

EDUCAR EN MATEMÁTICAS EN LA ERA DE LOS DATOS

Luis J. Rodríguez Muñiz

Catedrático de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Oviedo

Vicepresidente segundo de la Real Sociedad Matemática Española

RESUMEN

¿Qué matemáticas son relevantes en la era del *big data*? Partiendo de una breve descripción de la evolución de la educación matemática en los últimos años, en este trabajo pretendemos dar alguna respuesta a esta pregunta. Vivimos en la era de los datos, de la inteligencia artificial fuera y dentro del mundo educativo, pero aún en algunos aspectos la educación matemática no ha cambiado en los últimos dos siglos. ¿Debe cambiar la forma en la que las enseñamos y las aprendemos? ¿Qué otros factores, además del currículo, deben considerarse? Para responder a estas cuestiones nos basaremos en documentos de la Real Sociedad Matemática Española [RSME] y otras sociedades científicas y profesionales de matemáticas de España agrupadas en el Comité Español de Matemáticas [CEMat].

1. INTRODUCCIÓN

Ya hace unos años que comenzó a afianzarse la idea de que nuestra sociedad vive la llamada Cuarta Revolución Industrial (Schwab, 2017), caracterizada por la rápida evolución tecnológica, particularmente informática. Esta evolución ha hecho emerger los datos como un elemento de especial relevancia, ya que podemos manejarlos en grandes cantidades (*big data*), en tiempos razonables y aplicar técnicas que no resultaban factibles hace una década. Así, si bien esta Cuarta Revolución Industrial comenzó a llamarse era digital (Shepherd, 2004) o era de la información (Castells, 2005), en los últimos años se están utilizando denominaciones como la era de los datos o la era del *big data* (OECD, 2015). Obviamente, la era de los datos tiene enormes repercusiones en todos los ámbitos sociales, pero en este trabajo nos vamos a centrar en la incidencia en la educación en general (Gleason, 2018; Zeide, 2017) y en la educación matemática en particular (Jankvist y Geraniou, 2022; Manizade et al., 2023).

2. LA FINALIDAD DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

¿Por qué se estudian matemáticas en todos los cursos de la educación obligatoria? Podemos responder señalando su importancia desde un punto de vista instrumental: como herramienta que va a contribuir al desarrollo de otras ciencias o como lenguaje que vertebra el pensamiento científico. Este tipo de respuestas, con ser ciertas, son aplicables solamente una parte, quizá minoritaria, de nuestra sociedad: no toda la población escolar (afortunadamente) acabará dedicándose a la ciencia, la técnica o la ingeniería y, en consecuencia, no tendrá esa necesidad matemática instrumental. Durante muchos siglos y, especialmente tras la Revolución Industrial, la operativa aritmética fue la base (e incluso la totalidad) de la educación matemática: la alfabetización aritmética (las “cuatro reglas” a las que hacían referencia nuestros abuelos). Como señala Goñi, este modelo de educación matemático basado en la laboriosidad y la repetición de algoritmos aritméticos que ocupan horas y horas de actividad escolar ha tenido tanto éxito en la conciencia colectiva que, al plantearse el cambio de currículo matemático,

“reaparece la discusión sobre los beneficios de este tipo de tareas que algunos, extrañamente, asocian a formas superiores de inteligencia” (Goñi, 2010, p. 19).

La carrera espacial generó un estado de alerta en Occidente cuando la URSS consiguió adelantarse a Estados Unidos enviando a Gagarin al primer vuelo tripulado. Esta ventaja soviética se interpretó como un déficit en la educación matemática y científica y llevó a la asunción de la necesidad de una reforma que se concretó en la denominada *matemática moderna*. Partiendo de una interpretación errónea de lo que significaba el movimiento formalista del grupo Bourbaki (Corry, 1992) —que había sido concebido con el propósito de replantear la educación matemática avanzada, y no la escolar— se entendió que la formación matemática en la escuela debía comenzar introduciendo el formalismo a partir de la teoría de conjuntos y su notación matemática, desde las primeras edades y, de manera progresiva, las estructuras algebraicas. Paralelamente, la geometría euclídea prácticamente desapareció. Y estos cambios se realizaron sin una dirección ni finalidad claras, simplemente se pensó que así se daría rigor a la educación matemática. Pero esta secuencia suponía que el alumnado debía manejar desde sus primeros cursos la matemática que había costado siglos construir, en una inversión de la secuencia de aprendizaje en la que la generalización se antepone al estudio de casos particulares, ignorando la psicología del aprendizaje (Goñi, 2010).

La matemática moderna recibió críticas desde los años 70, tanto desde el punto de vista matemático (como el temprano trabajo del Medalla Fields, René Thom, 1971) como desde el didáctico-matemático (como el célebre libro de Morris Kline, 1973). Sin embargo, se perpetuó en los sistemas escolares de muchos países, concretamente en la EGB española, hasta los años 90, generando una ilusión de formalismo vinculada a un aprendizaje “serio” de las matemáticas, que fue especialmente dañino en los países menos desarrollados, al no disponer de una estructura consolidada de investigación en matemáticas y en su didáctica ni de una plantilla de profesorado preuniversitario capaz de entender críticamente el nuevo currículo (D’Ambrosio, 1991).

Estos movimientos educativos unidos a la aceleración del cambio social, científico y tecnológico que caracteriza el final del siglo XX y todo el XXI, llevaron a una profunda reflexión sobre la pregunta de para qué enseñamos matemáticas. No necesitamos formar a personas en la laboriosidad de trabajos rutinarios, al contrario, nuestra capacidad tecnológica nos está llevando a que las tareas que puedan ser automatizadas, pasen a serlo. En consecuencia, la necesidad de formación pasa, precisamente, por personas capaces de entender cómo funciona esa automatización y cómo transferir tecnológicamente sus ideas y también de entender el mundo en el que viven, valorando críticamente los numerosos estímulos informativos que reciben.

Esto no nos debe llevar a un enfoque utilitarista, al contrario, una de las características más necesarias de la educación matemática es la creatividad, el desarrollo de un pensamiento capaz de enfrentarse a problemas nuevos buscando soluciones nuevas. Y tampoco nos debe hacer caer en el error de pensar que educamos a futuros estudiantes de matemáticas o de otros estudios universitarios con una matemática avanzada (Gómez-Chacón, 2010). Al contrario, la mayoría de los estudiantes de la primaria y la secundaria no van a estar expuestos en su vida cotidiana a esa matemática formal, por lo que el interés se ha de poner más en desarrollar su capacidad de comprensión conceptual. Ya en 1989, el *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] publicó un primer informe (NCTM, 1989) en el que aboga por la igualdad de oportunidades para que las matemáticas no sean un elemento segregador y tengan vocación de llegar al mayor número posible de niños y niñas. Además, siguiendo a Pólya (1945) y Schoenfeld (1985) se puso el énfasis en la resolución de problemas como eje del aprendizaje en matemáticas. La influencia internacional de los posicionamientos del NCTM se consolidó con los “Principios y Estándares de la Matemática Escolar” (NCTM, 2000).

Rico y Lupiáñez (2008) señalan cuatro dimensiones que caracterizan la finalidad de la educación matemática y que nos pueden ayudar a estructurar la respuesta a la pregunta de por qué enseñamos y aprendemos matemáticas: cultural (asumiendo la dimensión cultural de las matemáticas), cognitivo (como medio de desarrollo de las capacidades intelectuales), ético y político (como elemento de

construcción de la ciudadanía) y social (al ser elemento de la interacción entre las personas que aprenden matemáticas y la sociedad a la que pertenecen). Este planteamiento tetradimensional sobrepasa tanto lo utilitarista como lo meramente formalista y señala la relevancia de la matemática para comprender e interactuar con el mundo que nos rodea. Además, la dimensión cultural de la matemática rompe el falso dualismo ciencias-letras y nos ayuda a ver la matemática como un constructo social, dependiente por lo tanto de su entorno, en contraposición a lo que durante mucho tiempo fue visto como un conocimiento libre de contexto. Esta visión descontextualizada de las matemáticas, y de la educación matemática, contradice la propia historia del desarrollo de las ideas matemáticas (Bishop, 1988) que surgen en contextos determinados y pertenecen a sociedades concretas. No obstante, con independencia de su origen, hay actividades matemáticas esenciales que tienen un carácter universal (Bishop, 1988) y que dan origen al núcleo de la creación matemática actual: contar, localizar, medir, dibujar, jugar y explicar.

3. ¿QUÉ MATEMÁTICAS ENSEÑAR (Y CUÁLES NO) Y CÓMO HACERLO?

Plantear la pregunta sobre qué matemáticas se deberían enseñar pone la lupa sobre los contenidos, obviamente importantes. Este foco de interés ha tenido como consecuencia currículos muy amplios, normalmente contruidos por adición de contenidos que han ido apareciendo y se han considerado necesarios en la etapa considerada o en etapas posteriores (por ejemplo, algún contenido que se consideró necesario introducir en Bachillerato por su uso posterior en estudios universitarios). En muy contadas ocasiones esta construcción curricular por contenidos ha suprimido o eliminado algunos, ocurrió por ejemplo con la teoría de conjuntos cuando la LOGSE (en 1990) abjuró del enfoque de la *matemática moderna* y se adhirió a los movimientos internacionales por recuperar la funcionalidad de la matemática escolar en el mundo cotidiano del alumnado. No obstante, lo más frecuente no es la eliminación sino la adición de contenidos a los preexistentes, generando situaciones en las que el currículo se convierte en poco más que una lista de temas que hay que tratar en un tiempo récord, lo que sacrifica la profundización y la intensidad en aras de la cobertura extensa de temas.

Los currículos contruidos por acumulación adolecen de lo que Højgaard y Sølberg (2019) llaman la *conteniditis*, es decir, una inflación de contenidos (denominada sobrecarga curricular por la OCDE, 2020) que deja de lado aspectos fundamentales de la educación matemática, que no están necesariamente vinculados a un contenido concreto, sino que son transversales a la actividad matemática. En este sentido, el NCTM (2000) identificó cinco procesos básicos en la actividad matemática que se han convertido en cruciales en cualquier reflexión sobre la educación matemática: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y conexiones. Los procesos matemáticos prestan atención a cómo se desarrolla la actividad matemática más que a qué matemática en concreto se está movilizand. Los procesos matemáticos ni derogan ni se contraponen a los contenidos, al contrario, los complementan y contribuyen a ofrecer un panorama completo de todo lo que una persona realiza cuando trabaja matemáticamente (Alsina, 2019).

La resolución de problemas se constituye como el eje vertebrador de la actividad matemática en el aula. Se aprenden matemáticas aprendiendo a resolver problemas de, sobre y mediante matemáticas. Y decimos problemas y no ejercicios, es decir, actividades cuyo objetivo no se alcanza con facilidad, que no tienen un proceso inmediato de resolución, que causan perplejidad, dudas o bloqueos y que suponen, por lo tanto, un reto para quien los resuelve (véase, por ejemplo, Blanco Nieto y Pino Ceballos, 2015). En otras palabras, una situación como: “María tenía 5 caramelos y, con los que Felipe le dio, ahora tiene 8, ¿cuántos caramelos dio Felipe a María?” puede ser un problema para el alumnado de 2º de Primaria en las primeras ocasiones en las que se enfrente a él, pero una vez haya comprendido la situación, haya identificado el modelo matemático que le ayuda a modelarla y a resolverla y, en definitiva, identifique un patrón en esta situación, dejará de ser un problema para pasar a ser un ejercicio; y, desde luego, no debería ser un problema para el alumnado de 6º de Primaria.

Del mismo modo, un planteamiento una hoja con una operación como $543663:324$ no es un problema de matemáticas, sino una práctica algorítmica que podría tener alguna utilidad si ese tipo de cuentas las resolviéramos a mano, pero que no aporta nada respecto a la comprensión de la división para

quien ya sepa dividir, ni mejora las dificultades de quien aún no haya comprendido qué hacemos cuando dividimos (Schoenfeld, 1985).

El razonamiento y la prueba deben ser entendidos como procesos argumentativos y vinculados a la elaboración de conjeturas, el planteamiento de preguntas y su comprobación o refutación por medios matemáticos, más o menos formales, según el nivel educativo y la progresión del aprendizaje del alumnado. La argumentación es una herramienta de andamiaje del conocimiento matemático que permite experimentar cómo es la creación matemática: el conocimiento previo y la observación nos ayudan a elaborar conjeturas, que mediante la experimentación o, en fases más avanzadas, únicamente con el apoyo de la lógica formal, podemos llegar a demostrar o refutar (Stylianides, 2009).

En cuanto a la comunicación, no se trata solamente de la verbalización (oral o escrita) de las matemáticas, sino de potenciar su carácter reflexivo (el discurso matemático como detonante de la exploración y la investigación) e instructivo (el debate o discusión guiado por el profesorado), de modo que el alumnado pueda apoyarse progresivamente en un lenguaje matemático que se integre con su lenguaje verbal y se retroalimenten mutuamente (Pimm, 1987).

Las conexiones dentro las matemáticas (para no concebirlas como compartimentos estancos) de las matemáticas con disciplinas tienen un valor muy importante puesto que nos ayudan a entender las dimensiones cultural y social de las matemáticas (Monroe y Mikovch, 1994). Por último, la representación (Gérard, 1998) debe concebirse como un proceso multidimensional: no se trata solo de representar unos datos o unos objetos matemáticos, sino de ser capaz de transitar de unas representaciones a otras, de elegir la mejor representación para una situación dada, de buscar representaciones no estandarizadas, de manejar diferentes registros de representación (manipulativa, verbal, numérica, algebraica, tabular, gráfica, etc.). La relevancia de los procesos en la educación matemática queda patente en nuestro país al comprobar que las competencias específicas del currículo de matemáticas en la reciente LOMLOE incluyen de manera explícita estos procesos (véase, por ejemplo, Santaengracia et al., 2023).

Dado el riesgo de *conteniditis* descrito arriba, tan relevante como abordar qué enseñar y cómo hacerlo resulta reflexionar sobre qué es lo que no deberíamos hacer en las aulas de matemáticas o, al menos, aquello a lo que deberíamos prestar menos atención y, en consecuencia, reducir el tiempo que se le dedica, para ganarlo en otros aspectos. Las sociedades científicas y profesionales de matemáticas de España, agrupadas en el CEMat, crearon en 2021 un grupo de trabajo que, por primera vez en nuestra historia, elaboró un documento de bases para desarrollar el currículo de matemáticas de las etapas de Infantil, Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato (CEMat, 2021). En este documento se incluye un planteamiento teórico y metodológico basado en los procesos del NCTM (2000) y en el concepto de competencia matemática de Niss (2003) y el proyecto KOM, con una base fundada en la Educación Matemática Realista de Freudenthal (1991), que señala la relevancia de prestar atención a la fenomenología de la matemática y a los procesos de matematización horizontal y vertical (véase Treffers, 1987).

El documento elabora una propuesta de contenidos agrupada en los sentidos matemáticos (véase Calvo-Pesce et al., 2022) y organizada en torno a las grandes ideas matemáticas (Askew, 2013). Además del propio acuerdo entre las sociedades matemáticas, otra novedad importante del documento del CEMat (2021) es que señala directamente cuáles son los contenidos y procedimientos susceptibles de ser minorados en el currículo. A grandes rasgos, las recomendaciones del CEMat insisten en reducir la carga del trabajo manual con la operativa aritmética, la simplificación de expresiones algebraicas complejas o la representación gráfica, prefiriendo la comprensión conceptual de su significado y dejando aquellas expresiones más complejas para su resolución con herramientas tecnológicas. Como señalamos en la sección anterior, el manejo manual de grandes cantidades de datos, de números, de gráficas o de expresiones complejas no desarrolla la competencia matemática, sino que es propio de épocas en las que esas tareas solo podían realizarse así. Además, es crucial que el alumnado no perciba la matemática como un conjunto de algoritmos automatizables: “si el alumnado ve las Matemáticas como una materia

que simplemente tiene que superar reproduciendo una serie de procedimientos rutinarios, pierden la oportunidad de descubrir el placer de poner en juego la curiosidad y el razonamiento para llegar a una resolución” (López-Beltrán et al., 2020, p. 26). La matemática es creativa (Hadamard, 2011) y la matemática escolar no tiene que ser una matemática de otro tipo, de segundo nivel, cerrada a la inventiva.

4. ACTUACIONES NECESARIAS, MÁS ALLÁ DEL CURRÍCULO

En la sección anterior nos hemos enfocado en la organización del currículo en cuanto a contenidos y metodología, pero la acción en pro de la mejora de la educación matemática no se circunscribe a la reforma curricular. Estudios recientes (Coles et al., 2023) demuestran que la reforma curricular no produce los efectos deseados si no se acompaña de una revisión de los recursos humanos y materiales que intervienen en la implementación de un nuevo currículo. Estos otros factores circundantes al currículo se analizaron también en el *Libro Blanco de las Matemáticas* (Martín de Diego et al., 2020) que publicó la RSME en 2020, cuyos dos primeros capítulos se dedicaron por entero a la educación matemática en las etapas preuniversitaria y universitaria.

Uno de los aspectos que más urgentemente hay que modificar es la formación continua del profesorado en matemáticas y su didáctica. La situación en España (López Beltrán et al., 2020) es muy dispersa, desorganizada, con pocos ejemplos de planificación a medio plazo, y con muy poca formación específica en matemáticas y su didáctica, sobre todo en relación con el peso de la materia de Matemáticas en la educación preuniversitaria, sin que exista un marco claro de desarrollo profesional docente. A este respecto, el Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] lanzó en enero de 2022 un documento sobre propuestas de reforma de la profesión docente (MEFP, 2022) que avanzaba, por primera vez, en esta línea del desarrollo profesional, aunque desde un punto de vista no especializado.

La Comisión de Educación de RSME [CdE-RSME] analizó el documento en tres entradas en el Boletín y la web de RSME en las que se particularizaba el caso de las matemáticas, proponiendo, entre todos, un acceso a la formación inicial coherente con la idea de competencia matemática del currículo (CdE-RSME, 2022a), un incremento de la formación didáctico-matemática en los planes de formación (CdE-RSME, 2022b) y una carrera profesional que permita la especialización en matemáticas (CdE-RSME, 2022c). Clarificar estos aspectos formativos e incluso diseñar itinerarios personalizados que puedan atender las diferentes competencias del profesorado (Muñiz-Rodríguez et al., 2020) es un reto en la formación inicial, que ya está siendo abordado de manera exitosa a través de paradigmas como la mirada profesional (véase, por ejemplo, Llinares y Fernández, 2021).

Iniciativas recientes, como el *Global Teaching Insights* de la OCDE (<https://www.globalteachinginsights.org/>), están contribuyendo a generalizar una práctica de enorme efectividad: la observación de clases de matemáticas, tanto propias como de otro profesorado (Artzt et al., 2015). A pesar de su efectividad y de su implantación en otros países, bajo diferentes formatos, como el estudio de clases de Japón (p. ej., Fernandez y Yoshida, 2012), la observación no es muy habitual en España. La mencionada iniciativa de la OCDE pone a disposición del profesorado fragmentos de clases reales comentadas por equipos de profesorado en activo y personas expertas en didáctica de la matemática, abriendo también la posibilidad de que se suban nuevas clases o se comenten con otra perspectiva los fragmentos ya subidos (véase Muñiz-Rodríguez et al., 2023). Potenciar la observación, disponiendo de vídeos ya comentados permitirá al profesorado, tanto en formación inicial como en ejercicio, acercarse a la realidad de clases de matemáticas en diferentes países y contextos, formulando preguntas y sugiriendo variaciones en el desarrollo de las clases, mejorando así su propia práctica.

Otra cuestión muy relevante es la influencia de las evaluaciones externas y los efectos sistemáticos que estas tienen. Las peculiaridades de las pruebas de acceso a la universidad en matemáticas han sido analizadas en varios trabajos que demuestran que sesga y reduce el currículo pretendido y que también en matemáticas tiene efectos no previstos en cuanto a la aplicación de los criterios de corrección (Mengual et al., 2019; Rodríguez-Muñiz et al., 2016). En el segundo capítulo del

Libro Blanco de las Matemáticas (Rodríguez-Muñiz et al., 2020) la RSME realiza diferentes propuestas para mejorar estos aspectos de la evaluación, apostando por su coherencia con el currículo.

También tienen impacto las evaluaciones internacionales estandarizadas en las que participa España, como PISA o TIMSS, si bien su influencia sistémica es mucho menor de la que tienen las pruebas de acceso a la universidad. En estas evaluaciones el alumnado español rinde por debajo de lo que le correspondería por el nivel socioeconómico de nuestro país y, especialmente, es preocupante el bajo porcentaje de alumnado que tiene rendimientos en el segmento más alto (Rodríguez-Muñiz et al., 2022b). No obstante, estas evaluaciones deben analizarse evitando generalizaciones imprecisas y teniendo en cuenta aspectos que no son homogéneos en las aulas evaluadas, como: “la alta ratio de aula, el número de horas dedicadas a matemáticas, los datos de absentismo escolar, la dedicación extraescolar del alumnado, el acceso a tecnología, o la situación cultural, social y económica de las familias” (Rodríguez-Muñiz et al., 2022b, p. 18).

Finalmente, no podemos dejar de señalar el papel que las concepciones y las creencias del profesorado sobre las matemáticas y sobre sus procesos de aprendizaje y enseñanza juegan en interacción con su conocimiento (Aguilar-González et al., 2018; Carrillo-Yáñez et al., 2018). En Rodríguez-Muñiz et al. (2022a) se muestra cómo el profesorado en formación inicial ha evolucionado en los últimos años hacia posturas más próximas al constructivismo, si bien etiquetar a un profesor o profesora como tradicional o innovador se contradice con la realidad, más compleja, en la que el profesorado se adapta a su contexto y aplica combinaciones de diferentes metodologías e incluso paradigmas teóricos para afrontar la realidad de su aula.

5. CONCLUSIÓN

Educar en matemáticas en la era de los datos requiere no solamente cambios en los contenidos, algo que se ha venido haciendo en los últimos años, sino, especialmente, en la metodología: con un papel central de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, integrando la tecnología como herramienta que nos permite automatizar procedimientos que ya no son necesarios ni deben identificarse como ser competente en matemáticas. Además, es necesario un cambio de paradigma en la formación del profesorado: organizando de manera coherente la formación continua en matemáticas y su didáctica y considerando la investigación en didáctica de la matemática como núcleo de evidencias para el diseño de la formación inicial.

6. REFERENCIAS

- Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 13(1), 41–61.
- Alsina, À. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Artzt, A. F., Armour-Thomas, E., Curcio, F. R., y Gurl, T. J. (2015). *Becoming a Reflective Mathematics Teacher: A Guide for Observations and Self-Assessment*. Routledge.
- Askew, M. (2013). Big ideas in primary mathematics: Issues and directions. *Perspectives in Education*, 31(3), 5–18.
- Bishop, A. J. (1988). Mathematics Education in Its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics*, 19(2), 179–191
- Blanco Nieto, L. J., y Pino Ceballos, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En L. J. Blanco Nieto, J. Cárdenas Lizarazo y A. Caballero Carrasco (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de maestros de Primaria* (pp. 81–92). Universidad de Extremadura.
- Calvo Pesce, C., Carrillo de Albornoz Torres, A., de la Fuente Pérez, A., de León Rodríguez, M., González López, M. J., Gordaliza Ramos, A., Guevara Casanova, I., Lázaro del Pozo, C., Monzó del Olmo, O., Moreno Verdejo, A., Rodríguez-Muñiz, L. J., Rodríguez Taboada, J., y Serradó Bayés, A. (2022). Pensar matemáticamente. *Cuadernos de Pedagogía*, 531, 73–79.

- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253.
- Castells, M. (2005). *La era de la información. Volumen 1: La sociedad red*. Siglo XXI Editores.
- CdE-RSME. (2022a). *Comisión de Educación: Primeras reflexiones sobre el documento del MEFP 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente*. <https://www.rsme.es/2022/02/primeras-reflexiones-sobre-el-documento-del-mefp-24-propuestas-de-reforma-para-la-mejora-de-la-profesion-docente/>
- CdE-RSME. (2022b). *Comisión de Educación: Reflexiones sobre el documento del MEFP “24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente”, segunda parte «diseño de los planes de formación»*. <https://www.rsme.es/2022/03/comision-de-educacion-reflexiones-sobre-el-documento-del-mefp-24-propuestas-de-reforma-para-la-mejora-de-la-profesion-docente-segunda-parte-diseno-de-los-planes-de-formacion/>
- CdE-RSME. (2022c). *Comisión de Educación: Reflexiones sobre el documento del MEFP 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente. Tercera parte (carrera docente)*. <https://www.rsme.es/2022/03/comision-de-educacion-reflexiones-sobre-el-documento-del-mefp-24-propuestas-de-reforma-para-la-mejora-de-la-profesion-docente-tercera-parte-carrera-docente/>
- CEMat. Calvo Pesce, C., Carrillo de Albornoz, A., de la Fuente, A., de León, M., González, M. J., Gordaliza, A., Guevara, I., Lázaro, C., Monzó, O., Moreno, A., Rodríguez-Muñiz, L. J., Rodríguez, J. y Serradó, A. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria*. CEMat. <https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf>
- Charles, R. I., y Carmel, C. A. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 7(3), 9–24.
- Coles, A., Rodríguez-Muñiz, L. J., Mok, I. A. C., Karsenty, R., Martignone, F., Osta, I, Ferretti, F., Nguyen Thi Tan, A., y Ruiz, A. (2023b). Teachers, Resources, Assessment Practices: Role and Impact on the Curricular Implementation Process. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (en prensa). Springer.
- Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. *Synthese*, 92, 315–348.
- D'Ambrosio (1991). The Modern Mathematics reform movement in Brazil and its consequences for Brazilian mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 69–85.
- Fernandez, C., y Yoshida, M. (2012). *Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Routledge.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Gérard, V. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167–181.
- Gleason, N. W. (2018). *Higher Education in the Era of the Fourth Industrial Revolution*. Palmgrave Macmillan.
- Gómez-Chacón, I. M. (2010). Matemáticas: mente disciplinar, mente creativa, mente ética. Una propuesta de educación ciudadana. En M. L. Callejo y J. M. Goñi (Coords.), *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 59–85). Graó.
- Goñi, J. M. (2010). La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competencia matemática. En M. L. Callejo y J. M. Goñi (Coords.), *Educación matemática y ciudadanía* (pp. 11–58). Graó.
- Hadamard, J. (2011). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa-Calve, reedición RSME.
- Højgaard, T., y Sølberg, J. (2019). Competencies and curricula: Danish experiences with a two-dimensional approach. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019)*. Utrecht University y ERME.
- Jankvist, U. T., y Geraniou, E. (Eds.). (2022). *Mathematical Competencies in the Digital Era*. Springer.
- Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. St. Martin's Press.

- Llinares, S., y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185–205.
- López Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando, I. Montejo-Gaámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E., y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1–94). Fundación Ramón Areces y RSME.
- Manizade, A., Buchholtz, N., y Beswick, K. (Eds.). (2023). *The Evolution of Research on Teaching Mathematics. International Perspectives in the Digital Era*. Springer.
- Martín de Diego, D., Chacón, T., Curbera, G., Marcellán, F., y Siles, M. (Coords.). (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Fundación Ramón Areces y RSME.
- MEFP. (2022). *Documento para debate. 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente*. <https://educagob.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:adf4f050-9832-4a88-9cd2-96cd3519c664/documento-de-debate-24-propuestas-de-reforma-profesi-n-docente.pdf>
- Mengual, E., Albarracín, L., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., y Gorgorió, N. (2019). Diseño de criterios para reducir la variabilidad en la calificación de exámenes de matemáticas en pruebas de acceso a la universidad. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 13(2), 62–83.
- Monroe, E. E., y Mikovch, A. K. (1994). Making mathematical connections across the curriculum: Activities to help teachers begin. *School Science and Mathematics*, 94(7), 371–376.
- Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(2), 141-161.
- Muñiz-Rodríguez, L., Ferrando, I., Ramos, P., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). La observación de aula como herramienta de desarrollo profesional: el caso del OCDE Global Teaching Insights. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 67, 1–12.
- NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115–124). Hellenic Mathematical Society.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2015). *Data-Driven Innovation Big Data for Growth and Well-Being*. OECD Publishing.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2020). *Curriculum Overload: A Way Forward*. OECD Publishing.
- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. Routledge.
- Pólya, G. (1945). *How to Solve It?* Princeton University Press.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza Editorial.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Crespo, R., Díaz, I., Fioravanti, M., García-Raffi, L. M., González-Vasco, M. I., González Vega, L., Lafuente Lechuga, M., Montejo-Gámez, J., Ortega Riejos, F. A., y Mallavibarrena, R. (2020). Los estudios de matemáticas en el ámbito universitario. En D. Martín De Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 95–162). Fundación Ramón Areces y RSME.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., Mier, V., y Alonso, P. (2016). Washback effect of university entrance exams in applied mathematics to social sciences. *PloS one*, 11(12), e0167544.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, Á., Lindorff, A., y Muñiz-Rodríguez, L. (2022a). Undergraduates' conceptions of mathematics teaching and learning: an empirical study. *Educational Studies in Mathematics*, 109(3), 523–547.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Ferrando, I., y Montejo-Gámez, J. (2022b). Oportunidades, retos y necesidades de la educación matemática. *Cuadernos de Pedagogía*, 531, 14–19.

- Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Palop del Río, B. (2023). Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 113, 63–80.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.
- Schwab, K. (2017). *The Fourth Industrial Revolution*. Currency.
- Shepherd, J. (2004). What is the digital era? En G. Doukidis, N. Mylonopoulos y N. Pouloudi (Eds.), *Social and Economic Transformation in the Digital Era* (pp. 1–18). IGI Global.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258–288.
- Thom, R. (1971). “Modern” mathematics: an educational and philosophic error? A distinguished French mathematician takes issue with recent curricular innovations in this field. *American Scientist*, 59(6), 695–699.
- Treffers A (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas project*. D. Reidel Publishing.
- Zeide, E. (2017). The structural consequences of big data-driven education. *Big Data*, 5(2), 164–172.