \frac{3u_0^7}{8} + \frac{11u_0^5}{8} + \frac{11u_0^3}{8} + \frac{13u_0}{8} \\ \frac{u_0^7}{8} + \frac{5u_0^5}{8} - \frac{3u_0^3}{8} + \frac{7u_0}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{u_0^7}{8} + \frac{5u_0^5}{8} - \frac{3u_0^3}{8} + \frac{7u_0}{8} \\ -\frac{3u_0^7}{8} + \frac{11u_0^5}{8} + \frac{11u_0^3}{8} + \frac{13u_0}{8} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{17u_0^6}{2} - 22u_0^4 - \frac{33u_0^2}{2} + 5\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 8 = 16.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - \left(\frac{17u_0^6}{56} - \frac{59u_0^4}{56} - \frac{53u_0^2}{56} - \frac{11}{8} \right) u_2, \\ \tau_2 &= \left(-\frac{17u_0^6}{56} + \frac{69u_0^4}{56} + \frac{57u_0^2}{56} + \frac{87}{56} \right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{27u_0^6}{56} - \frac{107u_0^4}{56} - \frac{75u_0^2}{56} - \frac{129}{56} \right) u_2. \end{aligned}$$

Caso N=9. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{9})}\right)} \approx 2.5282$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^{12} - 6x^{10} - x^8 - \frac{28x^6}{3} - x^4 - 6x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \emptyset & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{3u_0^{10}}{16} + \frac{33u_0^8}{32} + \frac{3u_0^6}{4} + \frac{31u_0^4}{16} + \frac{11u_0^2}{16} + \frac{25}{32}\right) & -\frac{3u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{9u_0^7}{32} + \frac{23u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{61u_0}{64} \\ -\frac{3u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{9u_0^7}{32} + \frac{23u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{61u_0}{64} & -\frac{3u_0^{10}}{16} + \frac{33u_0^8}{32} + \frac{3u_0^6}{4} + \frac{31u_0^4}{16} + \frac{11u_0^2}{16} + \frac{25}{32} \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\frac{9u_0^{10}}{4} - \frac{33u_0^8}{4} - \frac{135u_0^6}{4} - \frac{63u_0^4}{2} - 22u_0^2 + \frac{21}{4}} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 12 = 24.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\tau_1 = -\left(\frac{1453u_0^{11}}{1088} - \frac{8385u_0^9}{1088} - \frac{1727u_0^7}{544} - \frac{20819u_0^5}{1632} - \frac{4207u_0^3}{1088} - \frac{9565u_0}{1088}\right)u_2,$$

$$\tau_2 = \left(-\frac{93u_0^{10}}{272} + \frac{1113u_0^8}{544} + \frac{105u_0^6}{272} + \frac{55u_0^4}{17} + \frac{53u_0^2}{68} + \frac{1127}{544}\right)u_2,$$

$$\tau_3 = \left(\frac{279u_0^{10}}{272} - \frac{3291u_0^8}{544} - \frac{447u_0^6}{272} - \frac{39u_0^4}{4} - \frac{79u_0^2}{34} - \frac{3469}{544}\right)u_2.$$

Caso N=10. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)} \approx 2.8901$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Recordemos que aquí sí que es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \notin \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} vistas en el nuevo cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1 & -\frac{u_0^3}{4} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{3u_0}{4} \\ -\frac{u_0^3}{4} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{3u_0}{4} & u_1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{4u_0^3}{5} - \frac{8u_0^2}{5} - \frac{12u_0}{5} + \frac{6}{5}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0)(u_1).$$

En estas condiciones tenemos que

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}] &= [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)(u_1)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0)(u_1) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16. \end{aligned}$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\left(\frac{u_0^3}{2} - \frac{3u_0^2}{4} - u_0 - \frac{5}{4}\right) u_1 u_2, \\ \tau_2 &= \left(\frac{9u_0^3}{8} + \frac{17u_0^2}{8} + \frac{23u_0}{8} + \frac{23}{8}\right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{3u_0^3}{8} - \frac{7u_0^2}{8} - \frac{13u_0}{8} - \frac{9}{8}\right) u_2. \end{aligned}$$

Caso N=11. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\right)} \approx 3.2409$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^{20} - 10x^{18} - 3x^{16} - 24x^{14} + 2x^{12} - \frac{276x^{10}}{11} + 2x^8 - 24x^6 - 3x^4 - 10x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} vistas en el nuevo cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{01} & c_{00} \end{pmatrix}$$

donde c_{00} y c_{01} son

$$\begin{aligned} c_{00} &= -\frac{11u_0^{18}}{32} + \frac{913u_0^{16}}{256} - \frac{11u_0^{14}}{128} + \frac{187u_0^{12}}{32} - \frac{165u_0^{10}}{128} + \frac{763u_0^8}{128} + \frac{59u_0^6}{128} + \frac{137u_0^4}{32} + \frac{97u_0^2}{128} + \frac{217}{256}, \\ c_{01} &= -\frac{11u_0^{19}}{1024} + \frac{121u_0^{17}}{1024} - \frac{11u_0^{15}}{128} + \frac{11u_0^{13}}{32} - \frac{187u_0^{11}}{512} + \frac{325u_0^9}{512} - \frac{21u_0^7}{32} + \frac{117u_0^5}{128} - \frac{903u_0^3}{1024} + \frac{1013u_0}{1024}. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{55u_0^{18}}{32} + \frac{2585u_0^{16}}{128} - \frac{737u_0^{14}}{32} + \frac{341u_0^{12}}{32} - \frac{1749u_0^{10}}{32} + \frac{923u_0^8}{64} - \frac{1271u_0^6}{32} + \frac{77u_0^4}{32} - \frac{183u_0^2}{8} + \frac{297}{128}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 20 = 40.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1981u_0^{19}}{2048} + \frac{20437u_0^{17}}{2048} - \frac{u_0^{15}}{256} + \frac{81u_0^{13}}{4} - \frac{4709u_0^{11}}{1024} + \frac{228003u_0^9}{11264} - \frac{95u_0^7}{64} + \frac{4321u_0^5}{256} + \frac{5231u_0^3}{2048} + \frac{10641u_0}{2048} \Big) u_2, \\ \tau_2 &= -\frac{1197u_0^{18}}{2048} + \frac{11937u_0^{16}}{2048} + \frac{1071u_0^{14}}{512} + \frac{6203u_0^{12}}{512} + \frac{541u_0^{10}}{1024} + \frac{130217u_0^8}{11264} + \frac{835u_0^6}{512} + \frac{5587u_0^4}{512} + \frac{6827u_0^2}{2048} + \frac{8689}{2048} \Big) u_2, \\ \tau_3 &= \frac{979u_0^{18}}{2048} - \frac{9999u_0^{16}}{2048} - \frac{297u_0^{14}}{512} - \frac{4741u_0^{12}}{512} + \frac{1485u_0^{10}}{1024} - \frac{8949u_0^8}{1024} - \frac{229u_0^6}{512} - \frac{3757u_0^4}{512} - \frac{3893u_0^2}{2048} - \frac{4159}{2048} \Big) u_2. \end{aligned}$$

Caso N=16. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}\right)} \approx 4.9226$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^{16} - 24x^{14} - 4x^{12} - 40x^{10} + 6x^8 - 40x^6 - 4x^4 - 24x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} vistas en el nuevo cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \emptyset & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{01} & c_{00} \end{pmatrix}$$

donde c_{00} y c_{01} son

$$c_{00} = -\frac{27u_0^{15}}{128} + \frac{651u_0^{13}}{128} + \frac{33u_0^{11}}{128} + \frac{1135u_0^9}{128} - \frac{145u_0^7}{128} + \frac{1121u_0^5}{128} + \frac{75u_0^3}{128} + \frac{613u_0}{128},$$

$$c_{01} = -\frac{u_0^{15}}{128} + \frac{25u_0^{13}}{128} - \frac{21u_0^{11}}{128} + \frac{61u_0^9}{128} - \frac{67u_0^7}{128} + \frac{107u_0^5}{128} - \frac{103u_0^3}{128} + \frac{127u_0}{128}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento anterior llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{55u_0^{18}}{32} + \frac{2585u_0^{16}}{128} - \frac{737u_0^{14}}{32} + \frac{341u_0^{12}}{32} - \frac{1749u_0^{10}}{32} + \frac{923u_0^8}{64} - \frac{1271u_0^6}{32} + \frac{77u_0^4}{32} - \frac{183u_0^2}{8} + \frac{297}{128}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 20 = 40.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\tau_1 = -\left(-\frac{39u_0^{14}}{3008} + \frac{937u_0^{12}}{3008} + \frac{165u_0^{10}}{3008} + \frac{753u_0^8}{3008} - \frac{109u_0^6}{3008} - \frac{501u_0^4}{3008} + \frac{559u_0^2}{3008} - \frac{421}{3008}\right)u_2,$$

$$\tau_2 = \left(-\frac{97u_0^{14}}{188} + \frac{18605u_0^{12}}{1504} + \frac{1755u_0^{10}}{752} + \frac{32353u_0^8}{1504} - \frac{571u_0^6}{188} + \frac{32355u_0^4}{1504} + \frac{1493u_0^2}{752} + \frac{20047}{1504}\right)u_2,$$

$$\tau_3 = \left(\frac{15u_0^{14}}{752} - \frac{759u_0^{12}}{1504} + \frac{26u_0^{10}}{47} - \frac{1391u_0^8}{1504} + \frac{369u_0^6}{752} - \frac{1041u_0^4}{1504} - \frac{2u_0^2}{47} - \frac{7}{32}\right)u_2$$

Realizando los cálculos indicados podemos acabar, finalmente, nuestra demostración del caso no-orientable del Teorema 3.17.

Capítulo 6

El caso orientable y el caso plano

6.1 El caso orientable

En los dos capítulos anteriores nos dedicamos a demostrar la suficiencia del caso no-orientable del Teorema 3.17, la cual consistió en construir explícitamente un conjunto de siete superficies k -extremales *no-orientables* que admiten más de un k -packing extremal. Lo interesante de abordar primero el caso no-orientable es que, como bien veremos a continuación, aquello nos permite hallar de una manera natural ejemplos de superficies k -extremales *orientables* que también admiten más de un k -packing extremal. Esto nos será de gran ayuda para conseguir la única parte de la demostración del Teorema 3.17 que nos falta: la suficiencia en el caso orientable, que era una pregunta que Girondo dejó abierta en su artículo [Gir18]. Separaremos dicha demostración en los siguientes puntos:

1. Definiremos el concepto de superficie primitiva para el caso de superficies k -extremales *orientables*.
2. Demostraremos que si somos capaces de encontrar ejemplos de superficies k -extremales orientables *primitivas* con más de un k -packing extremal entonces podríamos obtener ejemplos de superficies k' -extremales orientables de género g' que también tengan más de un k' -packing extremal *para todos los pares (g', k') requeridos en el Teorema 3.17*.
3. A través del subgrupo Fuchsiano canónico podremos construir ejemplos de superficies k -extremales orientables primitivas con más de un k -packing extremal para $N \in \{7, 8, 9, 11, 12, 16, 24\}$. Los casos de $N \in \{18, 30\}$ están en la literatura.
4. Utilizaremos los procedimientos geométrico/numérico y algebraico para construir ejemplos de superficies k -extremales orientables primitivas con más de un k -packing extremal para los casos restantes de $N \in \{10, 14\}$.

Para el punto **1** observemos que la existencia de una superficie k -extremal orientable de género g se traduce en una inclusión de su grupo uniformizador en un grupo triangular Fuchsiano $\Delta\left(2, 3, 6 + \frac{12(g-1)}{k}\right)$. (De esta manera la ecuación asociada a los pares (g, k) en el caso orientable será $N = 6 + \frac{12(g-1)}{k}$, que es lo mismo que decir $k(N-6) = 12(g-1)$).

Siguiendo la misma idea del caso no-orientable que vimos en el punto **2** de la demostración del Teorema 3.6, aquí tendremos que el menor valor de k tal que el par (g, k) cumpla la ecuación anterior para un N dado será el número $k_0 = \frac{12}{\gcd(12, N-6)}$.

Si llamamos g_0 al valor del género g asociado a k_0 entonces definiremos como par primitivo orientable asociado a N al par (g_0, k_0) . Por las mismas razones que en el caso no-orientable tendremos que k_0 dividirá a k para cualquier par (g, k) que cumpla la ecuación $k(N-6) = 12(g-1)$.

De esta manera vemos que los pares primitivos orientables asociados a los valores que nos indica el Teorema 3.17 serán los dados en la Tabla 6.1 a continuación.

N	Par prim. ori.	N	Par prim. ori.
7	(2, 12)	14	(3, 3)
8	(2, 6)	16	(6, 6)
9	(2, 4)	18	(2, 1)
10	(2, 3)	24	(4, 2)
11	(6, 12)	30	(3, 1)
12	(2, 2)		

Tabla 6.1: Pares (g, k) primitivos orientables para cada valor de N de la lista en el Teorema 3.17.

Para ver el punto **2** notemos que si K_N es un grupo Fuchsiano que uniformiza una superficie de Riemann k -extremal *primitiva* con más de un k -packing extremal, entonces K_N estará contenido en más de un grupo triangular Fuchsiano de la forma $\Delta(2, 3, N)$. De esta manera cualquier subgrupo de K_N estará a su vez contenido en cada uno de esos grupos de la forma $\Delta(2, 3, N)$, por lo cual si la superficie primitiva uniformizada por K_N admite dos o más k -packings extremales entonces sus subgrupos uniformizarán superficies k -extremales que también admiten dos o más k -packings extremales.

Lo interesante de esto es que, tal como vimos en el punto **2** de la demostración del Teorema 3.6, si fijamos el valor de N entonces cualquier par (g, k) que cumpla la ecuación $k(N-6) = 12(g-1)$ tendrá que su coordenada k será divisible por $k_0 = \frac{12}{\gcd(12, N-6)}$, y de esa manera podemos construir superficies asociadas a cualquier par (g, k) tomando subgrupos adecuados de los grupos primitivos K_N . Este proceso de conseguir los subgrupos de K_N para cada índice posible es precisamente el contenido del Lema 3.14.

Para ver el punto **3** lo que haremos será construir ejemplos de superficies orientables primitivas con más de un k -packing a partir de las superficies no-orientables que hemos hallado en las secciones anteriores, y realizaremos ese trabajo a través del subgrupo Fuchsiano canónico de estas últimas. Recordemos que si K es un grupo NEC que uniformiza una superficie no-orientable, entonces su subgrupo Fuchsiano canónico K^+ cumplirá que $[K : K^+] = 2$ y K^+ uniformizará una superficie orientable que cubre a \mathbb{D}/K . En nuestra situación específica de superficies k -extremales consideremos un grupo NEC K que uniformice una superficie no-orientable k -extremal de género g , y consideremos su subgrupo Fuchsiano canónico K^+ . Por nuestra caracterización de las superficies k -extremales en términos de grupos triangulares dada en el Corolario 3.4.1 sabemos que K estará incluido dentro de un grupo triangular $\Delta^\pm \left(2, 3, \frac{6g + 6k - 12}{k} \right)$ (con índice $2(6g + 6k - 12)$). Por otro lado, las inclusiones

$$K^+ \leq K \quad , \quad \Delta \left(2, 3, \frac{6g + 6k - 12}{k} \right) \leq \Delta^\pm \left(2, 3, \frac{6g + 6k - 12}{k} \right)$$

tienen ambas índice 2, con lo que obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta \left(2, 3, \frac{6g + 6k - 12}{k} \right) & \xrightarrow{2} & \Delta^\pm \left(2, 3, \frac{6g + 6k - 12}{k} \right) \\ \uparrow i & & \uparrow 2(6g+6k-12) \\ K^+ & \xrightarrow{2} & K \end{array}$$

Como K^+ contiene solamente elementos conformales entonces tiene sentido la inclusión de grupos $K^+ \leq \Delta \left(2, 3, \frac{6g+6k-12}{k} \right)$, y por el diagrama anterior obtenemos que su índice i también es $2(6g + 6k - 12)$.

Por la misma caracterización dada en el Corolario 3.4.1 sabemos que la superficie k' -extremal orientable uniformizada por $K^+ \leq \Delta(2, 3, N)$ cumple que su índice en dicho grupo es $k'N$, y por lo tanto obtenemos

$$k' \left(\frac{6g + 6k - 12}{k} \right) = 2(6g + 6k - 12).$$

De esta manera $k' = 2k$.

Por otro lado sabemos que para una superficie k' -extremal orientable de género g' el valor de N debe ser $\frac{12g'+6k'-12}{k'}$, por lo cual

$$\frac{12g' + 6k' - 12}{k'} = \frac{6g + 6k - 12}{k},$$

y si reemplazamos $k' = 2k$ obtenemos que $g' = g - 1$.

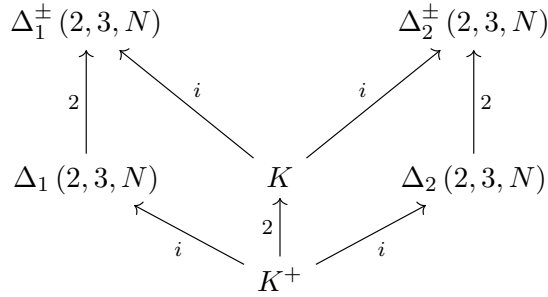
Acabamos de demostrar lo siguiente.

Teorema 6.1. *Si K es un grupo NEC que uniformiza una superficie k -extremal no-orientable de género g , entonces su cubrimiento doble será una superficie $2k$ -extremal orientable de género $g - 1$.*

¿Y qué sucede con el número de k -packings al pasar de la superficie no-orientable al cubrimiento doble? El siguiente teorema nos da información al respecto.

Teorema 6.2. *Si K uniformiza una superficie k -extremal no-orientable que admite n k -packings extremales diferentes, entonces el número de $2k$ -packings extremales de su cubrimiento doble será mayor o igual que n .*

Demostración. Si tenemos dos k -packings extremales diferentes sobre una superficie uniformizada por un grupo K entonces también tendremos dos inclusiones diferentes $K \leq \Delta_j^\pm(2, 3, N)$, $j \in \{1, 2\}$. Como K^+ contiene solamente elementos conformales entonces tenemos el siguiente diagrama:



Queremos demostrar que $\Delta_1(2, 3, N) \neq \Delta_2(2, 3, N)$, y para ello comenzaremos suponiendo que son iguales, llamándolo Δ .

Como Δ está contenido en ambos grupos Δ_1^\pm y Δ_2^\pm , entonces el grupo $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm$ cumple que

$$\Delta \leq \Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm \leq \Delta_j^\pm, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Pero $[\Delta_j^\pm : \Delta] = 2$, así que $[\Delta_j^\pm : \Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm] = 1$ ó 2 . Este índice no puede ser 1 porque $\Delta_1^\pm \neq \Delta_2^\pm$, por lo que no nos queda otra opción que sea 2, y así obtendremos que $\Delta_1^\pm \cap \Delta_2^\pm = \Delta$.

Como $[K : K^+] = 2$ entonces $K = K^+ \sqcup \alpha K^+$ para algún $\alpha \in K \setminus K^+ \leq \Delta_1^\pm \setminus \Delta$. Por la misma razón tendremos que $K = K^+ \sqcup \beta K^+$ para algún $\beta \in \Delta_2^\pm \setminus \Delta$. Como $(\Delta_1^\pm \setminus \Delta) \cap (\Delta_2^\pm \setminus \Delta) = \emptyset$ entonces $\alpha K^+ \cap \beta K^+ = \emptyset$. Tenemos que el elemento anticonformal $\beta \in \beta \Delta$ cumple que

$$\beta \in K^+ \sqcup \beta K^+ = K = K^+ \sqcup \alpha K^+,$$

por lo tanto $\beta \in \alpha K^+$ y así tenemos que $\beta \in \alpha K^+ \cap \beta K^+ = \emptyset$, lo cual es absurdo. De esta manera debemos tener que $\Delta_1(2, 3, N) \neq \Delta_2(2, 3, N)$ y estamos listos. \blacksquare

Corolario 6.2.1. *Si una superficie k -extremal no-orientable de género g admite más de un k -packing extremal entonces su cubrimiento doble será una superficie $2k$ -extremal orientable de género $g - 1$ que admitirá más de un $2k$ -packing extremal.*

Recordemos que como los valores de k' y g' que vimos en la demostración del Teorema 6.1 fueron en base a que estamos siempre trabajando sobre un grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ para un N fijo, entonces tenemos que los dominios fundamentales de una superficie k -extremal no-orientable y los de su cubrimiento doble son uniones *del mismo tipo de polígonos*.

Ahora enfoquemos nuestra atención en las superficies no-orientables primitivas que hemos descrito en las secciones anteriores. Si ordenamos los pares (g, k) de dichas superficies en relación a su N correspondiente en una tabla, y si adicionalmente junto a ellos ponemos los pares (g', k') asociados a sus cubrimientos dobles, entonces obtenemos la Tabla 6.2 a continuación.

N	Par prim. no-ori.	Par cub. doble	N	Par prim. no-ori.	Par cub. doble
7	(3, 6)	(2, 12)	14	(6, 3)	(5, 6)
8	(3, 3)	(2, 6)	16	(7, 3)	(6, 6)
9	(3, 2)	(2, 4)	18	(4, 1)	(3, 2)
10	(4, 3)	(3, 6)	24	(5, 1)	(4, 2)
11	(7, 6)	(6, 12)	30	(6, 1)	(5, 2)
12	(3, 1)	(2, 2)			

Tabla 6.2: Pares (g, k) no-orientables primitivos y los de sus cubrimientos dobles en relación al mismo valor de N .

Dado que los cubrimientos dobles siempre son k -extremales para k par, entonces es imposible que a través de tomar los subgrupos Fuchsianos canónicos podamos construir una superficie primitiva orientable para los casos de $N \in \{10, 14, 18, 30\}$ (ver Tabla 6.1). Para todos los demás valores de N vemos que el par (g, k) asociado al cubrimiento doble de los casos primitivos no-orientables coincide con el par (g, k) asociado al par primitivo orientable, lo cual nos indica que gracias al Corolario 6.2.1 *hemos demostrado el caso orientable del Teorema 3.17 para los valores de $N \in \{7, 8, 9, 11, 12, 16, 24\}$.*

De los cuatro casos restantes de $N \in \{10, 14, 18, 30\}$ analizaremos lo que sucede con $N = 18$ y $N = 30$, ya que los otros dos casos los analizaremos en el punto 4. El asunto que nos toca abordar aquí es el siguiente: ¿Existiran superficies 1-extremales orientables de género 2 y 3 que admitan dos o más 1-packings extremales? Recordemos que estos valores del género orientable son precisamente los que estudiaron Girondo y González-Diez en el caso de $g = 2$ (ver [GGD02a]) y Nakamura en el caso de $g = 3$ (ver [Nak05]). La Figura 6.1 nos muestra ejemplos explícitos para los casos $N = 18$ y $N = 30$ orientables primitivos que admiten más de un 1-packing extremal, extraídos de sus propios artículos.

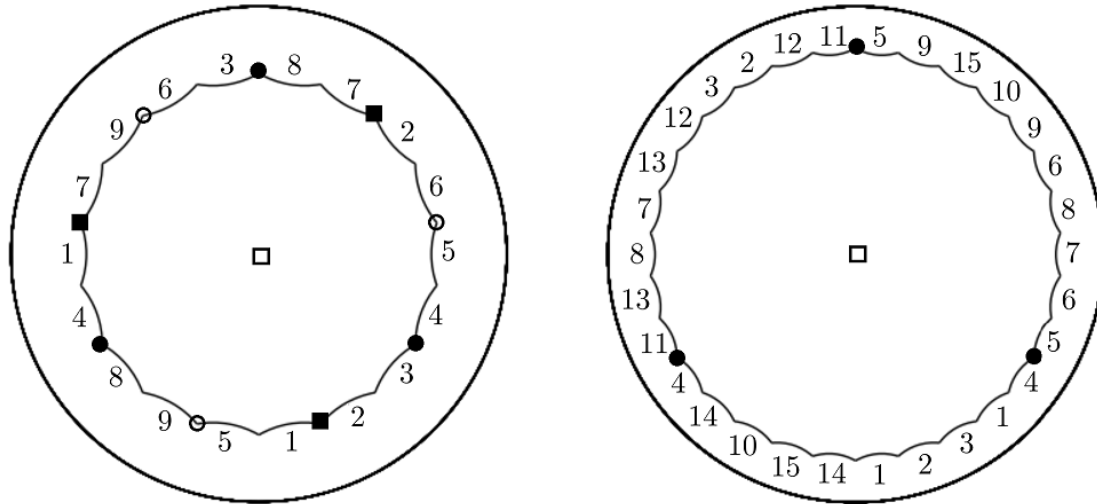


Figura 6.1: Superficie primitiva orientable de género 2 ($N = 18$) que admite *cuatro* 1-packings extremales (izquierda), junto con una superficie primitiva orientable de género 3 ($N = 30$) que admite dos 1-packings extremales. Los centros de todos los 1-packings extremales posibles están indicados con los símbolos $\circ, \bullet, \square, \blacksquare$.

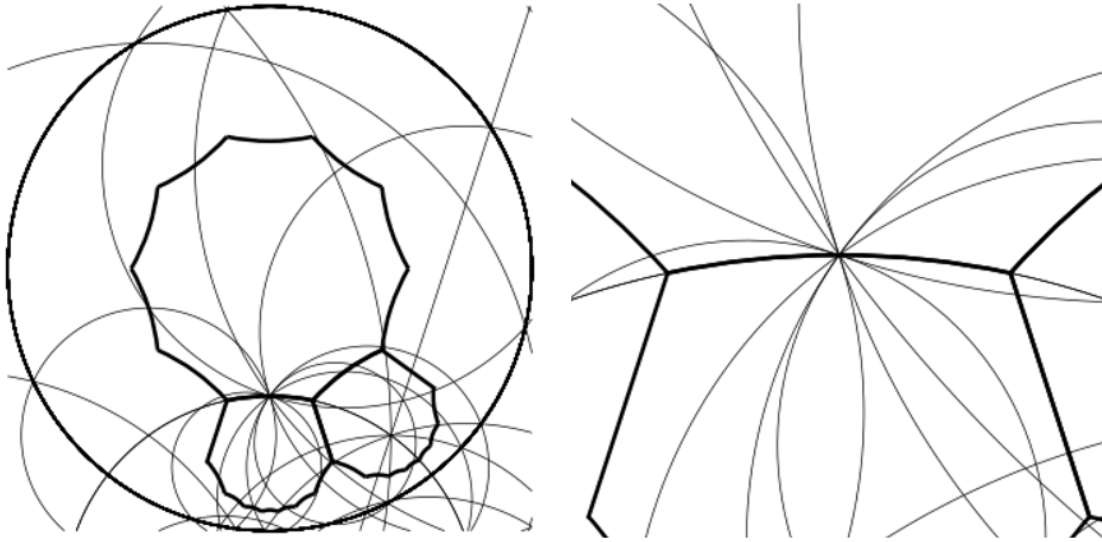
Para ver el punto 4 debemos encontrar ejemplos explícitos de superficies primitivas orientables que admitan más de un k -packing extremal para $N = 10$ y $N = 14$. Dado que ambos casos requieren $k = 3$ (ver Tabla 6.1), o sea, $k > 1$, entonces debemos proceder con nuestras propias herramientas ya que la literatura de estos temas no contiene información de este tipo de superficies. Por eso las construiremos nosotros mismos recurriendo a los procedimientos geométrico/numérico y algebraico descritos en las dos secciones anteriores, que aunque parece un largo camino, nos hará estar seguros de que el Teorema 3.17 es cierto.

Lo único que debemos tener en cuenta para aplicar los procedimientos en estos casos es que en el punto 2 del procedimiento geométrico/numérico tenemos que pedirle al conjunto \mathcal{P} que solamente contenga sidepairings conformales, pues todo lo demás funcionará de manera similar a lo que ya explicamos para el caso $N = 14$ no-orientable en las dos secciones anteriores. Considerando ese pequeño detalle podemos aplicar dichos procedimientos para nuestra búsqueda de superficies conformales, y eventualmente obtener las dos superficies de Riemann dadas en las páginas siguientes.

Caso N=10. Parte geométrica/numérica. Considerando la unión de los tres 10-ángonos regulares en la Figura 6.2 podemos ver que el punto

$$x \approx -0.4858i$$

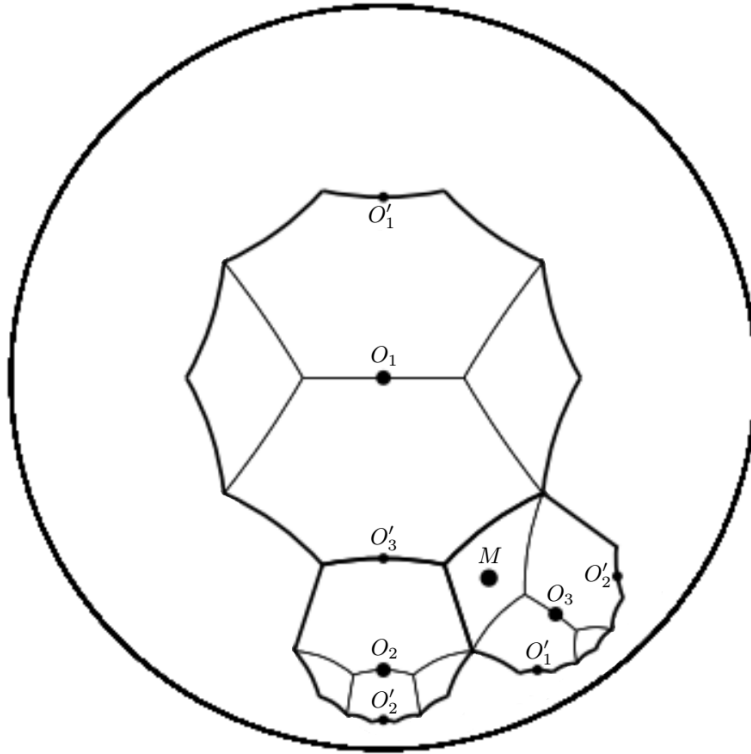
pertenece a una banana para cada elemento de un conjunto de sidepairings que identifican todos los lados de dicho dominio por pares (que genere un grupo de superficie). La lista de dichos sidepairings están en la Tabla que acompaña a la Figura 6.2.



	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 10)$
s_1	$(+, 2_1, 3_5)$	$(ca)ab(ca)^5ab(ca)^{-1}ab$
s_2	$(+, 1_9, 3_6)$	$(ca)ab(ca)^{-4}ab(ca)$
s_3	$(+, 3_9, 1_7)$	$(ca)^{-3}ab(ca)ab(ca)^{-1}$
s_4	$(+, 1_2, 1_6)$	$(ca)^{-4}ab(ca)^{-2}$
s_5	$(+, 3_2, 1_3)$	$(ca)^3ab(ca)^{-2}ab(ca)^{-1}$
s_6	$(+, 2_8, 1_4)$	$(ca)^4ab(ca)^2ab$
s_7	$(+, 1_5, 3_3)$	$(ca)ab(ca)^3ab(ca)^5$
s_8	$(+, 2_7, 3_4)$	$(ca)ab(ca)^4ab(ca)^3ab$
s_9	$(+, 2_2, 2_6)$	$ab(ca)^{-4}ab(ca)^{-2}ab$
s_{10}	$(+, 1_8, 2_4)$	$ab(ca)^4ab(ca)^2$
s_{11}	$(+, 2_5, 3_8)$	$(ca)ab(ca)^{-2}ab(ca)^5ab$
s_{12}	$(+, 2_3, 3_7)$	$(ca)ab(ca)^{-3}ab(ca)^{-3}ab$

Figura 6.2: Dominio fundamental, candidato y sidepairings de una superficie 3-extremal orientable primitiva de género 2. El candidato $x \approx -0.4858i$ es el punto común de una banana de cada sidepairing, como vemos en el zoom de la figura a la derecha.

Podemos observar que la rotación τ de orden dos que permuta el candidato $x \approx -0.4858i$ con el centro $O' = (ca)ab(0)$ induce un automorfismo en la superficie uniformizada por el grupo generado por dichos sidepairings, según observamos en la tabla de la Figura 6.3. Esto tiene como consecuencia que la superficie admita dos teselaciones diferentes por 10-ágonos, es decir, dos 3-packings diferentes, según vemos en la Figura 6.3.



Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$	Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	s_1	s_7	s_7
s_2	s_1	s_8	s_4^{-1}
s_3	s_8^{-1}	s_9	$s_{12} s_{11}^{-1}$
s_4	s_8^{-1}	s_{10}	$s_1 s_{12}^{-1}$
s_5	s_5	s_{11}	s_{11}
s_6	s_5	s_{12}	s_{12}

Figura 6.3: Conjugación de cada sidepairing por el elemento τ , que es la rotación de orden dos que permuta x y O' (O'_3 y O_3 respectivamente) y que fija M . En la figura tenemos que los puntos O'_i son centros de la nueva teselación, vistos en el dominio fundamental original cuyos centros son O_i , de tal manera que $O'_i = \tau(O_i)$.

Caso N=10. Parte algebraica. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{10})}\right)} \approx 2.8901$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Recordemos que aquí sí que es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \notin \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} vistas en el nuevo cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1 & -\frac{u_0^3}{4} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{3u_0}{4} \\ -\frac{u_0^3}{4} + \frac{u_0^2}{2} + \frac{3u_0}{4} & u_1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento algebraico llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\left(\frac{u_0^3}{5} - \frac{2u_0^2}{5} - \frac{3u_0}{5} + \frac{4}{5}\right)} \notin \mathbb{Q}(u_0)(u_1).$$

En estas condiciones tenemos que

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}] &= [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)(u_1)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0)(u_1) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16. \end{aligned}$$

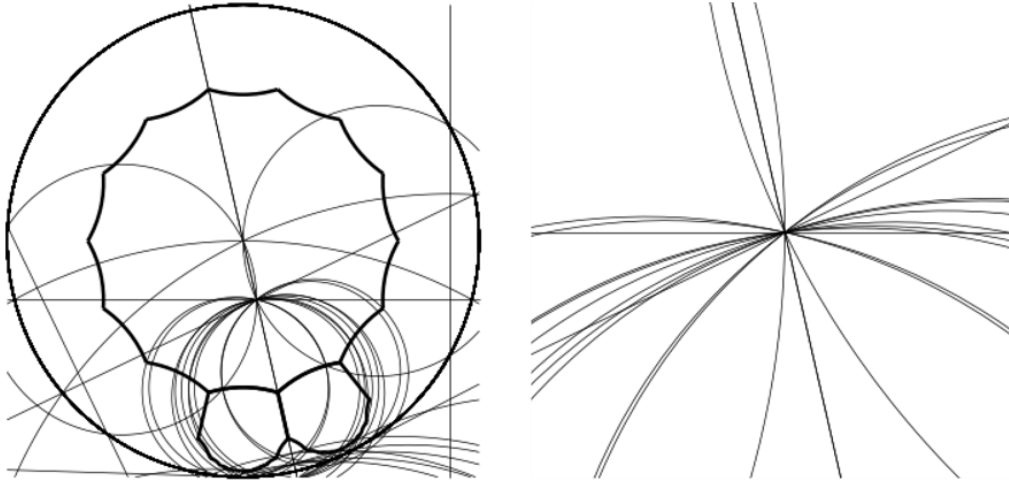
De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\left(\frac{u_0^3}{2} - u_0^2 - \frac{u_0}{2} - 1\right) u_1 u_2, \\ \tau_2 &= \left(\frac{3u_0^3}{2} + \frac{11u_0^2}{4} + \frac{7u_0}{2} + \frac{15}{4}\right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{u_0^2}{4} - u_0 - \frac{1}{4}\right) u_2. \end{aligned}$$

Caso N=14. Parte geométrica/numérica. Considerando la unión de los tres 14-ágonos regulares en la Figura 6.4 podemos ver que el punto

$$x \approx 0.0567 - 0.2484i$$

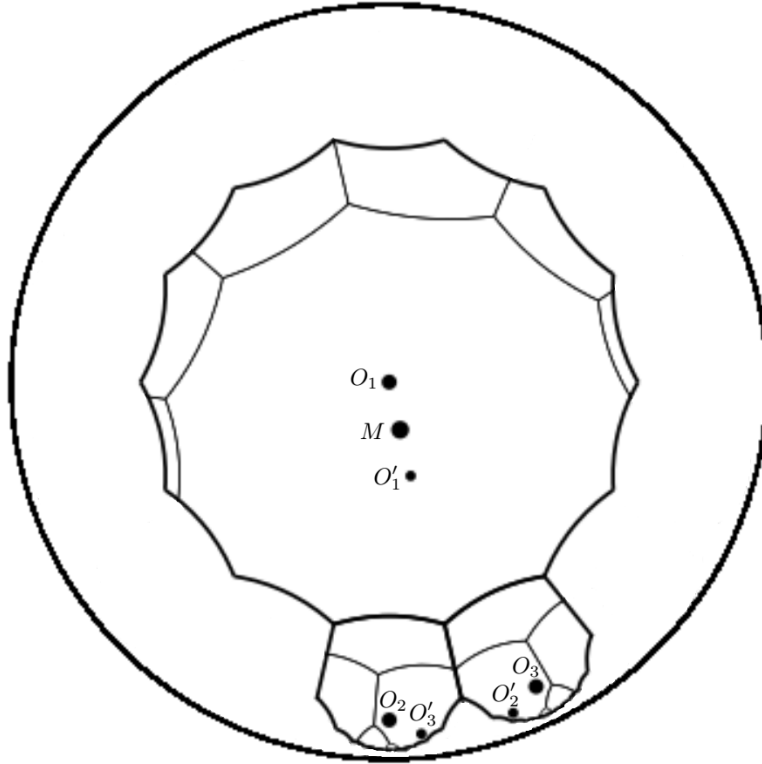
pertenece a una banana para cada elemento de un conjunto de sidepairings que identifican todos los lados de dicho dominio por pares (que genere un grupo de superficie). La lista de dichos sidepairings están en la Tabla que acompaña a la Figura 6.4.



	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 14)$
s_1	$(+, 1_{13}, 1_{10})$	$(ca)^{-4}ab(ca)$
s_2	$(+, 1_2, 1_5)$	$(ca)^5ab(ca)^{-2}$
s_3	$(+, 2_1, 1_9)$	$(ca)^{-5}ab(ca)^{-1}ab$
s_4	$(+, 3_{13}, 1_6)$	$(ca)^6ab(ca)ab(ca)^{-1}$
s_5	$(+, 2_2, 2_{11})$	$ab(ca)^{-3}ab(ca)^{-2}ab$
s_6	$(+, 1_7, 3_2)$	$(ca)ab(ca)^2ab(ca)^7$
s_7	$(+, 1_3, 1_{11})$	$(ca)^{-3}ab(ca)^{-3}$
s_8	$(+, 2_3, 3_8)$	$(ca)ab(ca)^8ab(ca)^{-3}ab$
s_9	$(+, 3_{12}, 3_3)$	$(ca)ab(ca)^3ab(ca)^2ab(ca)^{-1}$
s_{10}	$(+, 1_8, 2_{12})$	$ab(ca)^{-2}ab(ca)^6$
s_{11}	$(+, 1_{12}, 1_4)$	$(ca)^4ab(ca)^2$
s_{12}	$(+, 2_4, 2_8)$	$ab(ca)^8ab(ca)^{-4}ab$
s_{13}	$(+, 3_4, 2_5)$	$ab(ca)^5ab(ca)^{-4}ab(ca)^{-1}$
s_{14}	$(+, 3_5, 2_7)$	$ab(ca)^7ab(ca)^{-5}ab(ca)^{-1}$
s_{15}	$(+, 2_6, 3_{11})$	$(ca)ab(ca)^{-3}ab(ca)^{-6}ab$
s_{16}	$(+, 3_6, 3_{10})$	$(ca)ab(ca)^{-4}ab(ca)^{-6}ab(ca)^{-1}$
s_{17}	$(+, 2_9, 3_7)$	$(ca)ab(ca)^7ab(ca)^5ab$
s_{18}	$(+, 2_{10}, 3_9)$	$(ca)ab(ca)^{-5}ab(ca)^4ab$

Figura 6.4: Dominio fundamental, candidato y sidepairings de una superficie 3-extremal orientable primitiva de género 3. El candidato $x \approx 0.0567 - 0.2484i$ es el punto común de una banana de cada sidepairing, como vemos en el zoom de la figura a la derecha.

Podemos observar que la rotación τ de orden dos que permuta el candidato $x \approx -0.4858i$ con el centro $O' = 0$ induce un automorfismo en la superficie uniformizada por el grupo generado por dichos sidepairings, según observamos en la tabla de la Figura 6.5. Esto tiene como consecuencia que la superficie admita dos teselaciones diferentes por 10-ágonos, es decir, dos 3-packings diferentes, según vemos en la figura a continuación.



Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$	Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	s_2	s_{10}	s_6
s_2	s_1	s_{11}	s_{11}
s_3	s_2	s_{12}	$s_2 s_{16} s_6$
s_4	s_1	s_{13}	$s_6^{-1} s_{13} s_6$
s_5	$s_2 s_6$	s_{14}	$s_6^{-1} s_{14} s_6$
s_6	s_6	s_{15}	$s_6^{-1} s_{13}^{-1} s_5^{-1} s_6$
s_7	s_7	s_{16}	$s_6^{-1} s_{12} s_5^{-1} s_6$
s_8	$s_2 s_{18} s_6$	s_{17}	$s_6^{-1} s_{17} s_6$
s_9	$s_1 s_6$	s_{18}	$s_6^{-1} s_{18} s_6$

Figura 6.5: Conjugación de cada sidepairing por el elemento τ , que es la rotación de orden dos que permuta x y O' (O'_1 y O_1 respectivamente) y que fija M . En la figura tenemos que los puntos O'_i son centros de la nueva teselación, vistos en el dominio fundamental original cuyos centros son O_i , de tal manera que $O'_i = \tau(O_i)$.

Caso N=14. Parte algebraica. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{14})}\right)} \approx 4.2591$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^6 - 4x^5 - x^4 - x^2 - 4x + 1.$$

Recordemos que aquí sí que es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \notin \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a}, \bar{b} y \bar{c} vistas en el nuevo cuerpo $\mathbb{Q}(u_0)(u_1)$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1 & \frac{u_0^4}{8} - \frac{u_0^3}{2} - \frac{u_0^2}{4} + \frac{u_0}{2} + \frac{1}{8} \\ \frac{u_0^4}{8} - \frac{u_0^3}{2} - \frac{u_0^2}{4} + \frac{u_0}{2} + \frac{1}{8} & u_1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento algebraico llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\frac{5u_0^5}{14} - \frac{9u_0^4}{7} - \frac{13u_0^3}{14} - \frac{2u_0^2}{7} - \frac{u_0}{7} + 1} \notin \mathbb{Q}(u_0)(u_1).$$

En estas condiciones tenemos que

$$\begin{aligned} [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}] &= [\mathbb{Q}(u_0)(u_1)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)(u_1)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0)(u_1) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24. \end{aligned}$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\left(-\frac{u_0^5}{41} + \frac{23u_0^4}{164} + \frac{u_0^3}{41} - \frac{28u_0^2}{41} - \frac{14u_0}{41} + \frac{9}{164}\right) u_1 u_2, \\ \tau_2 &= \left(-\frac{15u_0^5}{82} + \frac{103u_0^4}{164} + \frac{99u_0^3}{164} + \frac{5u_0^2}{82} + \frac{59u_0}{164} + \frac{203}{164}\right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{9u_0^5}{82} - \frac{75u_0^4}{164} - \frac{5u_0^3}{164} - \frac{9u_0^2}{82} + \frac{19u_0}{164} - \frac{135}{164}\right) u_2. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos indicados podemos acabar la demostración de la suficiencia del caso orientable del Teorema 3.17, y en consecuencia, hemos demostrado este teorema en su totalidad.

6.2 El caso plano

Para finalizar este capítulo abordaremos el problema de la existencia de más de un k -packing del mismo tipo en el caso de superficies planas. La pregunta **P3** se traduciría en:

¿Existirá algún toro y alguna botella de Klein que admitan más de un k -packing extremal?

Ya hemos visto en el caso hiperbólico lo útil que resulta estudiar si una superficie admite automorfismos que no vengan inducidos por el grupo triangular en el que está incluido su grupo uniformizador, y en nuestro caso eso se traduce en encontrar un toro complejo y una botella de Klein que admitan algún automorfismo inducido por un elemento fuera del grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, 6)$.

Es bien sabido que las superficies planas, tanto orientables como no-orientables, admiten infinitos automorfismos. En el caso orientable cualquier traslación en \mathbb{C} induce un automorfismo, y aunque en el caso no-orientable no toda traslación cumpla esta propiedad, sí que existen familias infinitas de automorfismos inducidas por traslaciones (ver [B88]). Podemos utilizar estos automorfismos para trasladar los centros de los hexágonos que conforman el dominio fundamental de ambos tipos de superficies en otros puntos de su dominio que serán nuevos centros de k -packings extremales (ver la Figura 3.6). Esto nos lleva a la conclusión de que, a diferencia del caso hiperbólico (ver Corolario 4.6.2), *todas* las superficies planas k -extremales admiten infinitos k -packings extremales.

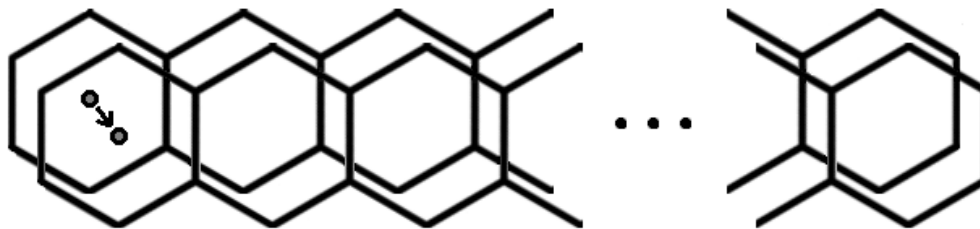


Figura 6.6: Dos teselaciones diferentes dentro de las infinitas posibles para un toro complejo, relacionadas mediante una traslación.

Dado que no cualquier traslación induce un automorfismo en una superficie plana no-orientable entonces consideramos apropiado mostrar un ejemplo explícito en este caso. Observemos la superficie definida por el dominio fundamental dado en la Figura 6.7. Investigaremos bajo qué condiciones una traslación en \mathbb{C} podría conjugar el grupo que uniformiza esta superficie en sí mismo, para así obtener un automorfismo que nos dará un nuevo k -packing extremal.

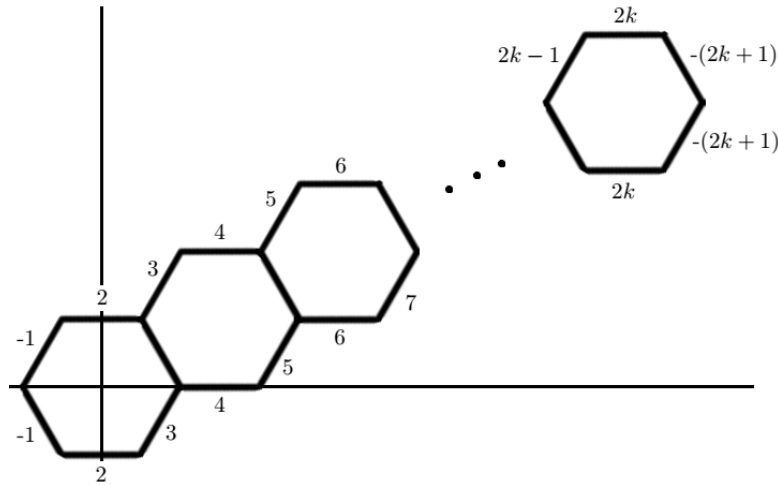


Figura 6.7: Botella de Klein k -extremal que eventualmente admitirá más de un k -packing extremal. El centro del hexágono inferior izquierdo es el origen del plano complejo, cuyos ejes hemos destacado.

Si llamamos R al radio del círculo inscrito a cada hexágono que conforma el dominio fundamental de esta superficie, y si llamamos T_a a la traslación por $a \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que los sidepairings s_2, \dots, s_{2k} son todos igual a la transformación T_{2Ri} (ver Figura 6.8).

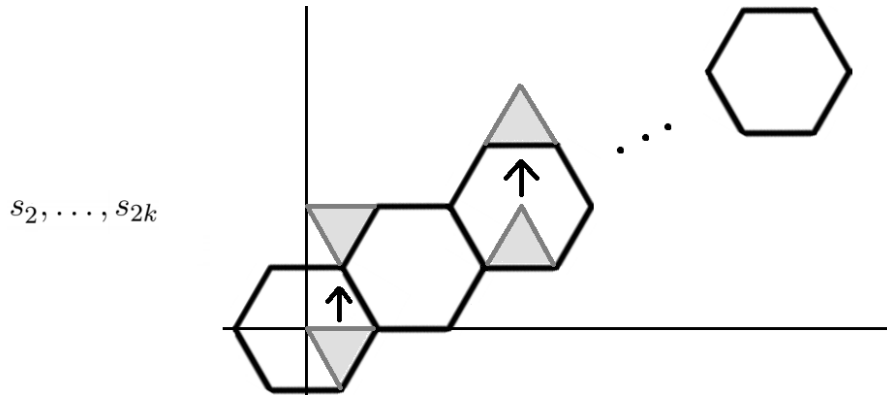


Figura 6.8: Los sidepairings s_2, \dots, s_{2k} son todos iguales a T_{2Ri} .

Por otro lado los sidepairings s_1 y s_{2k+1} son las transformaciones que vemos en la Figura 6.9, y no es difícil ver que podemos expresarlas como

$$s_1 = T_{-\frac{3R}{2} + Ri} \omega, \quad s_{2k+1} = T_{k(\frac{3R}{2} + Ri)} \omega T_{(k-1)(-\frac{3R}{2} - Ri)},$$

donde ω es la reflexión con respecto al eje Y dada por $\omega(z) = -\bar{z}$.

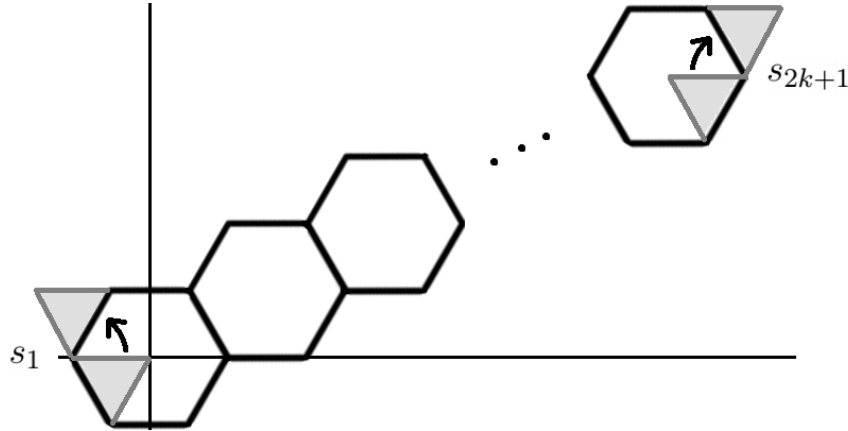


Figura 6.9: Los sidepairings s_1 y s_{2k} son composiciones de traslaciones y reflexiones.

Considerando que la traslación T_a conjuaga cada traslación sobre sí misma entonces tendremos que

$$T_a s_i T_a^{-1} = \begin{cases} T_{2Ri} & \text{si } i \in \{2, \dots, k\}, \\ T_{-\frac{3R}{2}+Ri} (T_a \omega T_a^{-1}) & \text{si } i = 1, \\ T_{\frac{3R}{2}+Ri} (T_a \omega T_a^{-1}) T_{(k-1)(-\frac{3R}{2}-Ri)} & \text{si } i = 2k + 1. \end{cases}$$

Si conseguimos que $T_a \omega T_a^{-1}$ sea igual a ω para algún a entonces tendremos que $T_a s_i T_a^{-1}$ sería igual a s_i para cada $i \in \{1, \dots, 2k + 1\}$, con lo cual tendríamos que la traslación T_a induciría un automorfismo de la superficie. Como

$$T_a \omega T_a^{-1}(z) = -\bar{z} + \bar{a} + a$$

entonces para conseguir que $T_a \omega T_a^{-1} = \omega$ consideraremos valores de a tales que $a + \bar{a} = 0$, o lo que es lo mismo, que a sea un imaginario puro. De esta manera tendremos que para cada uno de los infinitos valores reales de t tal que $-R < t < R$ la traslación T_{it} inducirá un automorfismo de nuestra botella de Klein (ver Figura 6.10), y por lo tanto ésta admitirá una infinidad de k -packings extremales (lo que también contrasta con la finitud en el caso hiperbólico, como vimos en el Corolario 4.6.2).

Podemos condensar lo que hemos visto en este caso plano en el siguiente teorema:

Teorema 6.3. *Para cada valor de $k \geq 1$ existe una superficie plana k -extremal, tanto en el caso orientable como no-orientable, que admite infinitos k -packings extremales diferentes. De hecho toda superficie plana k -extremal admite infinitos k -packings extremales diferentes, independiente de su orientabilidad.*

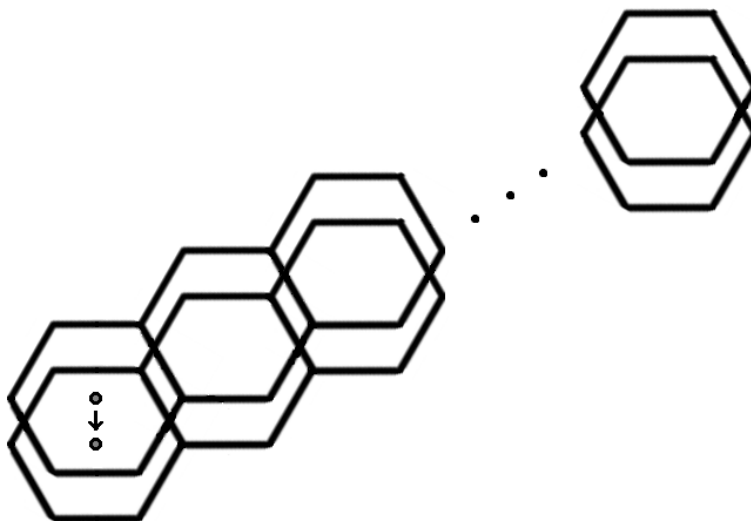


Figura 6.10: Dos teselaciones diferentes dentro de una infinidad posible para nuestra botella de Klein, relacionadas mediante una traslación vertical.

Capítulo 7

La totalidad de k -packings extremales para un k dado

En este último capítulo nos dedicaremos a ver hasta qué punto podemos responder a la pregunta **P4**, que reescribimos a continuación:

P4. ¿Existirá algún camino viable computacionalmente que nos permita determinar la totalidad de k -packings del mismo tipo sobre una superficie k -extremal dada, tanto en el caso orientable como no-orientable?

Recordemos que para que una superficie hiperbólica (orientable o no) admita más de un k -packing extremal es necesario que esté uniformizada por un grupo NEC que esté contenido en un grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$, para

$$N \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

Si el grupo no está incluido en un grupo triangular de ese tipo entonces la respuesta a la pregunta **P4** es siempre que la superficie admite solamente un k -packing extremal dado por los círculos inscritos a los polígonos regulares de su dominio fundamental conformado por k N -ángulos. Por esta razón la pregunta **P4** nos obliga a poner nuestra atención sobre aquellas superficies cuyos dominios son uniones de N -ángulos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ para los valores antes mencionados de N .

Si observamos lo que hemos hecho en el caso de la construcción de las siete superficies primitivas (ver el Capítulo 4) podremos convencernos de que el procedimiento algebraico es esencialmente una verificación de lo que hemos encontrado en el procedimiento geométrico/numérico, y por ello pondremos atención a qué tanto podemos extrapolar de este último para los fines que buscamos en este capítulo. Comencemos recordando que los centros de las nuevas teselaciones provienen de ciertas intersecciones de bananas dentro del dominio fundamental de la superficie, y este conjunto de candidatos es siempre finito (recordemos la definición de candidato en el punto 4 del procedimiento geométrico/numérico, así como la finitud de éstos demostrada en el Corolario 4.6.2).

Lo que debemos destacar aquí es que en el punto 4 de dicho procedimiento estudiábamos *algunos* puntos del dominio fundamental de la superficie que se trasladaran una distancia admisible a través de cada sidepairing; no la *totalidad* de los candidatos en dicho dominio (ver la Figura 4.6). Eventualmente este procedimiento nos permitía ver cómo es que una rotación de orden 2 que permutaba un candidato con algún centro de la teselación original podía inducir un automorfismo de la superficie, y con ello podíamos concluir la existencia de un nuevo k -packing extremal.

Para abordar la pregunta **P4** comenzaremos preguntándonos: ¿Será necesario analizar todos los cortes de bananas en *todo* el dominio fundamental para tener la certeza de que no estamos dejando fuera ningún candidato? La respuesta viene dada en el siguiente teorema:

Teorema 7.1. *Sea $r > 0$ tal que cualquier círculo de radio r en \mathbb{D} contiene en su interior o en su borde al menos un centro de cada teselación asociada a cada k -packing extremal de una superficie X dada. En dicho caso tenemos que $r \geq r_c$, donde r_c es el radio del círculo circunscrito a cualquiera de los N -ángulos regulares que definen el dominio fundamental de X .*

Demostración. Fijemos una teselación T por N -ángulos en \mathbb{D} y comencemos suponiendo que tenemos un círculo ω' de radio $r' \geq r_c$ que no contiene ni en su interior ni en su borde ningún centro de T . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que ω' está centrado en el origen $0 \in \mathbb{D}$. Sea P un centro de T tal que la distancia $d(P, 0)$ sea menor o igual a todas las demás distancias entre los centros de T y el origen. Por la propia definición de ω' es imposible que P esté en su interior o en su borde, por lo que consideramos un nuevo círculo ω centrado en el origen con radio $r > r'$ que contenga a P en su borde (ver Figura 7.1).

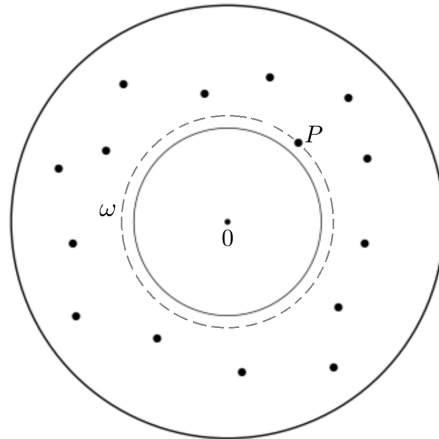


Figura 7.1: Círculo ω de radio $r > r_c$ que no contiene ningún centro de la teselación en su interior, pero sí contiene a P en su borde.

Como P es un centro de T entonces obligatoriamente deben haber otros N centros P_1, \dots, P_N de T que formen un polígono regular de N lados cuyo centro es precisamente P . De esta manera $\angle P_1PP_2 = \angle P_2PP_3 = \dots = \frac{2\pi}{N}$ (ver la Figura 7.2).

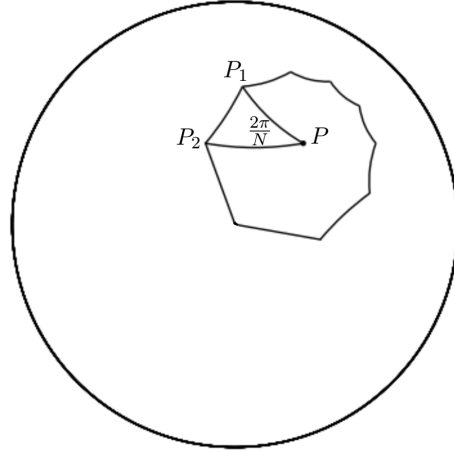


Figura 7.2: Cada centro de la teselación T está rodeado de N puntos P_1, \dots, P_N que forman un N -ágono regular, donde $\angle P_iPP_{i+1} = \frac{2\pi}{N}$ para cada i en módulo N .

Dado que $r > R$ (ya que $r > r' \geq r_c > R$) consideremos el círculo de radio $2R$ centrado en P (ver la Figura 7.3) y llamemos X e Y a los puntos de intersección de éste con el borde de ω . Sabemos que los puntos P_1, \dots, P_N están en el borde de este nuevo círculo formando ángulos iguales a $\frac{2\pi}{N}$ tal cual hemos descrito en la Figura 7.2. Por la propia definición de P sabemos que en el interior del arco \widehat{XY} contenido en ω no puede haber ningún punto P_i , y ya que éstos puntos forman ángulos sucesivos de $\frac{2\pi}{N}$ entonces debemos tener obligatoriamente que $2\alpha = \angle XPY \leq \frac{2\pi}{N}$ (ver Figura 7.3).

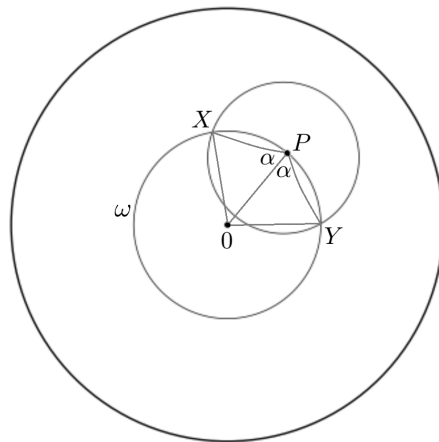


Figura 7.3: El círculo centrado en P de radio $2R$ intersecta a ω en X, Y .

Aplicando el Teorema 1.4 al triángulo $\triangle XPO$ (de lados $\overline{XO} = \overline{PO} = r$ y $\overline{XP} = 2R$) sabemos que

$$\cosh(r) = \cosh(r) \cosh(2R) - \sinh(r) \sinh(2R) \cdot \cos(\alpha).$$

De lo anterior obtenemos inmediatamente que

$$\cos(\alpha) = \frac{(\cosh(2R) - 1)}{\sinh(2R)} \frac{1}{\tanh(r)},$$

y como R está fijo podemos concluir que el ángulo α es una función estrictamente creciente de r . En particular tenemos que dicha función será inyectiva.

Si observamos el triángulo equilátero ensombrecido de lados r_c, r_c y $2R$ con ángulos $\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}$ y $\frac{2\pi}{3}$ en la Figura 7.4 tendremos, por el Teorema 1.4, la siguiente igualdad:

$$\cosh(r_c) = \cosh(r_c) \cosh(2R) - \sinh(r_c) \sinh(2R) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

Como esta relación tiene la misma forma que definía anteriormente α en términos de r , entonces tenemos que al valor r_c le corresponde de manera única (por la inyectividad de la relación entre ambas variables) el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{N}$.

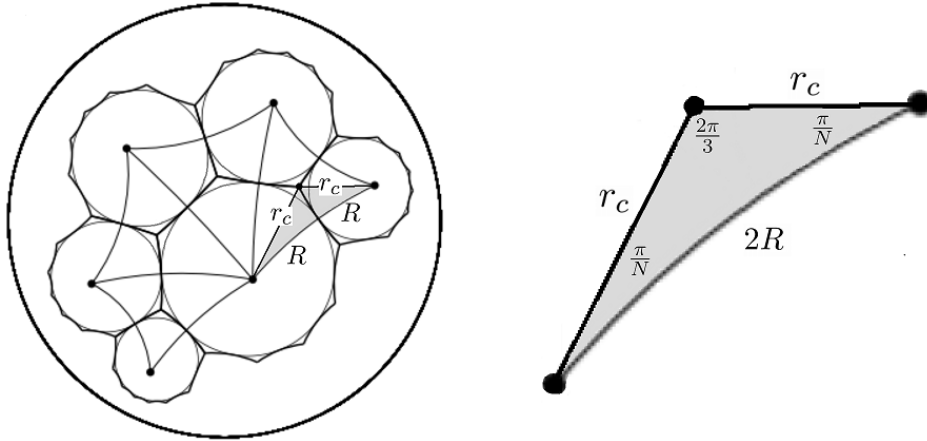


Figura 7.4: Configuración geométrica que relaciona r_c con el ángulo $\frac{\pi}{N}$.

Por esta razón, como $r > r_c$, tendremos que al radio r le corresponderá un ángulo $\angle XPY = 2\alpha$ mayor que $2 \cdot \frac{\pi}{N}$, lo cual contradice nuestra afirmación anterior de que $\angle XPY \leq \frac{2\pi}{N}$. De esta manera llegamos a un absurdo, el cual nos obliga a que el círculo original ω' obligatoriamente debió albergar algún centro de la teselación en su interior o borde, y hemos acabado esta demostración. ■

Con el teorema anterior podemos estar seguros de que para encontrar *todos* los posibles candidatos a centros de nuevos k -packings extremales en una superficie es suficiente estudiar *todos* los candidatos dentro de *ciertas* porciones circulares de \mathbb{D} , que son ligeramente más grandes que cualquiera de los polígonos que conforman el dominio fundamental. Ahora que sabemos de manera precisa la forma de los subconjuntos de \mathbb{D} que debemos analizar, nuestro siguiente paso será determinar *la totalidad de candidatos en una región de ese tipo*.

Para ello consideremos un disco de radio r_c en \mathbb{D} , que llamaremos Ω . La totalidad de candidatos en Ω , por su propia definición, es la totalidad de intersección de bananas que se cortan en Ω . No debemos perder de vista que para conseguir todas esas intersecciones debemos estar seguros que no hemos pasado por alto ninguna banana dentro de Ω , y como cada una de esas banana se corresponde con una distancia admisible¹ $d \in \mathcal{D}$, nos vemos en la obligación de determinar *todas* las distancias admisibles cuyas bananas asociadas se corten en Ω . Lo que queremos evitar es que, por no haber determinado una cierta distancia de \mathcal{D} , estemos cometiendo el error de omitir una banana en Ω que pudiera proporcionarnos uno de los candidatos buscados². Por ello enfocaremos nuestra atención en el conjunto \mathcal{D} y sus elementos.

Recordemos es que el conjunto \mathcal{D} es la lista ordenada de todas las distancias entre los centros de una teselación dada por N -ágonos regulares. En el procedimiento geométrico/numérico, a partir de una teselación con un polígono centrado en el origen, construimos una gran cantidad de distancias a partir de la distancia entre el origen y sus traslaciones por elementos de \mathcal{R}_k (observe el comentario posterior a la demostración del Lema 4.2). Si enfocamos nuestra atención en el caso $N = 9$ podremos ver lo delicado que resulta el cálculo de los elementos de \mathcal{D} , y de cómo la geometría de la teselación (dependiente del propio valor de N) hace que los elementos de \mathcal{D} tengan valores distribuidos de una manera nada uniforme. Por ello consideremos una teselación de 9-ágonos regulares de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ en \mathbb{D} . Anteriormente nuestro cálculo de la lista de distancias admisibles consistió en tomar un cierto valor de $k > 1$ con el cual construir la lista de distancias a continuación, que desde ahora llamaremos D_k :

$$D_k := \{d(0, f(0)) : f \in \mathcal{R}_k\}.$$

En cada uno de los casos que estudiamos en la suficiencia del Teorema 3.17 fue suficiente utilizar $k = 4$, y con ello pudimos obtener una cantidad prudente de distancias que hacían que la cantidad de bananas fuera abundante y a la vez fuera computacionalmente viable. La lista de distancias para $N = 9$ la calculamos en base a \mathcal{R}_4 , con el cual obtuvimos el conjunto ordenado D_4 de 46 elementos dado por:

¹ Recordemos la definición de distancia admisible en el Lema 4.1.

² Notemos que en el punto 5 del procedimiento geométrico/numérico solamente consideramos algunos puntos de intersección, ya que no teníamos necesidad de hallarlos todos. Ahora nos proponemos investigar todas dichas intersecciones.

{1.85507713531907, 2.89096327366145, 3.43821424123008, 3.68102046296156,
 4.23208976385251, 4.62525849288379, 4.74604040898053, 4.90671807236229,
 5.10205753378541, 5.22578075866157, 5.28586107995029, 5.49629020426206,
 5.51477688620382, 5.64012703401184, 5.75149996202801, 5.93221783519591,
 5.99546816250991, 6.08522111074024, 6.13331765588051, 6.26013594963973,
 6.32158383883091, 6.34484821419086, 6.37266625646424, 6.42775090248262,
 6.46675969970735, 6.47995898064552, 6.57126273922430, 6.58943322908964,
 6.60111754429961, 6.68241447915654, 6.75229661210388, 6.75759623469434,
 6.84587491153157, 6.87642848246018, 6.89692180591026, 6.94700905027589,
 7.00883181375256, 7.03485017929396, 7.06363723368004, 7.07478171839883,
 7.10619425490725, 7.11559443729346, 7.13302541999443, 7.30951429710111,
 7.33146271646942, 7.34744751283499}.

No olvidemos que este es el conjunto ordenado de todas las posibles distancias entre el centro del 9-ágono P centrado en el origen de \mathbb{D} y el centro de cualquier 9-ágono de la forma $f(P)$ donde $f \in \mathcal{R}_4$. Sin embargo, observaremos a continuación un fenómeno interesante que demuestra que determinar subconjuntos de \mathcal{D} a partir de los conjuntos \mathcal{R}_k , aunque fue útil en el procedimiento geométrico/numérico, no es completamente satisfactorio en nuestro análisis actual.

Si nos guiamos por la Figura 7.5 podemos verificar que existe un 9-ágono $g(P)$ tal que $g \in \mathcal{R}_5 - \mathcal{R}_4$ y cuya distancia d' al origen (aproximadamente 7.206489) *no está en la lista D_4 y es menor que la mayor distancia de D_4* . Esto significa que las distancias proporcionadas por D_4 *pasan por alto la distancia d'* , lo cual es precisamente lo que queremos evitar. Esta situación de que un conjunto D_k se “salte” una distancia es un fenómeno directamente relacionado con el hecho de que la mayor distancia en D_k crece muy rápido en términos de k , y esto permite la aparición de elementos de $D_{k+1} - D_k$ menores que aquella mayor distancia.

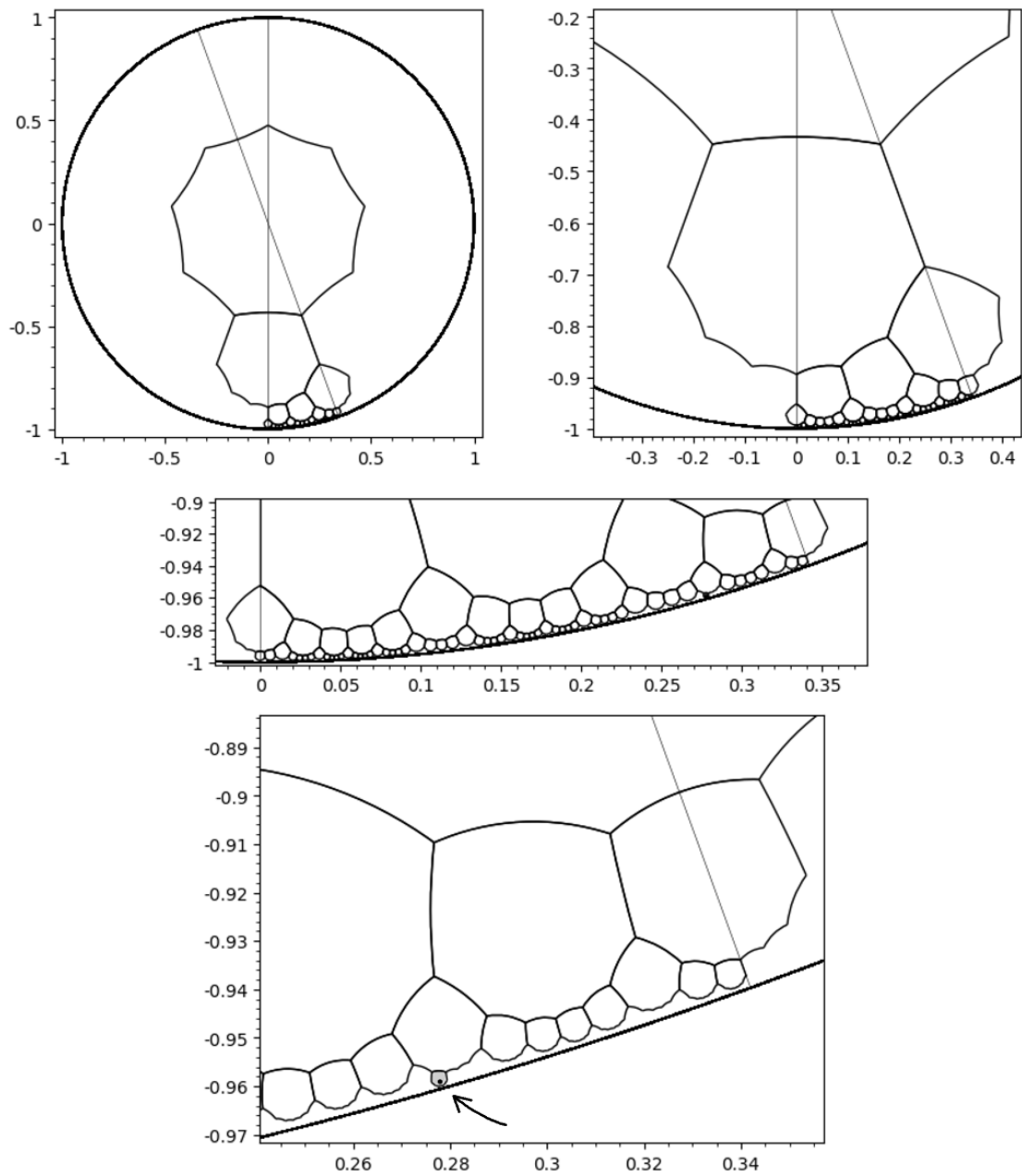


Figura 7.5: Sucesivas ampliaciones en \mathbb{D} de los polígonos de la forma $f(P)$ con $f \in \mathcal{R}_4$ comprendidos entre los ejes de las transformaciones a y c (para evitar repeticiones de polígonos por estas transformaciones). Destacamos en gris el polígono $g(P)$ donde $g \in \mathcal{R}_5 - \mathcal{R}_4$ está dado por $g = ab(ca)^{-2}ab(ca)^2ab(ca)^{-2}ab(ca)^3ab$. La distancia del centro de $g(P)$ a 0 es $\approx 7.2064 \notin D_4$.

Por un lado hemos visto cómo es que los conjuntos D_k , a pesar de que nos entregan un buen número de distancias, acarrearán saltos que debemos evitar en nuestro estudio actual. Por otro lado, este ejemplo nos revela una ambigüedad en el uso del lenguaje que hemos utilizado en el procedimiento geométrico numérico, ya que hemos visto ahora que las distancias $d_0 < d_1 < d_2 < \dots$ de D_4 no se corresponden, a pesar de usar el mismo símbolo, con las distancias $d_0 < d_1 < d_2 < \dots$ de D_5 , ya que el elemento de D_4 dado por $d_{43} \approx 7.309514\dots$ en D_5 será al menos el elemento d_{44} . Resulta computacionalmente muy complicado verificar estos cambios de subíndice para conjuntos D_k con k más grandes.

Una manera de evitar esta ambigüedad es determinar algún índice i de tal manera que las distancias entre d_0 y d_i en D_k se correspondan con las mismas distancias en \mathcal{D} . Sabemos que dicho índice no puede cubrir todo el conjunto D_k , pero sabemos que hay uno mínimo que lo cumple (d_0 es igual en ambos conjuntos). Por ello ahora nos enfocaremos en buscar un procedimiento que nos permita determinar un índice i de tal manera que las distancia en D_k entre d_0 y d_i no tengan saltos.

Antes de describirlo es conveniente aclarar que, en última instancia, es un procedimiento computacional en SageMath, y por su propia naturaleza visual es que advertimos al lector que nuestra estrategia es de carácter limitado (por las propias limitaciones de SageMath y sus figuras). Sin embargo, debemos aclarar que aquello no será un impedimento tan profundo porque, en última instancia, nuestro trabajo requiere solamente una pequeña cantidad de distancias. Nuestro procedimiento nos proporcionará listas que cumplen, al menos, con nuestro objetivo de estudiar y clasificar la totalidad de las superficies k -extremales no-orientables de género 3.

Lo primero que haremos será trazar en SageMath todos los N -ángonos regulares y sus centros comprendidos entre los ejes de las transformaciones a y c (inclusive) en base a traslaciones de un N -ángono centrado en el origen por elementos de \mathcal{R}_k , para $k = 4$ (ver la Figura 7.6 arriba a la izquierda). Luego calculamos de manera numérica las distancias entre dichos polígonos y el origen, lo que nos dará una enorme lista ordenada de distancias, que es precisamente D_4 . Comenzamos trazando un círculo de radio d_0 , que pasará exclusivamente por el centro del polígono dado por la imagen del polígono central por ab (ver la Figura 7.6 arriba a la izquierda). Luego procedemos inductivamente como sigue: si hemos trazado el círculo de radio d_k y estamos seguros que hasta ese punto no ha habido saltos de distancias, entonces trazaremos el círculo de radio d_{k+1} y veremos si queda algún centro entremedio de éste círculo y el anterior. Si eso no sucede, continuamos trazando círculos. Si sucediera, entonces nos detenemos ahí y declaramos que la lista de distancias hasta d_k no tiene saltos.

En la Figura 7.6 podemos ver ilustrado este procedimiento para verificar que la distancia $d_4 \in D_4$ se corresponde con la distancia $d_4 \in \mathcal{D}$, al no haber saltos en ningún momento de nuestro procedimiento.

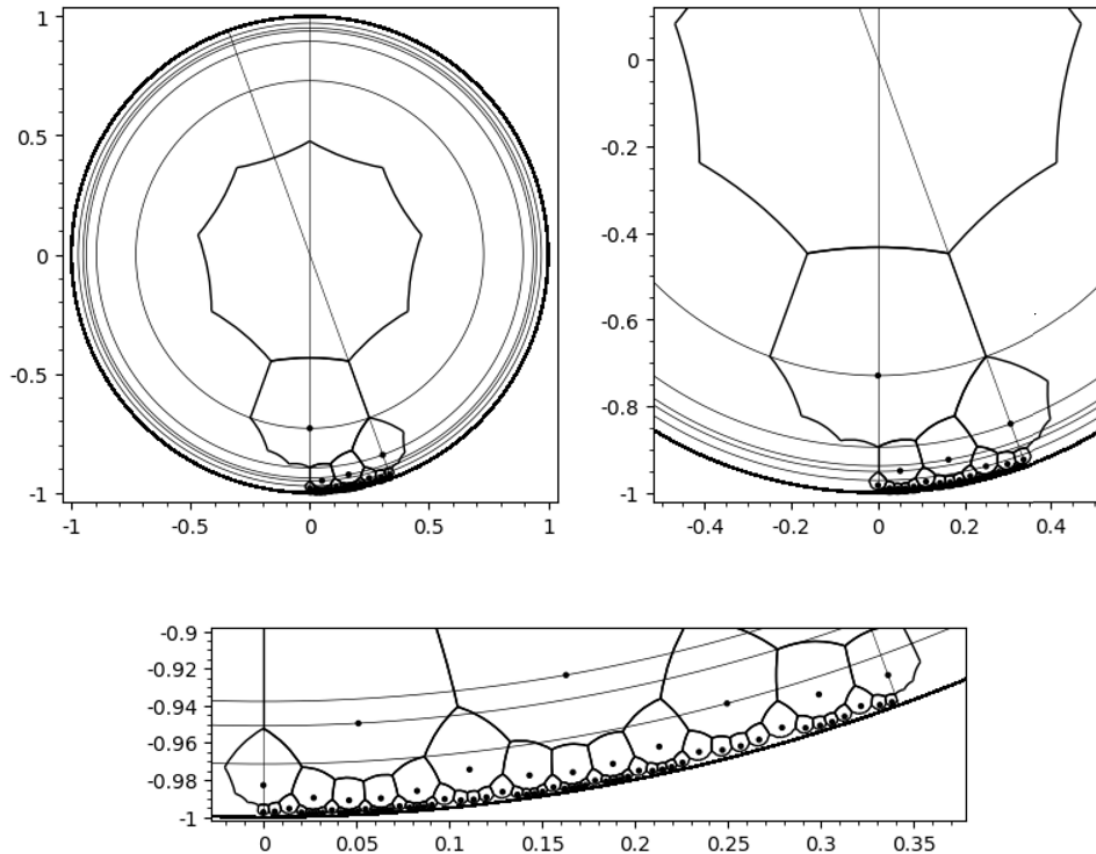


Figura 7.6: Mediante el trazado de los círculos cuyos radios son todas las sucesivas distancias de D_4 podemos ver que no hemos realizado ningún salto, al no haber polígonos cuyo centro esté entre dos círculos consecutivos. En la parte inferior de la figura vemos de manera clara que no puede haber distancias admisibles entre el cuarto y quinto elemento de D_4 .

Recordemos que este proceso tiene una limitación computacional, ya que la diferencia $d_{n+1} - d_n$ entre las distancias sucesivas se hace tan pequeñas como uno quiera, alcanzando inevitablemente al margen de error que SageMath tiene para el trazado de curvas y puntos (ver la Figura 7.7). Esto nos impide concluir de manera inequívoca que realizando este proceso no estamos realizando saltos a medida que consideramos distancias cada vez mayores, y por esto es que detuvimos nuestro proceso en la distancia d_{14} , obteniendo el conjunto de distancias *sin saltos* a continuación:

$$\{1.85507713531909, 2.89096327366147, 3.43821424123011, 3.68102046296157, \\ 4.23208976385255, 4.62525849288381, 4.74604040898054, 4.90671807236233, \\ 5.10205753378543, 5.22578075866160, 5.28586107995031, 5.49629020426209, \\ 5.51477688620382, 5.64012703401185, 5.75149996202801\}.$$

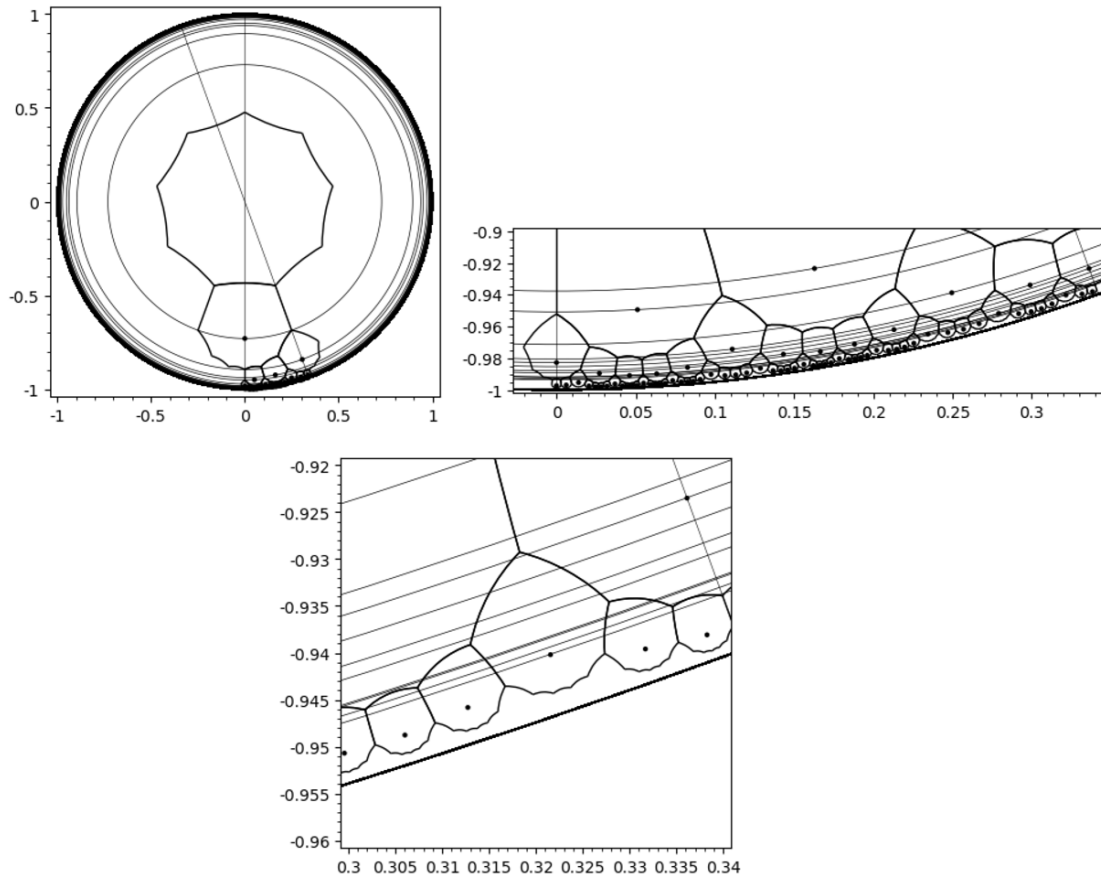


Figura 7.7: A medida que crece n los círculos de radios d_n y d_{n+1} son prácticamente indistinguibles en SageMath, lo cual impide concluir con certeza si es que estamos realizando saltos de distancias o no para valores grandes de n . Considerando que el último círculo de esta figura es de la distancia d_{14} , podemos apreciar cómo es que las distancias d_{10} y d_{11} son prácticamente iguales, lo que hace que parezca un único círculo con un borde más grueso, y la verificación en situaciones como éstas requiere analizar una gran cantidad de ampliaciones de todos los polígonos.

Lo último a tener en cuenta es que, aunque SageMath nos entregue círculos extremadamente juntos, podemos distinguirlos, ordenarlos y determinarlos de manera algebraica si determinamos los valores de $\cosh(d_i)$ a través de trigonometría hiperbólica sobre los triángulos que las mismas figuras anteriores nos van revelando, en un trabajo muy similar al que realizamos en el punto 3 de la verificación algebraica. Esto nos confirma que las 15 distancias d_0, \dots, d_{14} que hemos obtenido de manera visual van en el orden que deben.

7.1 Clasificación total en género 3 y sus cubrimientos dobles

En la sección anterior hemos mejorado nuestro procedimiento geométrico/numérico para que nos permita estudiar la totalidad de k -packings extremales en superficies cuyos dominios fundamentales requieran N -ágonos regulares, donde

$$N \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 24, 30\}.$$

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la totalidad de k -packings extremales en la totalidad de las superficies k -extremales no-orientables de género 3, y para ello debemos tener en cuenta lo siguiente.

Observemos que, gracias a la caracterización dada en la sección de la existencia de este tipo de superficies, sabemos que los posibles valores de k que estudiaremos aquí serán precisamente aquellos que cumplan que k divide a $6(g - 2) = 6(3 - 2) = 6$, es decir, $k \in \{1, 2, 3, 6\}$. Esto nos indica que debemos estudiar la totalidad de superficies no-orientables k -extremales de género g para los siguientes pares (g, k) :

$$(3, 1), \quad (3, 2), \quad (3, 3), \quad (3, 6).$$

Por otro lado, por la caracterización de las superficies no-orientables k -extremales de género g en términos de grupos triangulares dada en el Corolario 3.4.1 tenemos que la totalidad de las superficies no-orientables k -extremales de género g es equivalente a la totalidad de subgrupos de índice $2kN$ del grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$, donde $N = 6 + \frac{6(g-2)}{k}$. En nuestro caso esto se traduce en tener que estudiar la totalidad de subgrupos de índice i_N (que admitan algún elemento anticonformal) dentro del grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, N)$ para los siguientes pares (N, i_N) :

$$(12, 24), \quad (9, 36), \quad (8, 48), \quad (7, 84).$$

Si le pedimos a GAP que nos entregue la totalidad de subgrupos de $\Delta^\pm(2, 3, N)$ de índice i_N módulo conjugación en $\Delta^\pm(2, 3, N)$ (con algún elemento anticonformal) para cada uno de los valores anteriores, obtendremos en cada caso una lista de j_N subgrupos, donde los pares (N, j_N) son

$$(12, 11), \quad (9, 4), \quad (8, 23), \quad (7, 12).$$

Estudiaremos las $11 + 4 + 23 + 12 = 50$ superficies resultantes de manera exhaustiva³, es decir, analizaremos *todos* los posibles centros de nuevos k -packings para el k que estemos considerando, gracias al procedimiento geométrico/numérico del capítulo 4 junto con las mejoras realizadas en la sección anterior. Condensaremos los pasos a seguir en un nuevo procedimiento que incluya la verificación geométrica/numérica mejorada junto con la verificación algebraica, el cual primero expondremos de manera general y luego desarrollaremos en el caso particular de una superficie de $N = 9$ (para mayor detalle consulte nuestro artículo [GR21a]).

³ Las 11 superficies 1-extremales no-orientables de género 3 ($N = 12$) ya fueron estudiadas por Girono y Nakamura en [GN07], pero las analizaremos igual por un tema de completitud.

Procedimiento total (para un N dado).

1. Definimos una lista de distancias admisibles sin saltos para el N considerado.
2. Tomamos un subgrupo de índice i_N del grupo $K \leq \Delta^\pm(2, 3, N)$ con GAP, y con esa información determinamos un dominio fundamental F para K y un conjunto de sidepairings asociados a F que generarán K .
3. Observando cómo se distribuyen las bananas de todos los sidepairings dentro de F elegimos un cierto conjunto de sidepairings cuya totalidad de bananas se concentren en un círculo de radio r_c (recordar el Teorema 7.1).
4. Consideramos todos los puntos de intersección de dichas bananas y luego verificamos numéricamente, con un margen de error $< 10^{-4}$, cuáles de ellos se mueven una distancia admisible de nuestra lista *por todos los sidepairings que definen K* .
5. Verificamos que los candidatos que hayan pasado el punto anterior son centros de una nueva teselación, lo cual haremos encontrando para cada uno de ellos una cierta rotación de \mathbb{D} que induzca un automorfismo de la superficie. Este automorfismo enviará la teselación original en una nueva de tal manera que esta última admite como uno de sus centros el candidato considerado.
6. Realizamos la verificación algebraica de que la rotación definida en el punto anterior induce efectivamente un automorfismo de la superficie, viendo que al conjugar cada sidepairing por ella obtenemos un elemento de K .

Aplicaremos el procedimiento anterior en el caso de $N = 9$, pero no es difícil replicar estas ideas para los demás valores requeridos de $g = 3$ dados por $N \in \{7, 8, 12\}$.

1. La lista de distancias admisibles sin saltos que consideraremos aquí es precisamente la que calculamos en la sección anterior, que es

$\{1.85507713531909, 2.89096327366147, 3.43821424123011, 3.68102046296157,$
 $4.23208976385255, 4.62525849288381, 4.74604040898054, 4.90671807236233,$
 $5.10205753378543, 5.22578075866160, 5.28586107995031, 5.49629020426209,$
 $5.51477688620382, 5.64012703401185, 5.75149996202801\}.$

2. Tomaremos (como ejemplo) el segundo de los 4 grupos de índice 36 en $\Delta^\pm(2, 3, 9)$ que GAP nos entrega a través del comando `LowIndexSubgroupsFPGroup`, y lo denotaremos por $K_{(9,-,2)}$ (donde el 9 es por el N asociado, el signo $-$ es porque uniformiza una superficie no-orientable, y el 2 porque es el segundo elemento de la lista de grupos). Dicho software le asocia a $K_{(9,-,2)}$ un morfismo de $\Delta^\pm(2, 3, 9)$ en $\Delta^\pm(2, 3, 9)/K_{(9,-,2)}$, donde este último conjunto consiste en 36 cosets que identificaremos con los números del 1 al 36, haciendo que sea equivalente hablar de las permutaciones del conjunto $\Delta^\pm(2, 3, 9)/K_{(9,-,2)}$ que hablar de S_{36} .

Las imágenes en S_{36} de los elementos a, b, c por dicho morfismo resultan ser

$$\begin{aligned}
 a &= (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10)(11, 12)(13, 14)(15, 16)(17, 18)(19, 20) \\
 &\quad (21, 22)(23, 24)(25, 26)(27, 28)(29, 30)(31, 32)(33, 34)(35, 36), \\
 b &= (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)(9, 13)(10, 14)(11, 15)(12, 16)(17, 23)(18, 24) \\
 &\quad (19, 27)(20, 28)(21, 29)(22, 30)(25, 33)(26, 34)(31, 35)(32, 36), \\
 c &= (1, 4)(2, 5)(3, 7)(6, 9)(8, 11)(10, 17)(12, 19)(13, 15)(14, 21)(16, 25) \\
 &\quad (18, 31)(20, 32)(22, 24)(23, 29)(26, 28)(27, 33)(30, 35)(34, 36).
 \end{aligned}$$

Podemos interpretar a, b, c geoméricamente⁴ como las reflexiones en \mathbb{D} cuyos ejes son respectivamente las geodésicas \overline{BC} , \overline{AB} y \overline{CA} en la Figura 7.8 izquierda.

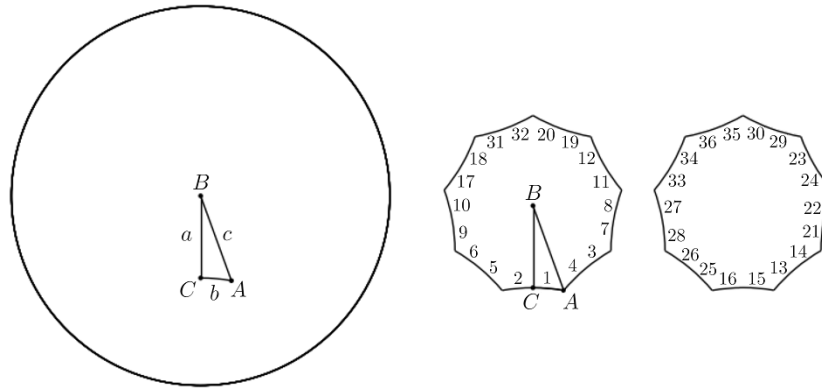


Figura 7.8: A la izquierda tenemos un dominio fundamental del grupo $\Delta^\pm(2, 3, 9)$ dado por un triángulo de ángulos $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$ y $\angle B = \frac{\pi}{9}$. Los polígonos a la derecha conforman un dominio fundamental para $K_{(9,-,2)}$.

Como los números $\{1, \dots, 36\}$ nos indican los cosets del espacio $\Delta^\pm(2, 3, 9)/K_{(9,-,2)}$, entonces podemos ir aplicando las reflexiones (o permutaciones) a y c sucesivamente al $\triangle ABC$ (o coset 1) para obtener el polígono dado en la figura central de la Figura 7.8. Para ubicar los números en el segundo polígono vamos observando en sentido contrareloj desde 1 cuál es el primer número al que no le corresponde, a través de b , un número del polígono central. Así vemos que 11 es el primer número del polígono central al que no le corresponde por b un número de dicho polígono, pues le corresponde 15, y con este último número construimos el nuevo polígono de la misma manera que el central (ver la Figura 7.8 derecha). Si ahora “pegamos” estos dos polígonos por la arista que relaciona 11 y 15 obtenemos la Figura 7.9 izquierda, que nos entrega un dominio fundamental F para $K_{(9,-,2)}$.

⁴ Aunque este trabajo parezca trivial en el caso ejemplificado, debemos aclarar que aquí buscamos construir un dominio conexo y con sidepairings cuyas bananas cubran algún polígono (acorde a lo visto en la sección anterior), y para grandes valores de k esto se hace tremendamente difícil. En particular podemos asegurar que acomodar los polígonos para $k = 12$ es un calvario (ver Figura 7.18).

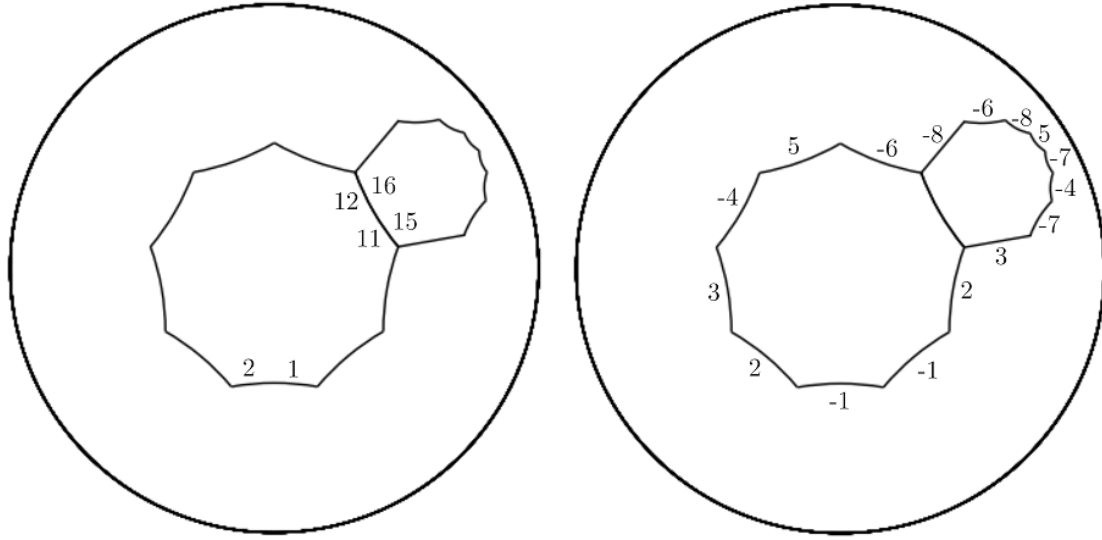


Figura 7.9: Dominio fundamental F y sidepairings que definen el grupo $K_{(9,-,2)}$.

Para hallar las identificaciones entre los demás lados de este dominio F es suficiente relacionar los números asociados a cada triángulo dentro de cada polígono mediante la permutación asociada a b , con lo cual podemos obtener los sidepairings dados en la Figura 7.9 derecha. Si escribimos dichos sidepairings en términos de a, b, c obtenemos la Tabla 7.1.

	Sidepairing	Palabra en los generadores de $\Delta^\pm(2, 3, 9)$
s_1	$(-, 1_0, 1_1)$	$(ca)b$
s_2	$(+, 1_8, 1_2)$	$(ca)^2ab(ca)$
s_3	$(+, 1_7, 5_1)$	$(ca)^3ab(ca)ab(ca)^2$
s_4	$(-, 1_6, 5_3)$	$(ca)^3ab(ca)^3b(ca)^3$
s_5	$(+, 1_5, 5_5)$	$(ca)^3ab(ca)^5ab(ca)^4$
s_6	$(-, 1_4, 5_7)$	$(ca)^3ab(ca)^{-2}b(ca)^5$
s_7	$(-, 5_2, 5_4)$	$(ca)^3ab(ca)^4b(ca)^{-2}ab(ca)^{-3}$
s_8	$(-, 5_8, 5_6)$	$(ca)^3ab(ca)^{-3}b(ca)ab(ca)^{-3}$

Tabla 7.1: Conjunto de sidepairings que generan el grupo $K_{(9,-,2)}$.

3. Luego de observar las bananas de algunos sidepairings y cómo se distribuyen en relación al dominio fundamental que hemos considerado, nos enfocaremos en el círculo circunscrito al polígono central (ver la Figura 7.10).

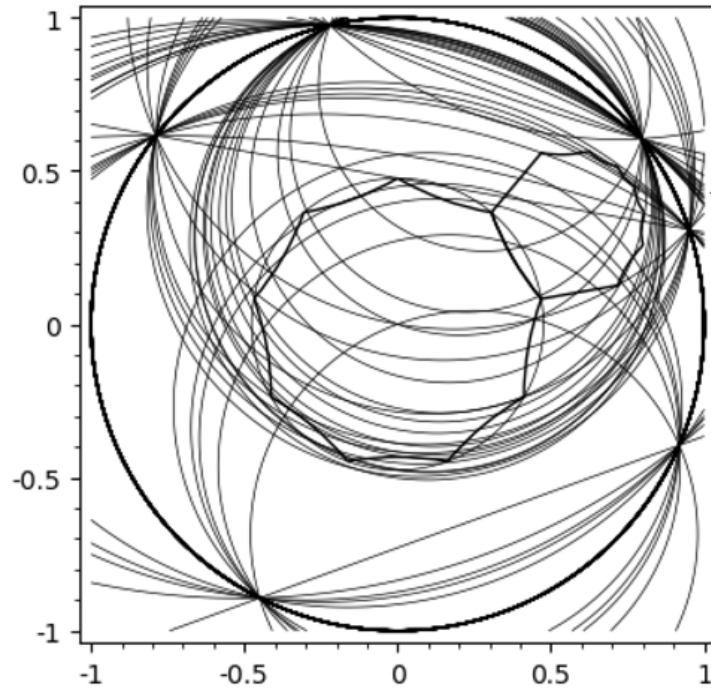


Figura 7.10: Bananas de algunos sidepairings junto al círculo circunscrito al polígono central.

Podemos ver que con unas pocas bananas de los sidepairings s_1, s_4 y s_5 podemos cubrir dicho círculo por completo (ver Figura 7.11), por lo tanto nuestro análisis de *todos* los posibles centros de nuevas teselaciones se reduce a observar en dicho círculo todos los posibles puntos de intersección *comunes a esos tres sidepairings*.

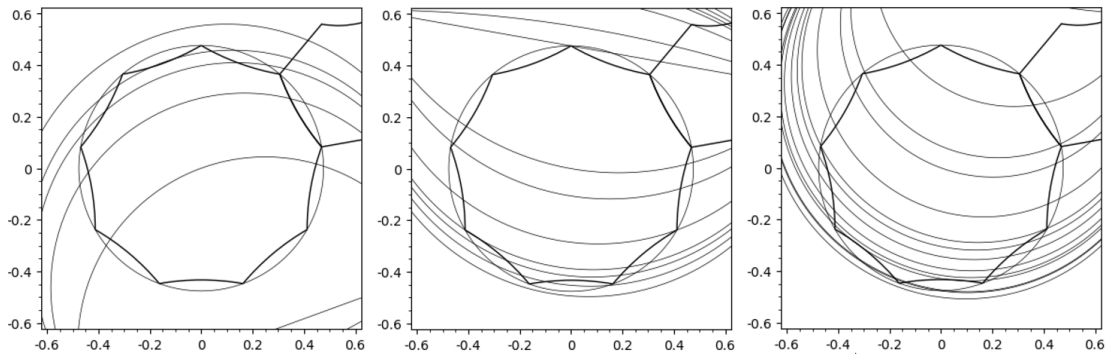


Figura 7.11: Las bananas 0 a la 4 del sidepairing 1 (izquierda); las bananas 2 a la 8 del sidepairing 4 (al medio); y las bananas 1 a la 13 del sidepairing 5 (derecha) cubren por completo el círculo de radio r_c que hemos elegido.

4. Si observamos atentamente todos los cortes de esos tres sidepairings en el interior y en el borde del círculo elegido notaremos que los únicos candidatos posibles son los puntos marcados por ■ en la Figura 7.12.

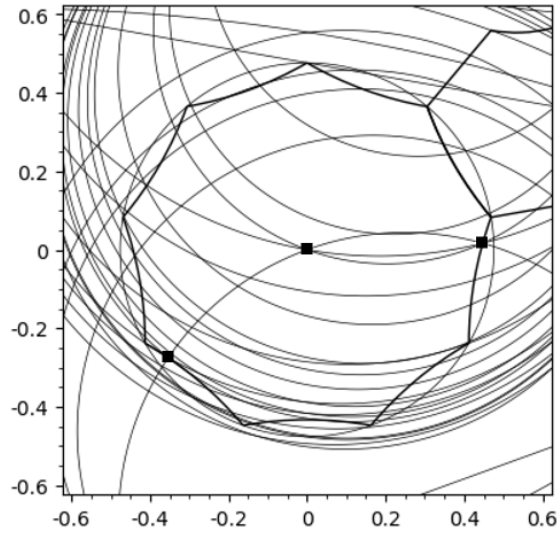


Figura 7.12: Todos los candidatos posibles asociados a los sidepairings s_1, s_4 y s_5 en el círculo circunscrito al polígono central.

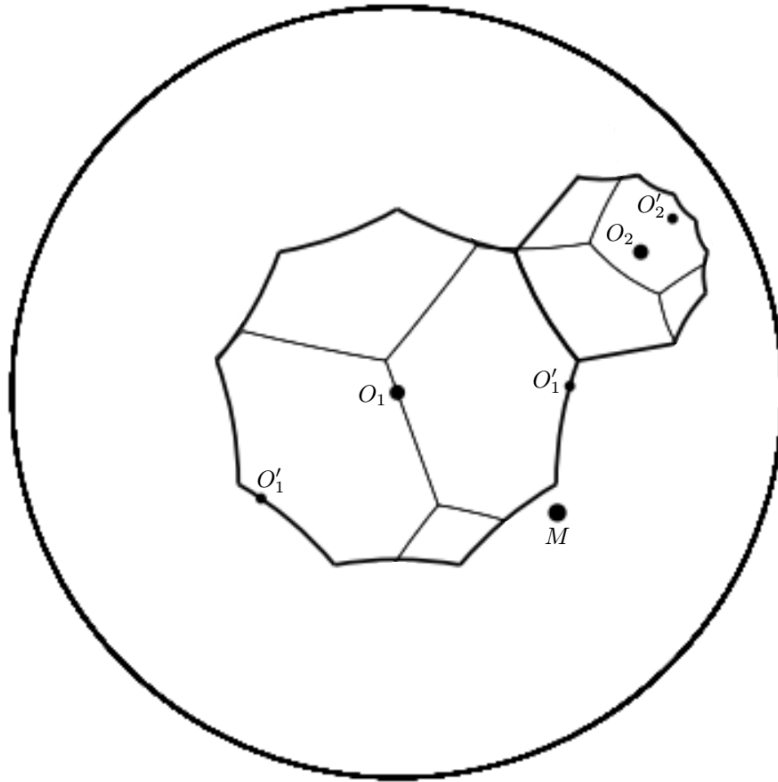
Evidentemente uno de estos puntos es el centro del polígono, y los otros dos candidatos resultan ser equivalentes módulo K ya que el de la derecha es la imagen del izquierdo por el sidepairing s_2 . De esta manera todo se reduce a analizar uno de ellos, y elegiremos el de la derecha, cuyas coordenadas son

$$x \approx 0.4475 + 0.0165i.$$

Si le pedimos a SageMath que determine, con un margen de error $< 10^{-4}$, si es que dicho punto se traslada una distancia admisible *por cada sidepairing*, obtenemos una respuesta afirmativa, ya que x se traslada la distancia admisible d_{i_j} por el sidepairing s_j según los pares (s_j, d_{i_j}) siguientes:

$$(s_1, d_0), (s_2, d_0), (s_3, d_0), (s_4, d_2), (s_5, d_3), (s_6, d_1), (s_7, d_1), (s_8, d_1).$$

5. Probando con los distintos centros de la teselación original podemos verificar (tal cual lo hemos hecho en el punto 7 del procedimiento geométrico/numérico para el caso $N = 14$ no-orientable en la Sección 4) que la rotación de orden dos que permuta a los puntos x y $(ca)ab(0)$ conjuga a cada sidepairing en un elemento de K . Obtenemos así la Tabla 7.13 de conjugaciones de los sidepairings por la rotación τ , lo cual nos indica que τ normaliza K , y por lo tanto induce un automorfismo de la superficie que envía el 2-packing extremal trivial en uno diferente (ver la Figura 7.13). Todavía nos queda por ver si estos cálculos aproximados son efectivamente ciertos, y por lo tanto procedemos al punto de la verificación algebraica a continuación.



Sidepairing s	$k = \tau s^{-1} \tau$
s_1	s_1
s_2	s_2
s_3	s_3
s_4	$s_1 s_4 s_1^{-1}$
s_5	$s_1 s_5 s_1^{-1}$
s_6	$s_1 s_6 s_1^{-1}$
s_7	$s_1^{-1} s_7^{-1} s_5 s_1^{-1}$
s_8	$s_1 s_6 s_1^{-1}$

Figura 7.13: Conjugación de cada sidepairing por el elemento τ , que es la rotación de orden dos que permuta x y O' (O'_1 y $(ca)ab(0)$ respectivamente, donde este último es equivalente a O_1 módulo K) y que fija M . En la figura tenemos que los puntos O'_i son centros de la nueva teselación, vistos en el dominio fundamental original cuyos centros son O_i , de tal manera que $O'_i = \tau(O_i)$.

6. La verificación algebraica funciona exactamente igual que en los análisis anteriores que ya hemos realizado. En este caso tenemos que el número

$$u_0 = e^{\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{9})}\right)} \approx 2.5282$$

es la mayor solución real de su polinomio mínimo

$$x^{12} - 6x^{10} - x^8 - \frac{28x^6}{3} - x^4 - 6x^2 + 1.$$

Recordemos que aquí no es necesario extender $\mathbb{Q}(u_0)$ con el elemento u_1 , ya que $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \in \mathbb{Q}(u_0)$.

Las matrices asociadas a \bar{a} , \bar{b} y \bar{c} son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & u_0^{-1} \\ u_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3u_0^{10}}{16} - \frac{33u_0^8}{32} - \frac{3u_0^6}{4} - \frac{31u_0^4}{16} - \frac{11u_0^2}{16} - \frac{25}{32} \\ -\frac{3u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{9u_0^7}{32} + \frac{23u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{61u_0}{64} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3u_0^{11}}{64} + \frac{21u_0^9}{64} - \frac{9u_0^7}{32} + \frac{23u_0^5}{32} - \frac{43u_0^3}{64} + \frac{61u_0}{64} \\ -\frac{3u_0^{10}}{16} + \frac{33u_0^8}{32} + \frac{3u_0^6}{4} + \frac{31u_0^4}{16} + \frac{11u_0^2}{16} + \frac{25}{32} \end{pmatrix}.$$

Realizando los cálculos indicados en el procedimiento algebraico llegamos a que el valor explícito de u_2 en este caso es

$$u_2 = \sqrt{\frac{3u_0^{10}}{32} - \frac{33u_0^8}{64} - \frac{3u_0^6}{8} - \frac{31u_0^4}{32} - \frac{11u_0^2}{32} + \frac{39}{64}} \notin \mathbb{Q}(u_0).$$

En estas condiciones tenemos que

$$[\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(u_0)(u_2) : \mathbb{Q}(u_0)] \cdot [\mathbb{Q}(u_0) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 12 = 24.$$

De esta manera la matriz asociada a $\bar{\tau}$ resulta $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_3 & -\tau_1 \end{pmatrix}$ (donde τ_1, τ_2, τ_3 son

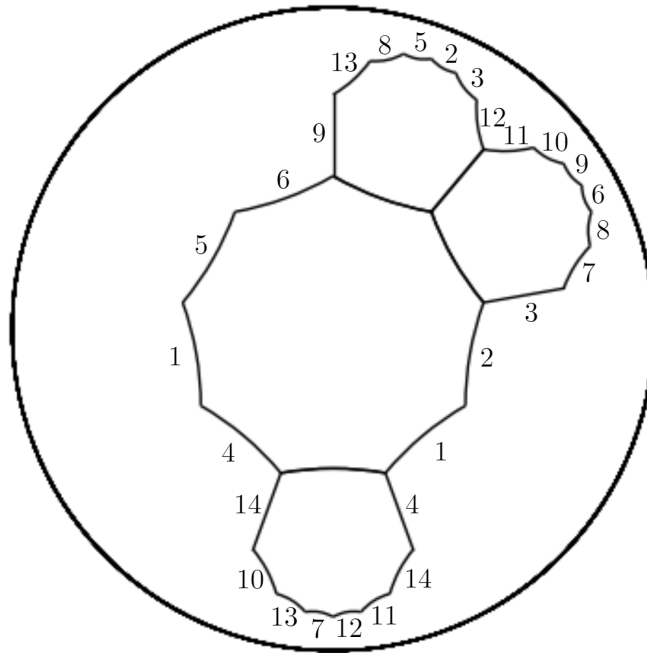
$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left(-\frac{131u_0^{11}}{272} + \frac{771u_0^9}{272} + \frac{25u_0^7}{34} + \frac{1007u_0^5}{204} + \frac{403u_0^3}{272} + \frac{977u_0}{272} \right) u_2, \\ \tau_2 &= \left(-\frac{75u_0^{10}}{136} + \frac{891u_0^8}{272} + \frac{111u_0^6}{136} + \frac{317u_0^4}{68} + \frac{57u_0^2}{34} + \frac{865}{272} \right) u_2, \\ \tau_3 &= \left(\frac{21u_0^{10}}{136} - \frac{285u_0^8}{272} + \frac{87u_0^6}{136} - \frac{7u_0^4}{4} + \frac{19u_0^2}{34} - \frac{343}{272} \right) u_2. \end{aligned}$$

Con esto finalizamos el estudio de la superficie 2-extremal no-orientable de género 3 uniformizada por $K_{(9,-,2)}$, concluyendo que ésta admite *exactamente* dos 2-packings extremales.

Para complementar y finalizar de una vez por todas el estudio de nuestra superficie no-orientable uniformizada por $K_{(9,-,2)}$ consideraremos su cubrimiento doble, que según el Teorema 6.1 es una superficie 4-extremal orientable de género 2. Esta superficie estará uniformizada por un grupo Fuchsiano de índice 36 en el grupo triangular extendido $\Delta^\pm(2, 3, 9)$, y si le pedimos a GAP la lista completa de esos subgrupos podemos comprobar que el cubrimiento doble de $K_{(9,-,2)}$ es el décimotercer grupo de dicha lista, es decir

$$(K_{(9,-,2)})^+ = K_{(9,+,13)}.$$

Realizando para $K_{(9,+,13)}$ un estudio análogo que el que hicimos para $K_{(9,-,2)}$ obtendremos un dominio fundamental y unos sidepairings como en la Figura 7.14.



Sidepairings que generan $K_{(9,+,13)}$			
s_1	$(+, 1_1, 1_7)$	s_8	$(+, 5_3, 6_6)$
s_2	$(+, 1_2, 6_4)$	s_9	$(+, 5_5, 6_8)$
s_3	$(+, 5_1, 6_3)$	s_{10}	$(+, 5_6, 2_2)$
s_4	$(+, 1_8, 2_8)$	s_{11}	$(+, 5_7, 2_6)$
s_5	$(+, 1_6, 6_5)$	s_{12}	$(+, 6_2, 2_5)$
s_6	$(+, 1_5, 5_4)$	s_{13}	$(+, 6_7, 2_3)$
s_7	$(+, 5_2, 2_4)$	s_{14}	$(+, 2_1, 2_7)$

Figura 7.14: Dominio fundamental y sidepairings para la superficie 4-extremal orientable de género 2 uniformizada por $K_{(9,+,13)}$.

Antes de estudiar la totalidad de sus 4-packings consideramos conveniente notar que esta superficie orientable debe admitir una involución anticonformal que no fije puntos y que al tomar el cociente por dicha involución obtendremos la superficie uniformizada por $K_{(9,-,2)}$.

Si le pedimos a GAP la totalidad de automorfismos de la superficie $\mathbb{D}/K_{(9,+,13)}$ inducidos por elementos del grupo triangular $\Delta^\pm(2, 3, 9)$ obtendremos que solamente tiene dos:

$$\sigma_1 = aca^{-1}, \quad \sigma_2 = (ca)^2(bc)a(cb)(ca)^{-3}.$$

La primera involución tiene traza 0, por lo que es una reflexión, y en consecuencia el cociente de esta superficie orientable por σ_1 nos dará una superficie con borde. De hecho el conjunto de puntos fijos de esta reflexión es la geodésica cerrada marcada con líneas punteadas en la Figura 7.15. En este caso el cociente de la superficie orientable por σ_1 no será la superficie no-orientable uniformizada por $K_{(9,-,2)}$.

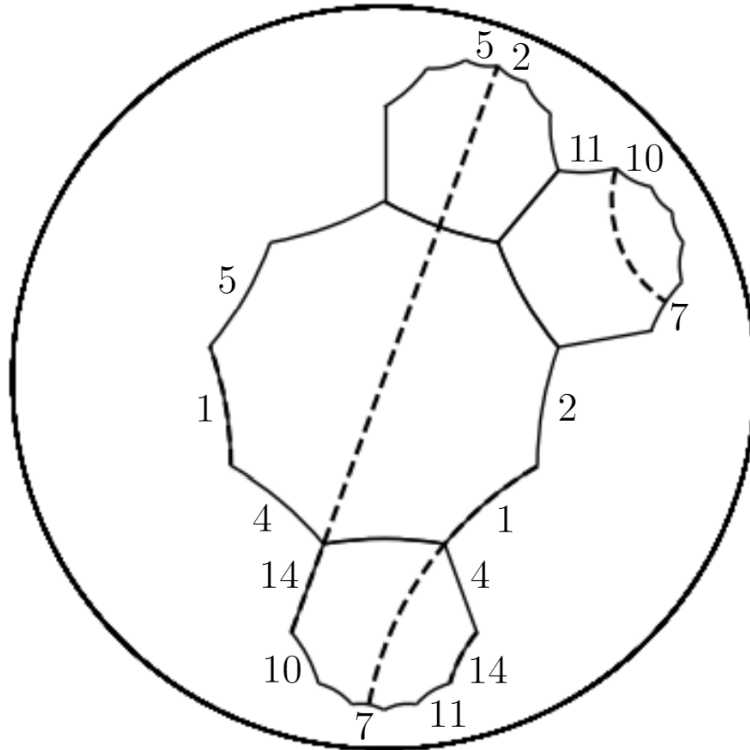


Figura 7.15: La geodésica cerrada en líneas punteadas representa el conjunto de puntos fijos del automorfismo inducido por la involución σ_1 en el dominio fundamental de la superficie uniformizada por $K_{(9,+,13)}$.

Por otro lado tenemos que la involución σ_2 tiene traza no nula, y de hecho podemos ver, gracias a GAP, que el grupo generado por $K_{(9,+,13)}$ y σ_2 es conjugado a $K_{(9,-,2)}$ gracias a que el software nos indica que

$$a \cdot \langle K_{(9,+,13)}, \sigma_2 \rangle \cdot a^{-1} = K_{(9,-,2)}.$$

Si ahora procedemos a estudiar la totalidad de los 4-packings extremales sobre este cubrimiento doble notaremos que solamente tiene dos, y los podemos visualizar en la Figura 7.16. Esto está en perfecta concordancia con el Teorema 6.2, pues éste habría imposibilitado que el cubrimiento doble hubiera tenido menos de dos 4-packing extremales.

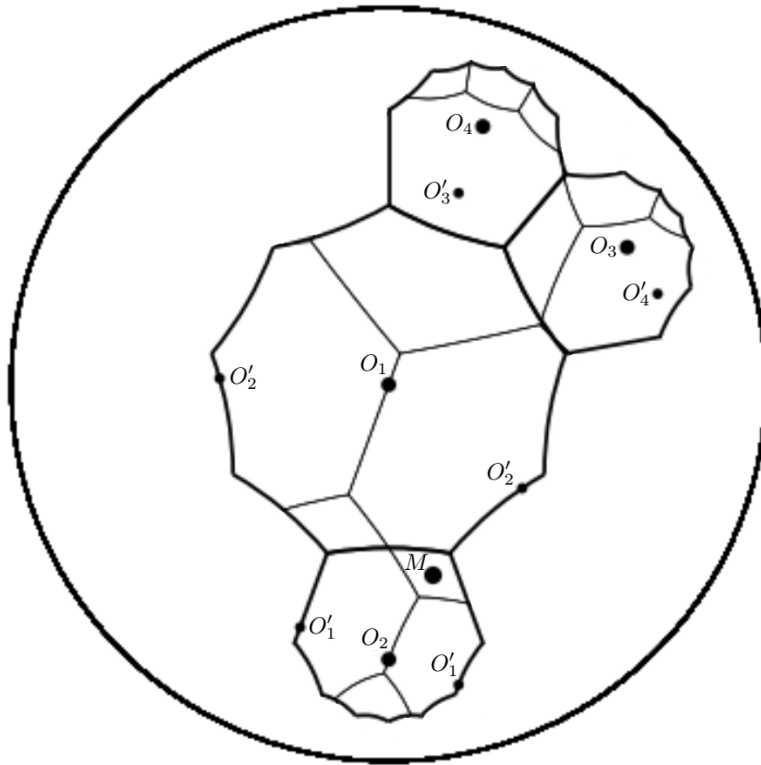


Figura 7.16: La superficie de Riemann 4-extremal de género 2 uniformizada por $K_{(9,+,13)}$ admite exactamente dos 4-packings. En este caso el automorfismo τ que envía una teselación en la otra es aquel inducido por la rotación de orden 2 que fija a M , que es el punto medio entre $O'_2 \approx 0.3535 - 0.2749i$ y O_2 .

Observemos, por último, que la imagen de los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 a través de σ_2 son, respectivamente, O_2, O_1, O_4 y O_3 , lo cual indica que la unión de esos 4 polígonos *colapsa* sobre 2 de ellos sin fijar puntos, generando la superficie no-orientable original (ver Figura 7.17).

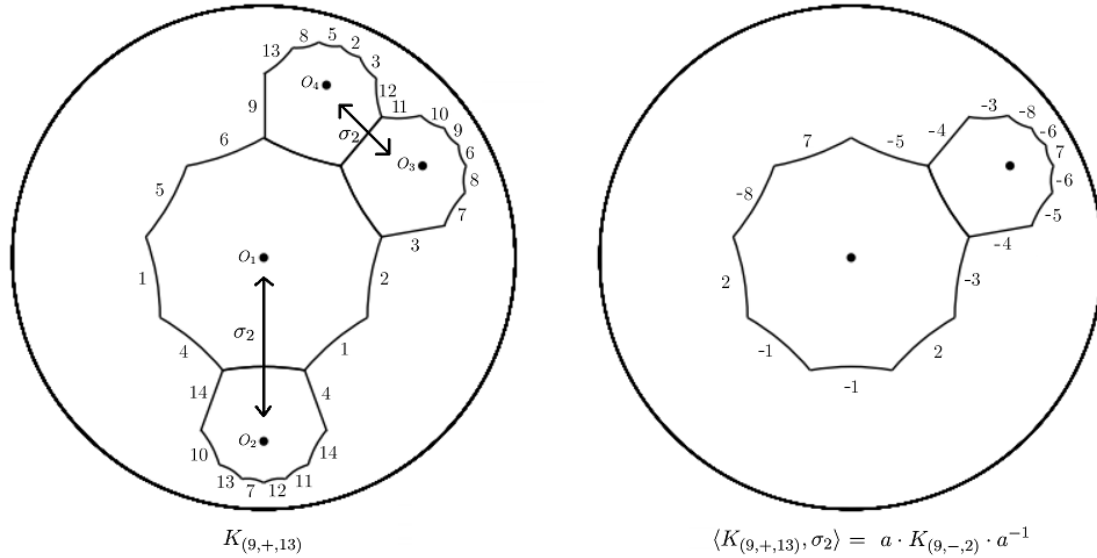


Figura 7.17: Los centros O_1, O_2, O_3, O_4 van por σ_2 a O_2, O_1, O_4, O_3 , respectivamente (izquierda). Los 4 polígonos asociados colapsan en 2 y generan un grupo conjugado al que uniformiza a nuestra superficie no-orientable original (derecha).

En resumen, acabamos de realizar el estudio exhaustivo de los posibles 2-packings extremales de la superficie uniformizada por $K_{(9,-2)}$ y de los posibles 4-packings de su cubrimiento doble. Podemos replicar el estudio que hemos hecho en este caso para así poder estudiar las restantes 49 superficies no-orientables $K_{(N,-i)}$ asociadas a los valores de $N \in \{7, 8, 9, 12\}$ y $i \in \{1, \dots, j_N\}$ (recuerde la definición de j_N al inicio de esta sección), junto con sus 49 cubrimientos dobles respectivos (para ver la información detallada de cada una de las 50 superficies no-orientables y sus 50 cubrimientos dobles puede visitar el sitio web [Gir21]). Así obtenemos el siguiente:

Teorema 7.2. *Los siguientes dos puntos son verdaderos:*

1. *La cantidad de k -packings extremales que cualquier superficie k -extremal no-orientable de género 3 puede admitir está condensada en la tabla a continuación.*

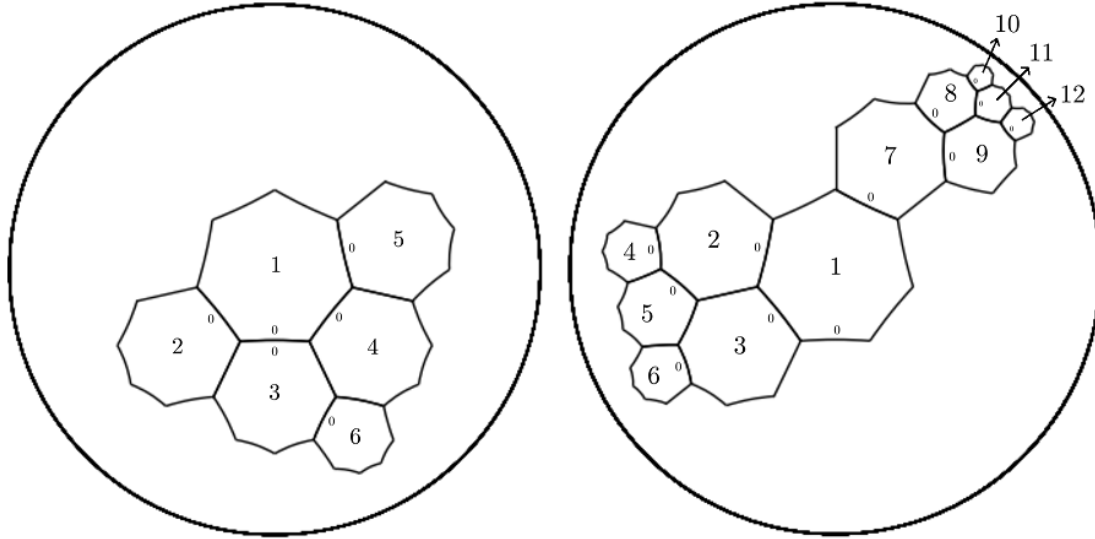
Superficies k -extremales no-orientables de género 3			
k	N	# de superficies	# de discos extremales (# de superficies)
6	7	12	1(3) ó 2(9)
3	8	23	1(8) ó 2(15)
2	9	4	1(1) ó 2(3)
1	12	11	1(1) ó 2(10)

2. *El número de $2k$ -packings extremales del cubrimiento doble de una superficie k -extremal no-orientable de género 3 es exactamente igual al número de k -packings extremales de esta última.*

Para finalizar este último capítulo, y en consecuencia todo este largo trabajo, los dejamos con una bella imagen asociada a un ejemplo para cada uno de los valores de N restantes, es decir, $N \in \{7, 8, 12\}$, junto a su cubrimiento doble y los sidepairings que definen sus grupos uniformizadores. Hemos utilizado una numeración diferente para denotar los sidepairings de estas superficies, cuya única diferencia con lo establecido en el punto 1 del procedimiento geométrico/numérico del capítulo 4 es que ahora el dominio fundamental no solamente estará compuesto del polígono central P_0 y polígonos de la forma $ca^m ab(P_0)$, sino también por otros polígonos más lejanos del origen. Es por esta razón que el número asociado a los polígonos a continuación no está directamente relacionado con dicho valor m , y como no hay una manera canónica de asociarle un número a cada polígono entonces le hemos puesto a cada uno el que hemos querido. Por último, queremos destacar que los ejemplos que hemos elegido ilustran de buena manera las posibilidades que nos entregan los cubrimientos dobles y las involuciones anticonformes requeridas para obtener de vuelta la superficie no-orientable.

Eso es todo. Esperamos de todo \heartsuit que este trabajo haya sido de vuestro agrado.

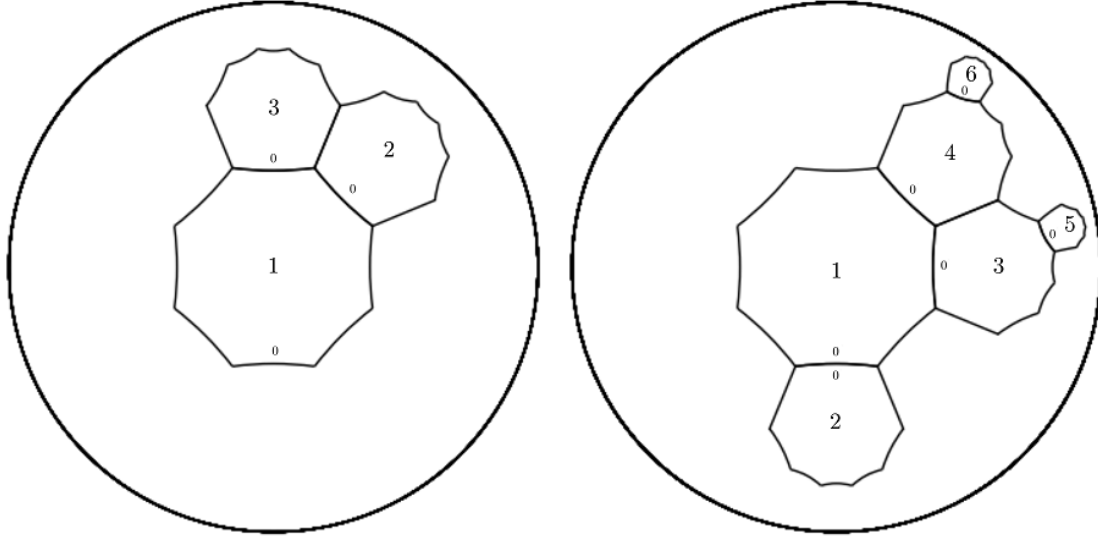
Ejemplo N=7. Consideremos el grupo NEC $K_{(7,-,3)}$ que uniformiza una superficie 6-extremal no-orientable de género 3; y el grupo Fuchsiano $K_{(7,+,5)}$ que uniformiza su cubrimiento doble: una superficie de Riemann 12-extremal de género 2.



Sidepairings que generan $K_{(7,-,3)}$		Sidepairings que generan $K_{(7,+,5)}$			
s_1	$(+, 1_5, 2_5)$	s_1	$(+, 3_6, 2_2)$	s_{13}	$(+, 1_4, 1_1)$
s_2	$(+, 1_4, 3_2)$	s_2	$(+, 3_5, 5_4)$	s_{14}	$(+, 7_6, 1_2)$
s_3	$(+, 1_3, 4_4)$	s_3	$(+, 3_4, 6_2)$	s_{15}	$(+, 7_5, 7_1)$
s_4	$(+, 5_6, 4_5)$	s_4	$(+, 6_6, 6_3)$	s_{16}	$(+, 7_4, 9_1)$
s_5	$(+, 5_5, 5_2)$	s_5	$(+, 6_5, 10_5)$	s_{17}	$(+, 8_6, 9_2)$
s_6	$(-, 5_4, 5_3)$	s_6	$(+, 6_4, 10_4)$	s_{18}	$(+, 8_5, 11_5)$
s_7	$(+, 2_1, 2_4)$	s_7	$(+, 5_3, 2_3)$	s_{19}	$(+, 8_4, 10_2)$
s_8	$(-, 2_2, 2_3)$	s_8	$(+, 5_2, 4_1)$	s_{20}	$(+, 10_6, 10_3)$
s_9	$(+, 3_3, 4_3)$	s_9	$(+, 4_5, 4_2)$	s_{21}	$(+, 11_4, 9_3)$
s_{10}	$(+, 3_4, 6_5)$	s_{10}	$(+, 4_4, 12_4)$	s_{22}	$(+, 11_3, 12_1)$
s_{11}	$(+, 6_1, 6_4)$	s_{11}	$(+, 4_3, 12_3)$	s_{23}	$(+, 12_5, 12_2)$
s_{12}	$(-, 6_2, 6_3)$	s_{12}	$(+, 2_1, 1_0)$		

Figura 7.18: En la figura vemos dominios fundamentales para los grupos $K_{(7,-,3)}$ y $K_{(7,+,5)}$, respectivamente. Asignamos números a los polígonos y etiquetamos las aristas de cada uno de ellos del 0 al 6 en sentido contrareloj para indicar cuáles son los sidepairings y en qué orden identifican las aristas de sus dominios. El cubrimiento doble tiene una involución anticonformal sin puntos fijos inducida por $\sigma := bcbcacb(ac)^2$, de tal manera que los grupos $K_{(7,-,3)}$ y $\langle K_{(7,+,5)}, \sigma \rangle$ no solamente son conjugados, sino que son exactamente iguales.

Ejemplo N=8. Consideremos el grupo NEC $K_{(8,-,4)}$ que uniformiza una superficie 3-extremal no-orientable de género 3; y el grupo Fuchsiano $K_{(8,+,14)}$ que uniformiza su cubrimiento doble: una superficie de Riemann 6-extremal de género 2.

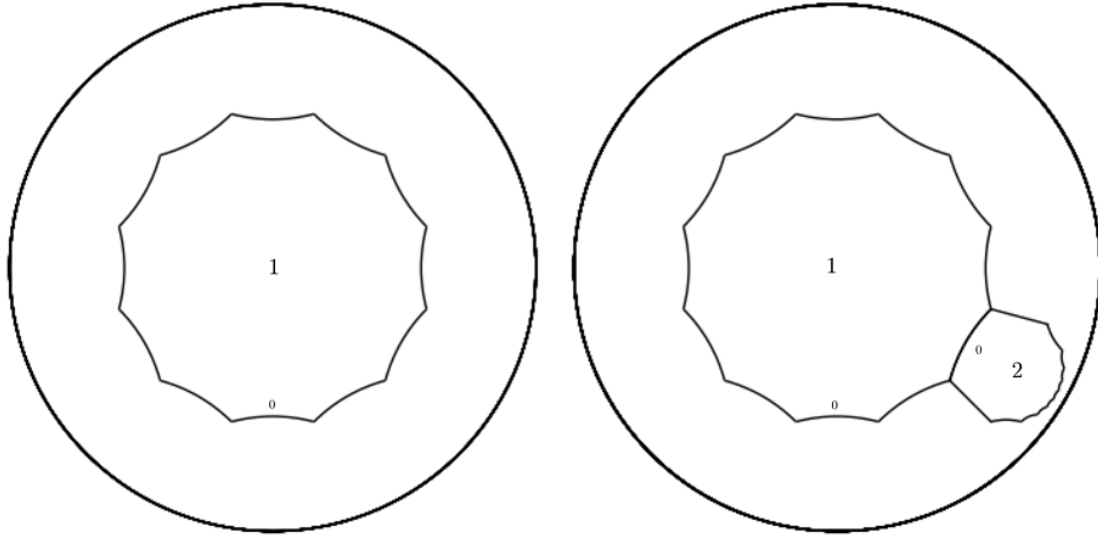


Sidepairings que generan $K_{(8,-,4)}$		Sidepairings que generan $K_{(8,+,14)}$			
s_1	$(-, 1_0, 1_1)$	s_1	$(+, 1_7, 2_7)$	s_{10}	$(+, 6_4, 2_2)$
s_2	$(+, 1_2, 1_7)$	s_2	$(+, 1_6, 1_1)$	s_{11}	$(+, 6_3, 5_3)$
s_3	$(+, 1_5, 3_3)$	s_3	$(+, 1_5, 3_1)$	s_{12}	$(+, 4_2, 3_2)$
s_4	$(+, 1_6, 2_1)$	s_4	$(+, 1_4, 4_3)$	s_{13}	$(+, 3_6, 3_3)$
s_5	$(+, 2_2, 3_2)$	s_5	$(+, 4_7, 4_4)$	s_{14}	$(+, 5_7, 3_4)$
s_6	$(+, 2_3, 2_6)$	s_6	$(+, 4_6, 6_1)$	s_{15}	$(+, 5_6, 5_1)$
s_7	$(-, 2_4, 3_6)$	s_7	$(+, 6_7, 6_2)$	s_{16}	$(+, 5_5, 2_4)$
s_8	$(-, 2_5, 3_5)$	s_8	$(+, 6_6, 5_4)$	s_{17}	$(+, 5_2, 2_3)$
s_9	$(+, 3_4, 3_7)$	s_9	$(+, 6_5, 2_5)$	s_{18}	$(+, 2_6, 2_1)$

Figura 7.19: En la figura vemos dominios fundamentales para los grupos $K_{(8,-,4)}$ y $K_{(8,+,14)}$, respectivamente. Asignamos números a los polígonos y a las aristas análogamente al ejemplo anterior, esta vez del 0 al 7. El cubrimiento doble tiene tres involuciones anticongruentes inducidas por los tres elementos de traza no nula dados por $\sigma_1 := bca$, $\sigma_2 := bca(ca)^2cb(ac)^2$, $\sigma_3 := bca(ca)^2b(ca)^2c$, y sucede la interesante situación de que los tres grupos $\langle K_{(8,+,14)}, \sigma_i \rangle$ son todos conjugados entre sí y a $K_{(8,-,4)}$. De hecho tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 K_{(8,-,4)} &= a \cdot \langle K_{(8,+,14)}, \sigma_1 \rangle \cdot a^{-1} \\
 &= ((ac)^2 ab(ca)^2 c)^{-1} \cdot \langle K_{(8,+,14)}, \sigma_2 \rangle \cdot ((ac)^2 ab(ca)^2 c) \left(\right. \\
 &= ((ac)^3 abcac)^{-1} \cdot \langle K_{(8,+,14)}, \sigma_3 \rangle \cdot ((ac)^3 abcac) \left(\right. \left(\right.
 \end{aligned}$$

Ejemplo N=12. Consideremos el grupo NEC $K_{(12,-,8)}$ que uniformiza una superficie 1-extremal no-orientable de género 3; y el grupo Fuchsiano $K_{(12,+,2)}$ que uniformiza su cubrimiento doble: una superficie de Riemann 2-extremal de género 2.



Sidepairings que generan $K_{(12,-,8)}$		Sidepairings que generan $K_{(12,+,2)}$	
s_1	$(-, 1_0, 1_2)$	s_1	$(+, 1_0, 1_7)$
s_2	$(+, 1_{11}, 1_8)$	s_2	$(+, 1_{11}, 1_6)$
s_3	$(+, 1_{10}, 1_5)$	s_3	$(+, 1_{10}, 1_1)$
s_4	$(+, 1_9, 1_4)$	s_4	$(+, 1_9, 2_1)$
s_5	$(-, 1_7, 1_1)$	s_5	$(+, 1_8, 1_5)$
s_6	$(+, 1_6, 1_3)$	s_6	$(+, 1_4, 2_2)$
		s_7	$(+, 1_3, 2_7)$
		s_8	$(+, 2_{11}, 2_8)$
		s_9	$(+, 2_{10}, 2_5)$
		s_{10}	$(+, 2_9, 2_4)$
		s_{11}	$(+, 2_6, 2_3)$

Figura 7.20: En la figura vemos dominios fundamentales para los grupos $K_{(12,-,8)}$ y $K_{(12,+,2)}$, respectivamente. Asignamos números a los polígonos y a las aristas análogamente a los ejemplos anteriores, esta vez del 0 al 11. El cubrimiento doble tiene dos involuciones anticonformes inducidas por los dos elementos de traza no nula dados por $\sigma_1 := acb$, $\sigma_2 = acbcab(ac)^2$. Es curioso observar que a pesar de que σ_1 tiene traza no nula, induce de todas formas una reflexión en la superficie uniformizada por $K_{(12,+,2)}$, ya que σ_1 es equivalente módulo K al elemento $(ca)^3a(ca)^{-3}$ (que sí tiene traza nula). La involución σ_2 es la que nos entrega la superficie no-orientable uniformizada por $K_{(12,-,8)}$, ya que

$$K_{(12,-,8)} = (ca)^2 \cdot \langle K_{(12,+,2)}, \sigma_2 \rangle \cdot (ca)^{-2}.$$

Bibliografía

- [B $\hat{8}$ 8] Ilie Bârză. The dianalytic morphisms of the Klein bottles. In *Complex analysis, Joensuu 1987*, volume 1351 of *Lecture Notes in Math.*, pages 38–51. Springer, Berlin, 1988.
- [Bav96] Christophe Bavard. Disques extrémaux et surfaces modulaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 5(2):191–202, 1996.
- [BCGG10] Emilio Bujalance, Francisco Javier Cirre, José Manuel Gamboa, and Grzegorz Gromadzki. *Symmetries of compact Riemann surfaces*, volume 2007 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [Bea83] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [BEGG90] Emilio Bujalance, José J. Etayo, José M. Gamboa, and Grzegorz Gromadzki. *Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces*, volume 1439 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. A combinatorial approach.
- [Bör78] K. Böröczky. Packing of spheres in spaces of constant curvature. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 32(3-4):243–261, 1978.
- [BV02] Roland Bacher and Alina Vdovina. Counting 1-vertex triangulations of oriented surfaces. *Discrete Math.*, 246(1-3):13–27, 2002. Formal power series and algebraic combinatorics (Barcelona, 1999).
- [Cox54] H. S. M. Coxeter. Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 5:263–274, 1954.
- [DeB20] Jason DeBlois. Bounds for several-disk packings of hyperbolic surfaces. *J. Topol. Anal.*, 12(1):131–167, 2020.
- [EI06] José Luis Estévez and Milagros Izquierdo. Non-normal pairs of non-Euclidean crystallographic groups. *Bull. London Math. Soc.*, 38(1):113–123, 2006.
- [GAP21] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1*, 2021.
- [GGD99] Ernesto Girondo and Gabino González-Diez. On extremal discs inside compact hyperbolic surfaces. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(1):57–60, 1999.
- [GGD02a] Ernesto Girondo and Gabino González-Diez. Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and Weierstrass points. *Israel J. Math.*, 132:221–238, 2002.
- [GGD02b] Ernesto Girondo and Gabino González-Diez. On extremal Riemann surfaces and their uniformizing Fuchsian groups. *Glasg. Math. J.*, 44(1):149–157, 2002.

- [GGD12] Ernesto Girondo and Gabino González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, volume 79 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [Gir18] Ernesto Girondo. Extremal disc packings in compact hyperbolic surfaces. *Rev. Mat. Complut.*, 31(2):467–478, 2018.
- [Gir21] Ernesto Girondo. Personal webpage at universidad autonoma de madrid. <http://matematicas.uam.es/~ernesto.girondo/>, sept 2021.
- [GN07] Ernesto Girondo and Gou Nakamura. Compact non-orientable hyperbolic surfaces with an extremal metric disc. *Conform. Geom. Dyn.*, 11:29–43 (electronic), 2007.
- [GR21a] Ernesto Girondo and Cristian Reyes. A classification of extremal disc packings in compact non-orientable surfaces of genus three. *Pre-print*, 2021.
- [GR21b] Ernesto Girondo and Cristian Reyes. Multiple extremal disc-packings in compact hyperbolic surfaces. *Submitted for publication*, 2021.
- [GR21c] Ernesto Girondo and Cristian Reyes. A brute force computer aided proof of an existence result about extremal hyperbolic surfaces Symmetries and Moduli Spaces of Algebraic Varieties. In *Geometry at the frontier symmetries and moduli spaces of algebraic varieties*, volume 766 of *Contemp. Math.*, pages 133–152. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2021] ©2021.
- [Izq93] Milagros Izquierdo. Minimal index surface subgroups of non-Euclidean crystallographic groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 67(2):305–328, 1993.
- [Nak02] Gou Nakamura. The number of extremal disks embedded in compact Riemann surfaces of genus two. *Sci. Math. Jpn.*, 56(3):481–492, 2002.
- [Nak04] Gou Nakamura. Generic fundamental polygons for surfaces of genus three. *Kodai Math. J.*, 27(1):88–104, 2004.
- [Nak05] Gou Nakamura. Extremal disks and extremal surfaces of genus three. *Kodai Math. J.*, 28(1):111–130, 2005.
- [Nak09] Gou Nakamura. Compact non-orientable surfaces of genus 4 with extremal metric discs. *Conform. Geom. Dyn.*, 13:124–135, 2009.
- [Nak12] Gou Nakamura. Compact non-orientable surfaces of genus 5 with extremal metric discs. *Glasg. Math. J.*, 54(2):273–281, 2012.
- [Nak13] Gou Nakamura. Compact Klein surfaces of genus 5 with a unique extremal disc. *Conform. Geom. Dyn.*, 17:39–46, 2013.
- [Nak16] Gou Nakamura. Compact non-orientable surfaces of genus 6 with extremal metric discs. *Conform. Geom. Dyn.*, 20:218–234, 2016.
- [Sag18] Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 0.4.1)*, 2018. <https://www.sagemath.org>.
- [Tak77a] Kisao Takeuchi. Arithmetic triangle groups. *J. Math. Soc. Japan*, 29(1):91–106, 1977.
- [Tak77b] Kisao Takeuchi. Commensurability classes of arithmetic triangle groups. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(1):201–212, 1977.