

# Problemas de puntos del retículo en tres dimensiones

M<sup>A</sup> ELENA CRISTÓBAL RODRÍGUEZ

Director: Fernando Chamizo Lorente

Universidad Autónoma de Madrid  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas

Madrid, marzo de 2009



*A mis padres*  
*A Jesús*



*317 es un número primo, no porque nosotros lo creamos, o porque nuestras mentes estén hechas de una forma u otra, sino porque es así, porque la realidad matemática está así construida.*

G.H. Hardy

*La aplicación práctica se encuentra no buscándola; uno puede decir que todo el progreso de la civilización descansa en un principio.*

J. Hadamard



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El problema de la esfera y las funciones <math>L</math></b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Resultados principales . . . . .	12
2.3. La suma trigonométrica . . . . .	17
2.4. La suma de caracteres . . . . .	23
2.5. Pruebas de los resultados principales . . . . .	29
<b>3. Puntos visibles en la esfera</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción . . . . .	33
3.2. Lemas auxiliares . . . . .	35
3.3. Prueba del resultado . . . . .	41
<b>4. Puntos del retículo en elipsoides racionales</b>	<b>49</b>
4.1. Introducción . . . . .	49
4.2. Descomposición del término de error . . . . .	50
4.3. La suma trigonométrica . . . . .	53
4.4. La suma de caracteres . . . . .	56
4.5. La suma modular . . . . .	59
4.6. Demostración del resultado principal . . . . .	61
4.7. Apéndice: breve introducción a las formas modulares . . . . .	61





Quiero comenzar la memoria dando las gracias a todos los que han ayudado a que sea posible.

En primer lugar a mi director de tesis, Fernando Chamizo. Le agradezco su ayuda en todo momento, su infinita paciencia, sus explicaciones y consejos, la forma de dirigirme y todo lo que me ha enseñado. Sin él no hubiera podido llegar hasta aquí.

Por supuesto, también estoy muy agradecida a mis padres, por sus ánimos y confianza en mí. Me siento afortunada de ser su hija. Gracias también a Jesús por estar ahí, por poner siempre buena cara y por muchas cosas más.

Agradezco a mis compañeros y amigos del Departamento de Matemáticas su apoyo constante en el día a día y los buenos momentos que hemos disfrutado juntos. Un agradecimiento especial para Ana, Angélica, Mariluz y Fernando Charro, con quienes he compartido un sinfín de vivencias durante este tiempo. Gracias a Cristina Martínez y Cristina Brandle, mis primeras compañeras de despacho. A Mariangel, Patxi, Nati, Elías, Jose Antonio, Jose, María Luisa, Fernando Holgado, Miguel, Paloma, Liviu, Ernesto, Enrique, Marijose, Carlos, Dani, Juan Manuel. . . y a todos los que han estado ahí para echar una mano, muchas gracias.

Quiero agradecer especialmente a Adrián el haberse leído cuidadosamente esta memoria, así como su aliento y ayuda durante estos años.

Gracias al profesor Jose Ramón Berrendero por dirigirme uno de los trabajos de la suficiencia investigadora y a la profesora Ana Justel por su ayuda en mis inicios como docente y en cuestiones estadísticas.

Agradezco a mis compañeros del Cedex sus constantes ánimos. Gracias de forma especial a Sergio, mi compañero de despacho, por contribuir a que llegar hasta aquí haya sido algo más fácil.

Sin las becas que disfrute, “Ayuda al Tercer Ciclo de la UAM” y FPI, la memoria tampoco existiría. Por tanto agradezco a la Universidad Autónoma de Madrid el haberme concedido la Ayuda, y al Ministerio de Ciencia y Tecnología y al proyecto de investigación “Análisis Armónico y aplicaciones a la Física Matemática y a la Teoría de Números” y a todos sus miembros, el haberme concedido la FPI.

Por último, quiero dar las gracias a todos los que han contribuido a la consecución de esta memoria y que no he mencionado explícitamente. También al resto de mi familia y amigos.

M<sup>a</sup> Elena Cristóbal Rodríguez  
Madrid, 18 de marzo de 2009



# Notación

Las notaciones que explicamos en lo que sigue están colocadas por orden de aparición en la memoria.

$d$	dimensión
$f \ll g$	quiere decir que $ f  \leq cg$ , donde $c$ es una constante absoluta y $g \geq 0$
$f = O(g)$	es equivalente a $f \ll g$
$\theta_d$	es el ínfimo de todos los $\theta$ válidos para el exponente del término de error en los problemas de puntos del retículo (véase la introducción)
$r_3(n)$	$\#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}$
$S(R)$	Número de puntos del retículo en una esfera de radio $R$ , definido en (1.3) y (2.1)
$S(R, H)$	Número de puntos del retículo entre una esfera de radio $R$ y otra de radio $R + H$ , definido en (1.3)
$S_f(R)$ y $S_f(R, H)$	están definidas en (1.4)
GRH	Hipótesis de Riemann Generalizada
$f = o(g)$	si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$ , donde $g(x)$ debe ser positiva
$f = \Omega(g)$	si $f = o(g)$ no se cumple, o $\limsup_{x \rightarrow \infty}  f(x) /g(x) > 0$
$f = \Omega_+(g)$	si $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) > 0$
$f = \Omega_-(g)$	si $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) < 0$
$f = \Omega_{\pm}(g)$	si se verifica que $f = \Omega_+(g)$ y que $f = \Omega_-(g)$
$E^*(R)$	es el término de error en el problema de los puntos visibles, definido en (1.6)
$E(R)$	representa al término de error en el problema de la esfera y en el de los elipsoides. Las estimaciones para $E(R)$ se escriben, en los dos problemas, así, $E(R) = O(R^{\theta_d + \epsilon})$ si $R$ tiende a infinito.
$R_3(n)$	es el número de representaciones primitivas de un entero $n$ como suma de tres cuadrados, $\#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : \text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1, n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}$
$E_1(R, H)$	parte trigonométrica del término de error del problema de la esfera, definido en (2.5)
$e(x)$	es la abreviatura de $e^{2\pi ix}$
$n \asymp N$	quiere decir $N \leq n < 2N$ , o en general $N \ll n \ll N$
$E_2(R, H)$	parte de caracteres del término de error del problema de la esfera, definido en (2.7)

GLH	Hipótesis de Lindelöf generalizada
LEP	Pares de exponentes de Lindelöf
RH	Hipótesis de Riemann
$L_\beta$	Hipótesis $L_\beta$ (para $\Re s \geq \beta$ y $\chi$ un carácter real no principal módulo $q$ , $L(s, \chi) = O(q^\epsilon  s ^\epsilon)$ )
$(p, q)$	es un par de exponentes
$\partial_i^k f$	denota las derivadas parciales $k$ -ésimas de cualquier función $f$ de varias variables con respecto a la variable $i$ (para $k = 1$ el superíndice se omitirá)
$\sum'$	significa que sólo se suma en los libres de cuadrados
$\widehat{f}(\xi)$	es la transformada de Fourier de $f$ ,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e(-x\xi)dx$$

$GL_3(\mathbb{Z})$	es el grupo de todas las matrices de orden 3 con coeficientes enteros cuyo determinante es distinto de cero.
$r_Q(n)$	es el número de representaciones de $n$ a partir de la forma cuadrática $Q$
$\Gamma_0(D)$	es el grupo de matrices enteras $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $ad - bc = 1$ y $D c$
$\mathfrak{M}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$	denota el espacio vectorial de las formas modulares de peso $3/2$ con multiplicador $\chi$ en el subgrupo $\Gamma_0(D)$ , donde $\chi$ es un carácter de Dirichlet módulo $N$
$\theta_Q(z)$	es la función theta, $\theta_Q(z) = \sum r_Q(n)e(nz)$ , es una forma modular en $\mathfrak{M}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$
$r(n, \text{gen } Q)$	es el número de soluciones enteras para todas las formas cuadráticas pertenecientes al mismo género que $Q$
$\theta_{\text{gen}}(z)$	es la función theta asociada al género, $\theta_{\text{gen}}(z) = \sum r(n, \text{gen } Q)e(nz)$
$\mathcal{T}$	parte trigonométrica del error del problema de los elipsoides racionales
$\mathcal{C}$	parte de caracteres del error del problema de los elipsoides racionales
$\mathcal{M}$	parte modular del error del problema de los elipsoides racionales
$GL_3(\mathbb{Q})$	es el grupo de todas las matrices de orden 3 con coeficientes racionales cuyo determinante es distinto de cero.
$\mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$	denota el espacio vectorial de las formas cuspidales de peso $3/2$ con multiplicador $\chi$ en el subgrupo $\Gamma_0(D)$ , donde $\chi$ es un carácter de Dirichlet módulo $N$

- $\mathbb{H}$  es el semiplano superior,  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$
- $SL_2(\mathbb{Z})$  es el grupo de matrices enteras con determinante uno
- $\mathcal{M}_k$  es el espacio vectorial compuesto por formas modulares de peso  $k$  y nivel 1 (en el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$ )
- $\mathcal{S}_k$  es el espacio vectorial compuesto por formas cuspidales de peso  $k$  y nivel 1
- $\mathcal{M}_k(N, \psi)$  denota el espacio vectorial de las formas modulares de peso  $k$  con multiplicador  $\psi$  en  $\Gamma_0(N)$ , donde  $\psi$  es un carácter de Dirichlet módulo  $N$
- $\mathcal{S}_k(N, \psi)$  el espacio vectorial de las formas cuspidales de peso  $k$  con multiplicador  $\psi$  en  $\Gamma_0(N)$ , donde  $\psi$  es un carácter de Dirichlet módulo  $N$
- $T_n f$  denota la actuación del operador de Hecke sobre una forma modular  $f$



# Capítulo 1

## Introducción

Los problemas de puntos del retículo constituyen una rama clásica de la teoría analítica de números. Consisten en contar el número de puntos de coordenadas enteras en grandes dominios cerrados, en el plano euclídeo y también en espacios de dimensión mayor o igual que tres.

Es fácil deducir que, bajo ciertas hipótesis, el número de dichos puntos en estos dominios es aproximadamente el volumen (o el área si estamos en dimensión dos) y es aquí, en el “aproximadamente”, donde está la clave del problema. Acotar la diferencia entre el número de puntos de coordenadas enteras y el volumen de la región estudiada es el objetivo a alcanzar. Esta diferencia se conoce como término de error, resto o discrepancia y generalmente acotarla pasa por acotar sumas trigonométricas. El método de van der Corput y los avances surgidos a partir de él son grandes aliados en esta tarea.

Muchos de estos problemas están aún sin resolver y algunos de ellos son bastante antiguos. El más natural y simétrico es el de contar puntos con coordenadas enteras en una bola de dimensión  $d$ . El término principal, como ya hemos dicho, es el volumen y la dificultad está en acotar el término de error. Concretamente el problema consiste en probar la fórmula

$$(1.1) \quad \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq R\} = \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} + O(R^\theta)$$

para cualquier  $R \geq 1$  con  $\theta$  tan pequeño como sea posible. Denotaremos  $\theta_d$  al ínfimo de todos los  $\theta$  válidos para la aproximación anterior.

En dimensión  $d = 1$  se ve fácilmente que  $\theta_1 = 0$  y en dimensiones grandes,  $d \geq 4$ , el problema también está bien entendido y no hay sitio para mejoras, se sabe desde hace tiempo que  $\theta_d = d - 2$  (véanse [Wa2], [Wa] y [Fr]).

En las restantes dimensiones,  $d = 2$  y  $d = 3$ , el problema continúa abierto. Se conjetura que  $\theta_2 = 1/2$  y  $\theta_3 = 1$  pero con los métodos actuales parece inasequible llegar a probar estos resultados.

Ya Gauss se interesó por el caso de dimensión dos el cual se conoce como “El problema del círculo” y probó que  $\theta_2 \leq 1$ . Obtener cotas más pequeñas conlleva conseguir buenas estimaciones para ciertas sumas trigonométricas. Durante todo el siglo XX, para tratar estas sumas se han ido desarrollando métodos cada vez más complicados que arrastran un impresionante despliegue técnico y, gracias a ellos, se han obtenido cotas superiores para  $\theta_2$  cada vez más mejores (en [Kr] se puede encontrar un amplio estudio histórico de los resultados obtenidos). La primera acotación que se probó en el siglo pasado,  $\theta_2 \leq 2/3$ , fue dada por W. Sierpiński [Si] en 1906; su prueba, aunque elemental, es larga y difícil y en ella aún no aparecen métodos para acotar sumas trigonométricas. Posteriormente, en los años veinte, J.G van der Corput [vdC] y E. Landau [La4] entre otros, probaron resultados parecidos al de W. Sierpiński pero las pruebas son más sencillas; irrumpen los “métodos trigonométricos”. Después, dichos métodos se vuelven aún más sofisticados, conllevan sumas trigonométricas bidimensionales. Utilizándolos, E.C. Titchmarsh [Ti], Hua L-K [Hua], J.-R Chen [Ch2],[Ch3] y W.-G. Nowak [No] obtuvieron nuevas cotas, siendo G. Kolesnik, en 1985, quien consiguiera la mejor de éstas,  $\theta_2 \leq 278/429$  [Ko]. Sin embargo, el mejor resultado que se conoce hasta la fecha se debe a M.N. Huxley [Hu3] que en 2003 obtuvo  $\theta_2 \leq 131/208$  gracias a un nuevo método para tratar estas sumas al que denominó “Método discreto de Hardy y Littlewood”; lo confeccionó a partir de las ideas de E. Bombieri y H. Iwaniec [Bo-Iw] y de H. Iwaniec y C.J. Mozzochi [Iw-Mo] quienes, ya en 1987 habían conseguido mejorar el resultado dado por G. Kolesnik. (Véase [Iv-Kr-Kü-No] si se desea ver un resumen de estas acotaciones). La acotación de Huxley es también la mejor que se conoce en el clásico problema del divisor de Dirichlet. El objetivo de dicho problema es sumar la cantidad de divisores de cada uno de los números menores que otro número dado. Es un problema de puntos del retículo porque resolverlo equivale a contar el número de puntos de coordenadas enteras debajo de cierta hipérbola.

Llegamos en este pequeño recorrido histórico al caso de dimensión tres, también conocido como “Problema de la esfera”, el cual constituye una parte importante de esta memoria. La literatura sobre este problema no es tan amplia como en el del círculo a pesar de que algunos expertos aseguran que éste es el caso más difícil y enigmático (véase [Iv-Kr-Kü-No]). Además es muy interesante debido a que está relacionado con otras áreas de la teoría de los números como son el número de clases o las funciones  $L$  de Dirichlet.

Durante el siglo XX nos han ido llegando distintas acotaciones de  $\theta_3$ . En 1909 W. Sierpiński [Si2] demostró,  $\theta_3 \leq 5/3$  a partir de su acotación en el círculo, después, en 1912, E. Landau [La1] probó,  $\theta_3 \leq 3/2$  y años más tarde, en 1935, I.M. Vinogradov [Vi] llegó a  $\theta_3 \leq 7/5$  utilizando por primera vez sumas trigonométricas en el problema de la esfera, posteriormente fue mejorando la acotación en distintos resultados hasta



1963. En dicho año, él y J.-R. Chen desarrollaron novedosas estimaciones de sumas trigonométricas (marcaron un hito en este problema) y probaron independientemente, [Vi3] y [Ch],  $\theta_3 \leq 4/3$ . Esta cota se obtiene a partir de un término diagonal y reducirla usando únicamente métodos de sumas trigonométricas es impensable, de hecho tuvieron que pasar 32 años hasta que el resultado fue mejorado. En 1995, F. Chamizo y H. Iwaniec [Ch-Iw] probaron,  $\theta_3 \leq 22/29$ . La clave de esta mejora está en que, volviendo a Gauss [Ga], emplearon la interpretación del número de puntos del retículo en la esfera como el número de clases de formas cuadráticas primitivas. De este modo, aparecen en el término de error sumas cortas de caracteres de Dirichlet provenientes del número de clases que se complementan con las sumas trigonométricas, hecho que lleva a una mejor acotación del error.

Mostramos a continuación la forma en que se complementan ambos tipos de sumas, trigonométricas y de caracteres. Sea  $r_3(n)$ , el número de representaciones como suma de tres cuadrados de un entero positivo  $n$ ,

$$(1.2) \quad r_3(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}.$$

A partir de esta definición,  $S(R)$ , el número de puntos del retículo en una esfera de radio  $R$  y  $S(R, H)$ , el número de puntos del retículo entre una esfera de radio  $R$  y otra de radio  $R + H$ , se pueden expresar como sumas,

$$(1.3) \quad S(R) = \sum_{n \leq R^2} r_3(n) \quad \text{y} \quad S(R, H) = \sum_{R^2 < n \leq (R+H)^2} r_3(n).$$

Estas sumas se pueden regularizar obteniendo,

$$(1.4) \quad S_f(R) = \sum_{1 \leq n \leq (R+H)^2} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}) \quad \text{y} \quad S_f(R, H) = \sum_{R^2 < n \leq (R+H)^2} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n})$$

donde  $f$  es una función que coincide con la identidad en  $[1, R]$  y se anula fuera de  $[0, R + H)$ ,  $0 < H < 1$ . Así,

$$(1.5) \quad S(R) = 1 + S_f(R) - S_f(R, H).$$

Bajo leves condiciones de regularidad de  $f$  la aplicación de la fórmula de sumación de Poisson permite obtener un término principal de  $S_f(R)$  mientras el error queda expresado en términos de sumas trigonométricas que, por tanto, se deben acotar lo mejor posible. Por otro lado controlar  $S_f(R, H)$  requiere acotar ciertas sumas de caracteres (véase [Ch-Iw], [HB2] o el capítulo 2 de esta memoria) con lo que queda al descubierto la colaboración entre ambos tipos de sumas para reducir el error en el problema de la esfera. Gracias a la regularización introducida por la función  $f$  se mejora la acotación de  $S_f(R)$  y el pago por pasar de contar puntos en una esfera de radio  $R$  a contarlos en

otra de radio  $R + H$  es tener que acotar la suma de caracteres, empresa que tiene buen fin cuando  $H$  no es demasiado grande, es decir, cuando la suma de caracteres es corta. Sin embargo, hay que tener en cuenta que si  $H$  es demasiado pequeño la ayuda de la regularización desaparece, por esto es imprescindible controlar el tamaño de  $H$ .

En 1999 D.R. Heath-Brown consiguió mejorar la acotación de la suma de caracteres obteniendo con ello la mejor estimación de  $\theta_3$  que se ha dado hasta el momento,  $\theta_3 \leq 21/16$ , que se encuentra publicada en [HB2]. En este mismo artículo D.R. Heath-Brown señaló (últimas líneas de la sección 2) que utilizando la Hipótesis de Riemann Generalizada, GRH, la acotación de la suma de caracteres se podría mejorar, también indicó que el mejor resultado que se puede esperar con estos métodos es  $\theta_3 \leq 5/4$ . Pero ni aun suponiendo GRH se podría mejorar el resultado dado por D.R. Heath-Brown ya que la actual acotación de las sumas trigonométricas (véase (5.3) de [Ch-Iw] o el capítulo 4) es una suma de distintos términos y  $R^{21/16}$  está entre ellos. Por tanto, cualquier mejora de la cota para  $\theta_3$  pasa por obtener nuevas estimaciones de las sumas trigonométricas.

En el capítulo 2 de esta memoria obtenemos mejoras condicionales para la cota superior de  $\theta_3$ . Para ello se trabaja bajo una hipótesis ligada al crecimiento de las funciones  $L$  asociadas a caracteres reales o lo que es equivalente, ligada a la distribución de los ceros de las funciones  $L$  reales. Esta hipótesis, a la que denominaremos  $L_\beta$ , es más débil que GRH y gracias a ella conseguimos mejorar las estimaciones de la suma de caracteres. Por otro lado, en este capítulo también se obtienen nuevas estimaciones para las sumas trigonométricas de forma incondicional aplicando la teoría de pares de exponentes. Estas nuevas estimaciones combinadas con las de las sumas de caracteres nos llevan a la mejora de  $\theta_3$  y además, todas ellas por sí mismas, son de interés independiente.

En los problemas de puntos del retículo, aparte de acotar la discrepancia y estimarla lo mejor posible,  $O$ -resultados, existe otro tipo de problema, probar que “cierta estimación (quizá conjetural)” es la mejor y que no puede existir ninguna más precisa. Estos problemas se denominan  $\Omega$ -resultados. Se dice que  $f = \Omega(g)$  si  $f = o(g)$  no se cumple o lo que es lo mismo, si  $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f(x)|/g(x) > 0$  e intuitivamente esto indica que si se diese la estimación  $O(g)$  es imposible mejorarla. Se escribe  $f = \Omega_+(g)$  si  $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) > 0$  y  $f = \Omega_-(g)$  si  $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) < 0$ . Por último, se dice que  $f = \Omega_\pm(g)$  si se cumple  $f = \Omega_+(g)$  y  $f = \Omega_-(g)$ .

A continuación realizaremos un pequeño recorrido por los  $\Omega$ -resultados que se conocen en las bolas.

Si en 1906 W. Sierpiński probaba que  $\theta_2 \leq 2/3$  [Si], en 1915 E. Landau [La2] y G.H. Hardy [Har] probaban que el  $2/3$  no se podría reemplazar por ningún número menor que  $1/2$ , eran los primeros  $\Omega$ -resultados del problema del círculo. Después ha habido muchos

más (véanse [Kr] y [Iv-Kr-Kü-No] para seguir la historia) y hoy en día, el mejor  $\Omega$ -resultado que se conoce es  $\Omega(R^{1/2}(\log R)^{1/4}(\log \log R)^{(3/4)(2^{1/3}-1)}(\log \log \log R)^{-5/8})$ , dado en 2003 por K. Soundararajan [So]. Desafortunadamente, el camino que separa los  $\Omega$ -resultados de la mejor cota superior parece difícil de recorrer.

En dimensión cuatro se sabe que la discrepancia es  $\Omega_{\pm}(R^2 \log \log R)$  [Ad-Pe] (véanse [Kr] y [Kr2] para los resultados anteriores) y en dimensión  $d \geq 5$  se conoce desde hace mucho tiempo que la discrepancia es  $\Omega(R^{d-2})$  (los métodos utilizados se pueden encontrar en [Kr2] y [Wa]). Es fácil ver con esto que, como dijimos al principio de esta introducción, el problema está resuelto si  $d \geq 4$ .

Llegamos de nuevo al caso que tratamos en esta memoria, la dimensión tres. El mejor  $\Omega$ -resultado es  $\Omega_{\pm}(R(\log R)^{1/2})$ , probado por K-M. Tsang en [Ts] (algunos de los resultados anteriores se pueden encontrar en [Sze], [No2] o [Ad-Pe]). Por tanto, al igual que en dimensión dos, parece complicado cubrir el hueco que queda entre los  $\Omega$ -resultados y la cota de D.R. Heath-Brown,  $\theta_3 \leq 21/16$ .

En los problemas de puntos del retículo además de contar puntos de coordenadas enteras se pueden contar los que se conocen como puntos visibles desde el origen o puntos primitivos. Un punto de coordenadas enteras es visible desde el origen si el segmento rectilíneo que une dicho punto con el origen no contiene a ningún otro. Es fácil deducir que un punto de coordenadas enteras será visible si el máximo común divisor de sus coordenadas es uno. En el capítulo 3 de esta memoria daremos un  $\Omega$ -resultado para puntos visibles en la esfera. Antes de enunciarlo repasamos la historia de las estimaciones de puntos visibles en las bolas. En este caso denotaremos a la discrepancia  $E^*(R)$ .

En dimensión dos, el análogo al problema del círculo en puntos visibles es un problema difícil y demostrar resultados no triviales sólo se logra tras haber asumido la Hipótesis de Riemann (el razonamiento se puede seguir detalladamente en [No4]). El número de puntos visibles en el círculo se aproxima por  $\frac{6}{\pi}R^2$ , así que esta vez, estimar la discrepancia equivale a estimar la diferencia entre ésta última cantidad y el número de puntos visibles en círculos grandes de radio  $R$ . El mejor  $O$ -resultado que se conoce es  $O(R^{221/304+\epsilon})$ , probado por J. Wu [Wu] en 2001 (véanse [Mor], [No4] y [Zh-Ca] para consultar resultados anteriores) y con respecto a la  $\Omega$ -estimación se tiene  $\Omega(R^{1/2})$  [No5].

Vamos a continuación con los puntos visibles en dimensión tres.

En una esfera de radio  $R$  el número de puntos visibles se aproxima por  $\frac{4\pi}{3\zeta(3)}R^3$ . Así que en este caso  $E^*(R)$  se expresa como,

$$(1.6) \quad E^*(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \|\vec{n}\| \leq R, \text{mcd}(n_1, n_2, n_3) = 1\} - \frac{4\pi}{3\zeta(3)}R^3.$$

El mejor resultado conocido para el problema de la esfera se traslada de forma no muy

complicada al caso de los puntos visibles dando lugar a  $E^*(R) = O(R^{21/16})$ . Este hecho contrasta con el caso del círculo en el que como hemos visto, para probar exponentes no triviales hay que suponer la Hipótesis de Riemann. Sin embargo, no todo es más sencillo en dimensión tres, en este caso es más difícil acotar las oscilaciones del término de error debido a que la transformada de Fourier decae más despacio.

En el capítulo 3 obtendremos un  $\Omega$ -resultado para puntos visibles comparable al que se conoce para todos los puntos en el problema de la esfera. En concreto se prueba que para  $R > 1$  se tiene

$$E^*(R) = \Omega(R(\log R)^{1/2}).$$

Para ello utilizamos la integración, herramienta muy útil para obtener  $\Omega$ -resultados, pero evitamos trabajar con el momento de orden dos que en este caso es desconocido. Trabajaremos con una serie trigonométrica auxiliar que está correlacionada con  $E^*(R)$  (veremos todos los detalles en el desarrollo del capítulo).

Hasta ahora todos los problemas de puntos del retículo que hemos visto estaban definidos en bolas, pero no siempre es así. A continuación pasaremos a considerar regiones más generales para introducir el tercer problema que se trata en esta memoria, los puntos del retículo en elipsoides racionales (elipsoides con coordenadas racionales). Iremos en esta pequeña introducción desde “regiones generales” hasta los elipsoides racionales.

De nuevo el problema principal consiste en estimar la discrepancia,  $E(R)$ . En esta ocasión es la diferencia entre el número de puntos del retículo en un cuerpo convexo suave conteniendo al origen,  $\mathcal{B}$ , y su volumen,

$$E(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \vec{n}/R \in \mathcal{B}\} - \text{Vol}(\mathcal{B})R^d.$$

Las estimaciones para  $E(R)$  se escriben como en el problema de la esfera, es decir,  $E(R) = O(R^{\theta_d + \epsilon})$  si  $R$  tiende a infinito.

Un sencillo argumento como el usado por C.F. Gauss para el problema del círculo prueba ya que  $\theta_d \leq d - 1$ . Para cuerpos convexos suaves generales el siguiente resultado que se conoce fue dado por E. Hlawka [Hl] en 1950. Probó,  $\theta_d \leq d - 2 + 2/(d+1)$  utilizando análisis de Fourier (esencialmente la fórmula de sumación de Poisson y el principio de fase estacionaria). Posteriormente en 1991 [Kr-No] y en 1992 [Kr-No2] se sucedieron mejoras de los  $O$ -resultados dadas por E. Krätzel y W.G. Nowak utilizando métodos bidimensionales de sumas trigonométricas y en 2000, W. Müller [Mü2] estableció que la discrepancia era  $O(R^{63/43})$  para  $d = 3$ ,  $O(R^{40/17})$  en el caso  $d = 4$  y para  $d \geq 5$ ,  $\theta_d \leq d - 2 + (d + 4)/(d^2 + d + 2)$ . Finalmente, en 2004, la conjetura natural ha sido demostrada en dimensiones “grandes”, F. Götze [Gö] ha probado que  $\theta_d = d - 2$  para  $d > 4$  (además, su resultado es válido para todo tipo de elipsoides).

En dimensión dos, M.N. Huxley utilizando, al igual que en el problema del círculo, el “Método discreto de Hardy y Littlewood” obtuvo en 1993,  $\theta_2 \leq 46/73$  [Hu] y diez

años después mejoró esta estimación probando,  $\theta_2 \leq 131/208$  [Hu3], acotación válida en regiones planas convexas.

Observando los resultados que acabamos de mencionar salta a la vista que existe una gran diferencia entre las acotaciones en cuerpos convexos suaves generales y las cotas para las bolas, sin embargo, si los cuerpos convexos cumplen determinados requisitos se pueden dar resultados intermedios. Si se supone la existencia de un eje rotacional de simetría, es decir, si los cuerpos son de revolución, se mejoran los resultados anteriores incluso simplemente con utilizar la acotación de van der Corput. En 1998, F. Chamizo [Ch] probó para cuerpos de revolución bajo ciertas hipótesis que  $\theta_3 \leq 11/8$  y  $\theta_d \leq d-2$  en  $d > 4$  (ésta última, es la mejor cota superior válida para cuerpos de revolución generales, para la bola se alcanza la igualdad).

Después de este recorrido llegamos ya a la clase de elipsoides que trataremos en el capítulo 4, los elipsoides racionales. Comencemos repasando las acotaciones que se han ido dando en la historia. Hace hoy casi un siglo, en 1924, se demostró que  $E(R) = O(R^{d-2})$  si  $d > 4$  y  $E(R) = O(R^2 \log^2 R)$  si  $d = 4$ , A. Walfisz [Wa] lo probó para  $d \geq 8$  y E. Landau [La3] para  $d \geq 4$ . Posteriormente, A. Walfisz [Wa3] mejoró la acotación para  $d = 4$  obteniendo  $E(R) = O(R^2(\log R)^{2/3})$ . Teniendo en cuenta que en sentido contrario se sabe que  $E(R) = \Omega(R^{d-2})$  si  $d \geq 3$ , para  $d \geq 4$  el problema está totalmente resuelto y los únicos casos abiertos son  $d = 2$  y  $d = 3$ .

Nos centramos ahora de lleno en el caso de dimensión tres. Como hemos visto antes se sabe que  $\theta_3 \geq 1$ , de hecho teniendo en cuenta los  $\Omega$ -resultados incluso se puede afinar más (véase [No3]). Con respecto a la acotación superior, la mejor que se conoce es  $\theta_3 \leq 4/3$  (véase [Ch]).

Si nos detenemos un momento a recordar la mejor cota general [Mü2],  $\theta_3 \leq 63/43$ , y la de la esfera [HB2],  $\theta_3 \leq 21/16$ , observamos rápidamente que existe bastante diferencia entre ellas; esta disparidad se puede explicar. La acotación para elipsoides racionales es mejor que la del caso general debido a que el tener tres ejes racionales permite usar las estimaciones trigonométricas de J.-R. Chen [Ch] e I.M. Vinogradov [Vi3] (véase la sección 6 de [Ch]) y en la esfera se consigue el mejor resultado porque las estimaciones trigonométricas se complementan, gracias al número de clases, con las de caracteres.

En el capítulo 4 de esta memoria se mejora la estimación de la discrepancia en los elipsoides racionales. En concreto se prueba que  $\theta_3 \leq 21/16$ , es decir, se consigue el mismo resultado que en la esfera.

La idea inicial es similar a la de la esfera, el número de puntos del retículo en elipsoides racionales se expresa como una suma, ésta después se regulariza y como consecuencia se prolonga un poco más. Esto se traduce en tener que controlar el número de puntos del retículo en finas capas alrededor del elipsoide que en este caso se expresan como una suma corta de coeficientes de formas modulares que a su vez se descomponen en

dos partes. Una de ellas se acaba expresando como una suma corta de caracteres y se acota como lo hizo D.R. Heath-Brown en [HB2] y la otra se controla utilizando diferentes técnicas de formas modulares que se expondrán en el capítulo 4.

En definitiva, si en la esfera la idea clave es descomponer el error en una parte trigonométrica y en otra que se controla acotando sumas de caracteres, en el capítulo 4 se prueba que para los elipsoides racionales debe añadirse una tercera parte modular, hecho novedoso porque hasta donde sabemos es la primera vez que aparecen intrínsecamente propiedades de formas modulares en problemas clásicos de puntos del retículo.

Los resultados originales contenidos en esta memoria pueden encontrarse en los siguientes artículos.

- Los del capítulo 2 en  
F. Chamizo and E. Cristóbal. *The sphere problem and zeros of the  $L$ -functions*. Enviado al Journal Mathematical Society of Japan.
- Los del capítulo 3 en  
F. Chamizo, E. Cristóbal and A. Ubis. *Visible points in the sphere*. J. Number Theory. Vol 126, Issue 2, (2007), 200–211.
- Los del capítulo 4 en  
F. Chamizo, E. Cristóbal and A. Ubis. *Lattice points in rational ellipsoids*. J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), 283–289.

# Capítulo 2

## El problema de la esfera y las funciones $L$

### 2.1. Introducción

Nuestro objetivo en este capítulo es estimar el número de puntos con coordenadas enteras en una esfera grande de radio  $R$ , lo cual se puede expresar como,

$$(2.1) \quad S(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \|\vec{n}\| \leq R\}.$$

Sabemos que este número está bien aproximado por el volumen de la esfera y la cuestión reside en reducir al máximo el término de error. Es decir, para  $R \geq 1$ ,

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O(R^\theta)$$

y el problema es encontrar el ínfimo entre todos los  $\theta$  posibles que cumplen lo anterior. A este ínfimo lo denotaremos siempre  $\theta_3$ .

Resultados en media y lo que ocurre en dimensiones más grandes llevan a conjeturar  $\theta_3 = 1$ , de hecho se sabe que  $\theta_3 \geq 1$  [Ts].

Para estimar  $S(R)$  se comienza escribiéndolo con una suma, como en (1.3) de la introducción general (donde aparece  $r_3(n)$  que recordamos, está definido en (1.2)). Después, como también vimos en dicha introducción, esta suma se regulariza con una función  $f$  que es como la identidad en  $[1, R]$  y se anula fuera de  $[0, R + H)$ ,  $0 < H < 1$ . Así se tiene,

$$S_f(R) = \sum_{1 \leq n \leq (R+H)^2} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} f(\sqrt{n}).$$

La regularización es ventajosa para aplicar la fórmula de sumación de Poisson, sin embargo, si observamos la nueva suma nos daremos cuenta de que ahora en lugar de sumar

sobre una esfera de radio  $R$  sumamos sobre una de radio  $R + H$ . Por tanto, es necesario restar los puntos que sumamos de más y así  $S(R)$  queda expresado como en (1.5).

Los puntos sobrantes no se pueden descontar con métodos analíticos (éstos fallan en regiones finas). El punto clave para restarlos está en relacionar  $S_f(R, H)$  (definida en (1.4)) con sumas de caracteres. Tal relación se basa en la fórmula [Gr],

$$(2.2) \quad R_3(n) = c_n h(-4n) = \frac{1}{\pi} c_n \sqrt{n} L(1, \chi_n), \quad n > 1,$$

donde  $h(-4n)$  es el número de clases de formas cuadráticas binarias de discriminante negativo  $-4n$ ,  $L(1, \chi_n)$  es la función  $L$  asociada al carácter  $\chi_n(m) = (-4n/m)$ ,  $c_n$  es una sucesión de enteros de periodo 8 y  $R_3(n)$  es el número de representaciones primitivas de un entero  $n$  como suma de tres cuadrados. A partir de esta última cantidad aritmética,  $r_3(n)$  se recupera mediante la siguiente relación,

$$(2.3) \quad r_3(n) = \sum_{d^2|n} R_3\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

En este capítulo mejoraremos la cota superior de  $\theta_3$  de forma condicional, para ello partiremos de trabajos anteriores.

F. Chamizo y H. Iwaniec, en [Ch-Iw], escogiendo como  $f$  una función lineal a trozos probaron para  $S_f(R)$  lo siguiente,

$$(2.4) \quad S_f(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 + 2\pi H R^2 + E_1(R, H)$$

donde

$$(2.5) \quad E_1(R, H) \ll R H^{-\epsilon} (N_1^{-1} |V_{N_1}(R_1)| + N_2^{-3/2} H^{-1} |V_{N_2}(R_2)|) + O(R^\epsilon)$$

para  $N_1 \leq H^{-2} \leq N_2$  y  $R_1, R_2 = R + O(H)$ , con

$$V_N(R) = \sum_{n \asymp N} r_3(n) e(R\sqrt{n}).$$

La notación  $n \asymp N$  equivale a decir  $N \leq n < 2N$ , o en general  $N \ll n \ll N$ .

En lo que respecta a  $S_f(R, H)$ , sumando por partes a partir de (2.3) y (2.2), se puede probar,

$$(2.6) \quad S_f(R, H) = 2\pi H R^2 + E_2(R, H)$$

con

$$(2.7) \quad E_2(R, H) \ll R^{1+\epsilon} + R \sum_{d \leq 2\sqrt{R}} d^{-1} |E(R/d, 3HR/d^2)|$$



donde

$$E(N, K) = \sum_{\substack{N^2 < n < N^2 + K \\ n \equiv \nu \pmod{8}}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq \square}}^{\infty} \frac{\chi_n(m)}{m}$$

para algún  $\nu$  y con la suma en  $m$  restringida a los no cuadrados. Salvo leves cambios de notación esto es el Lema 1 de [HB2].

Uniendo todo lo anterior queda claro que el término de error de  $S(R)$  se compone de una parte trigonométrica y otra de caracteres, es decir, dado un  $H$  y utilizando (1.5), (2.4) y (2.6), se tiene,

$$(2.8) \quad S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O(|E_1(R, H)| + |E_2(R, H)| + 1).$$

Por tanto se puede decir que cotas superiores para  $V_N(R)$  (suma trigonométrica) y  $E(N, K)$  (suma de caracteres) se transforman en cotas superiores para  $\theta_3$ . Por ejemplo, empleando las cotas triviales,  $V_N(R) \ll N^{3/2+\epsilon}$  y  $E(N, K) \ll KN^\epsilon$ , se sigue,

$$S(R) = \frac{4\pi}{3}R^3 + O(RH^{-1-\epsilon} + R^{2+\epsilon}H)$$

y eligiendo  $H = R^{-1/2}$  se tiene  $\theta_3 \leq 3/2$ , un antiguo resultado de E. Landau [La3]. En este ejemplo podemos ya observar que el tamaño de  $H$  es importante, es un compromiso entre la suma trigonométrica y la suma de caracteres. Las sumas en (2.5) se hacen más largas cuando  $H$  decrece mientras que en (2.7) ocurre lo contrario, son más largas cuando  $H$  crece.

Las estimaciones de J.-R. Chen [Ch] e I.M. Vinogradov [Vi3] que en 1963 llevaron a obtener  $\theta_3 \leq 4/3$  daban en algunos rangos  $V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon}$ , acotación que viene de un término diagonal y por tanto, difícilmente superable con los conocimientos actuales. Más tarde, en 1995, F. Chamizo y H. Iwaniec [Ch-Iw] consiguieron extender los rangos donde se obtiene esta cota para  $V_N(R)$  (en [Ch-Iw] prueban  $\theta_3 \leq 29/22$ , el paso fundamental es la introducción de la suma de caracteres). Después, D.R. Heath-Brown, utilizando su desigualdad de gran criba para caracteres reales [HB], mejoró la acotación de la suma de caracteres y probó [HB2] en algunos rangos compatibles con los de las estimaciones trigonométricas,  $E(N, K) \ll K^{5/6}N^\epsilon$ , lo que lleva, tras elegir el  $H$  óptimo, a la mejor cota superior de  $\theta_3$  que se conoce hasta hoy,  $\theta_3 \leq 21/16$ . También observó que suponiendo GRH se podría conseguir  $E(N, K) \ll K^{1/2}N^\epsilon$ , lo que junto a suponer  $V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon}$  en todos los rangos, daría,  $\theta_3 \leq 5/4$ , que es por tanto la mejor acotación posible con estos métodos. Pero, ni aun acotando de manera óptima la suma de caracteres es posible mejorar la cota de D.R. Heath-Brown, ya que la mejor estimación que se conoce para  $V_N(R)$  (véase [Ch-Iw]) es una suma de varios términos entre los que está  $R^{21/16+\epsilon}$ . Por

tanto, para conseguir nuevas estimaciones de  $\theta_3$  es necesario mejorar la acotación de  $V_N(R)$  en los rangos donde  $R^{21/16+\epsilon}$  domina. Por otro lado, observamos que para mejorar la estimación de la suma de caracteres dada en [HB2] no hace falta utilizar GRH en toda fuerza, bastan hipótesis más débiles combinadas con argumentos incondicionales.

En este capítulo entraremos en este círculo de ideas. Mejoraremos de forma condicional la cota superior de  $\theta_3$  suponiendo una hipótesis (más débil que GRH) ligada al crecimiento de las funciones  $L$  reales, o equivalentemente a la distribución de sus ceros; la utilizaremos para acotar mejor la suma de caracteres. Así que una consecuencia que hay detrás de nuestros resultados principales es que existe una conexión entre el término de error cuando contamos puntos del retículo en la esfera y cuando contamos números primos en progresiones aritméticas.

También mejoraremos la estimación de la parte trigonométrica con argumentos incondicionales (como hemos dicho antes es necesario para obtener mejores cotas de  $\theta_3$ ), para ello utilizaremos la teoría de pares de exponentes.

Para terminar esta introducción queremos señalar que las relaciones entre sumas cortas de  $r_3(n)$  y ceros de las funciones  $L$  aparecieron en un artículo de Bykovskii [By2] en 1997. Sin embargo, no interfieren con nuestro trabajo ya que los resultados de densidad incondicionales que allí se utilizan no se ajustan a los rangos del problema de la esfera.

## 2.2. Resultados principales

Comenzaremos esta sección recordando algunas célebres conjeturas sobre las funciones  $L$  y las sumas trigonométricas.

**Conjetura GRH** (*Hipótesis de Riemann Generalizada*). La región  $\Re s > 1/2$  es libre de ceros para cualquier función  $L$  de Dirichlet.

**Conjetura GLH** (*Hipótesis de Lindelöf generalizada*). En  $\Re s = 1/2$  se tiene,  $L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon)$  siendo  $\chi$  un carácter módulo  $q$ .

**Conjetura LEP** (*Pares de exponentes de Lindelöf*). Para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $(\epsilon, 1/2+\epsilon)$  es un par de exponentes.

Esta última conjetura es natural dentro del contexto de las sumas trigonométricas [Mo] pero no ha recibido ninguna denominación. Aquí la llamamos Pares de exponentes de Lindelöf porque implica la clásica hipótesis de Lindelöf para la función  $\zeta(s)$ .

Antes de continuar nos pararemos un poco en las dos primeras hipótesis. Retrocedemos para ello al siglo XIX, concretamente a 1859, en ese año Bernhard Riemann obtuvo

una fórmula analítica para hallar  $\pi(x)$ , la cantidad de primos menores que un número dado  $x$ . La fórmula depende de los ceros de la función zeta,  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  (definida en el semiplano  $\Re(s) > 1$  y por continuación analítica extendida a todo el plano complejo con un polo simple en  $s = 1$ ). B. Riemann sabía que esta función tenía ceros, llamados triviales, en los enteros pares negativos y además conjeturó [Ri] que el resto de ceros (los no triviales) tenían parte real  $1/2$ . Esta conjetura se conoce como Hipótesis de Riemann (RH) y es en la actualidad uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas. D. Hilbert en 1900 ya incluyó su demostración en el problema 8 de su famosa lista de los 23 problemas no resueltos y el Instituto Clay ha ofrecido un millón de dólares a quién la demuestre. A primera vista no parecía que la hipótesis fuera a ser tan crucial, se veía como una propiedad especial de la función  $\zeta(s)$ , de hecho B. Riemann escribió: “Sin duda alguna sería deseable tener una prueba rigurosa de esta proposición, sin embargo, después de algunos breves intentos sin éxito, he dejado esta investigación a un lado por el momento ya que parece innecesaria para el objetivo inmediato de mi estudio”. De este comentario no se debe sacar la conclusión de que para él la hipótesis era una mera observación, sabía que era equivalente a tener el mínimo error posible en el teorema de los números primos. Sin embargo, la razón de que hoy en día probar la conjetura sea muy importante no sólo está en el teorema de los números primos, va mucho más allá, radica en que la función  $\zeta(s)$  no es un objeto aislado, sino que es la más simple de todas las funciones  $L$ , series de Dirichlet con un producto de Euler que satisfacen una ecuación funcional del tipo de la de  $\zeta(s)$ . Para sus ceros también se conjeturan hipótesis como RH y los resultados que se derivan de estas hipótesis son los que dan inmenso valor a sus ansiadas demostraciones. Las más conocidas de todas las funciones  $L$  son las que aparecen en nuestro problema, las de Dirichlet, y la extensión más famosa de RH es GRH (probablemente formulada por Piltz en 1884, véase p. 124 [Dav]). Dirichlet [Di] introdujo las funciones para probar que el número de primos en progresiones aritméticas de la forma  $\{an + q\}_n$  con  $a$  y  $q$  coprimos es infinito. Cuando el objeto de estudio es saber cuantos primos menores o iguales que un número dado  $x$  hay en dichas progresiones, GRH tiene un papel importante, si es cierta, implicaría que el error en el teorema de los números primos en progresiones aritméticas es  $O(x^{1/2+\epsilon})$  cuando  $x$  tiende a infinito. Por otro lado, GRH implica GLH (véase p. 116 [Iw-Ko]) y estas dos hipótesis tienen muchas consecuencias matemáticamente hablando (aparte de la ya mencionada del teorema de los primos en progresiones aritméticas). Aunque modesta, se podría decir que nuestra acotación de la suma de caracteres es una de ellas. Y una de las más famosas es la prueba de Hardy y Littlewood [Har-Li] de que cualquier número impar suficientemente grande es suma de tres primos, conjetura débil de Goldbach. Vinogradov la probó más tarde [Vi2] sin utilizar GRH, lo que podría constituir una evidencia a favor de estas hipótesis y de los resultados que se basan en ellas. Además ésta no sería la única evidencia [Bo].

Después del paréntesis explicativo volvemos a nuestro problema, nos falta conocer la

hipótesis  $L_\beta$ .

Como hemos dicho antes, se sabe que GRH implica GLH y, por convexidad, GLH implica (para  $\chi \neq \chi_0$ )

$$L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon) \quad \text{en } \Re s \geq 1/2.$$

Si suponemos que esto sólo ocurre en  $\Re s \geq \beta$  donde  $\beta \in [1/2, 1]$  obtenemos una variante de GLH que denominaremos  $L_\beta$ . Esta nueva hipótesis es crucial en nuestros argumentos, gracias a ella mejoramos la acotación de la suma de caracteres.

**Conjetura  $L_\beta$ .** Para  $\Re s \geq \beta$  y  $\chi$  un carácter real no principal módulo  $q$ ,  $L(s, \chi) = O(q^\epsilon |s|^\epsilon)$ .

OBSERVACIÓN: Se puede probar que  $L_\beta$  es equivalente a un teorema sobre la densidad de los ceros en rectángulos de altura uno en  $\Re s > \beta$ , concretamente  $N(\sigma, T+1, \chi) - N(\sigma, T, \chi) = o(\log qT)$  para  $\sigma > \beta$  (cf. [Pa] Th.5.4). En particular la ausencia de los ceros en  $\Re s > \beta$  implica  $L_\beta$ .

Después de haber visto estas conjeturas podemos ya formular nuestros resultados principales.

Las cotas superiores que daremos para  $\theta_3$  se expresan por medio de la función  $\kappa = \kappa(\beta)$  que se define en  $[3/4, 1]$  por

$$\kappa(\beta) = \begin{cases} 5/16 & \text{si } \beta \geq 12/13 \\ 5/(28 - 13\beta) & \text{si } 11/13 \leq \beta \leq 12/13 \\ (2 - \beta)/(9 - 6\beta) & \text{si } 3/4 \leq \beta \leq 11/13. \end{cases}$$

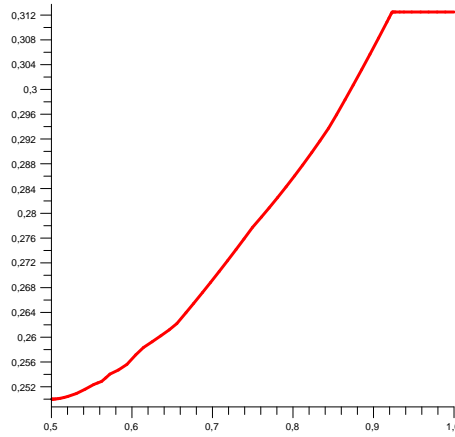
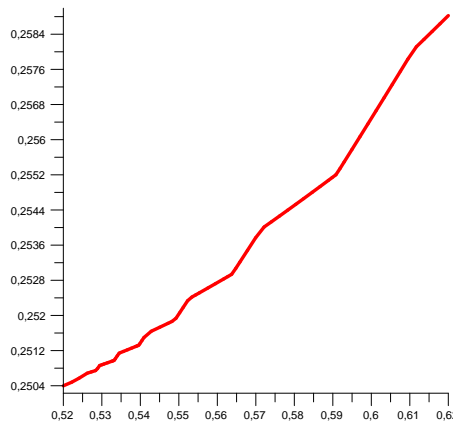
En  $(1/2, 3/4]$  la función  $\kappa(\beta)$  muestra auto semejanzas,

$$(2.9) \quad \kappa(\beta) = \frac{r - (r-1)\beta}{4r+1 - (4r-2)\beta} \quad \text{si} \quad \frac{r+1}{5r^2 - 6r - 1} \geq \beta - \frac{1}{2}$$

$$(2.10) \quad \kappa(\beta) = \frac{5r-1-2\beta}{25r-3 - (10r+6)\beta} \quad \text{si} \quad \frac{r+1}{5r^2 - 6r - 1} \leq \beta - \frac{1}{2}$$

donde  $r = \lfloor (22\beta - 9)/(10\beta - 5) \rfloor$ .

A continuación mostramos la gráfica de  $\kappa(\beta)$  en todo el rango (figura 1) y después hacemos un zoom a dicha gráfica (figura 2) para apreciar mejor las auto semejanzas.

Figura 1. Función  $\kappa(\beta)$ Figura 2. Función  $\kappa(\beta)$  en el intervalo  $[13/25, 31/50]$ 

En algunos rangos nuestros resultados dependen de pares de exponentes  $(p, q)$  a través de la siguiente expresión,

$$(2.11) \quad \gamma = \frac{p + 2q - 1}{4p + 4}.$$

Suponiendo LEP,  $\gamma$  está arbitrariamente cerca de cero y es en esta situación donde obtenemos los mejores resultados. Con los pares de exponentes probados en la ac-

tualidad el valor mínimo que  $\gamma$  puede alcanzar es, hasta donde nosotros sabemos,  $\gamma_0 = 0,0786953379\dots$

**Teorema 2.2.1** *Sea  $\kappa = \kappa(\beta)$  como antes. Suponiendo  $L_\beta$  para algún  $\beta \in (1/2, 1]$ , se tiene,  $\theta_3 \leq 1 + \kappa$  siempre que  $\gamma \leq 1/2 - 1/8\kappa$ .*

Obsérvese que si  $\beta \rightarrow 1/2^+$  entonces  $\kappa \rightarrow 1/4$  y  $1/2 - 1/8\kappa \rightarrow 0^+$ , es decir, se obtiene el siguiente corolario:

**Corolario 2.2.2** *Suponiendo LEP y GLH, se tiene  $\theta_3 \leq 5/4$ .*

El inconveniente es que LEP, que daría  $\gamma \rightarrow 0$ , está lejos de los pares de exponentes que se conocen en la actualidad (algunos autores han afirmado que probar LEP es “más difícil” que probar la Hipótesis de Riemann) por tanto incluso suponiendo GRH el Teorema 2.2.1 deja de dar información cuando  $\beta$  se acerca a  $1/2$ .

Este problema se puede eludir admitiendo que las cotas superiores de  $\theta_3$  dependan de  $\gamma$ . Consideramos un rango de  $\gamma$  que contiene a  $\gamma_0$  y a posibles mejoras razonables de este valor utilizando pares de exponentes.

**Teorema 2.2.3** *Suponiendo  $L_\beta$  para algún  $\beta \in [1/2, 1]$ , para cualquier  $\gamma \in [1/20, 1/10]$  se cumplen las siguientes acotaciones,*

$$(2.12) \quad \theta_3 \leq 1 + \kappa(\beta) \quad \text{si} \quad \min(\gamma_1, \gamma_2) \leq \beta < 1$$

$$(2.13) \quad \theta_3 \leq 1 + \frac{5(\gamma + 1/4)}{(18 - 13\beta)\gamma + 5} \quad \text{si} \quad \frac{11}{13} \leq \beta < \gamma_1$$

$$(2.14) \quad \theta_3 \leq 1 + \frac{(2 - \beta)(\gamma + 1/4)}{(5 - 4\beta)\gamma + 2 - \beta} \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \min\left(\frac{11}{13}, \gamma_2\right),$$

donde  $\gamma_1 = (8 + 40\gamma)/13$  y  $\gamma_2 = 1/2 + 6\gamma/(1 + 4\gamma)$ .

OBSERVACIÓN: Para  $\gamma < 3/40$  el segundo rango queda vacío. En cualquier caso todo el intervalo  $1/2 \leq \beta \leq 1$  queda cubierto porque  $\gamma_1 < \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 > 11/13 \Leftrightarrow \gamma_2 > 11/13$ .

OBSERVACIÓN: Si  $\gamma \geq 3/40$  en el rango  $\beta \geq \gamma_1$  se concluye el mismo resultado que en el Teorema 2.2.1 sin suponer LEP. Además todos los pares de exponentes que se conocen en la actualidad verifican  $\gamma \geq 3/40$ .

Con  $\gamma_0$ , el valor más pequeño que  $\gamma$  puede alcanzar con pares de exponentes conocidos, podemos obtener:

**Corolario 2.2.4** *Suponiendo  $L_\beta$  para algún  $\beta \in [1/2, 1]$ ,*

$$\begin{aligned} \theta_3 &\leq 1 + \frac{5}{16} \quad \text{si} \quad \beta \geq \frac{12}{13} \\ \theta_3 &\leq 1 + \frac{5}{28 - 13\beta} \quad \text{si} \quad \frac{30846}{35971} \leq \beta \leq \frac{12}{13} \\ \theta_3 &\leq 1 + \frac{18190}{71018 - 11323\beta} \quad \text{si} \quad \frac{11}{13} \leq \beta \leq \frac{30846}{35971} \\ \theta_3 &\leq 1 + (2 - \beta) \frac{3638}{26491 - 14552\beta} \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{11}{13}. \end{aligned}$$

## 2.3. La suma trigonométrica

Esta sección esta dedicada a acotar la parte trigonométrica del término de error de  $S(R)$ , o lo que es lo mismo, a probar el siguiente teorema,

**Teorema 2.3.1** *Para  $H^{-2} \geq R > H^{-1} > 1$ , se tiene,*

$$E_1(R, H) \ll R^{1+\epsilon} (H^{-1/2} + R^{1/4} H^{-\gamma}).$$

En su demostración los pares de exponentes serán una herramienta importante, por ello hacemos a continuación un breve esquema de las definiciones básicas de la teoría de pares de exponentes (véanse [Mo], [Gr-Ko] y [Ph] para mayor profundidad).

Comencemos por recordar qué es un par de exponentes.

**Definición:** Sean  $N, t$  y  $s$  números reales positivos con  $t > N^s$ , un par de exponentes es una pareja de números reales  $(p, q) \in [0, 1/2] \times [1/2, 1]$  tal que

$$\sum_{x \asymp N} e(f(x)) \ll (tN^{-s})^p N^q$$

para toda  $f \in C^K$  que satisfaga

$$(2.15) \quad |f^{(k+1)}(x) - (-1)^k (s)_k t x^{-s-k}| < \epsilon (s)_k t x^{-s-k}, \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

donde  $(s)_k = \Gamma(s+k)/\Gamma(s)$  es el símbolo de Pochhammer,  $K = K(p, q, s)$  y  $\epsilon = \epsilon(s, p, q) > 0$  suficientemente pequeño, (véase [Mo], [Gr-Ko] o [Ph]).

De la definición anterior es fácil deducir que la clase de funciones con las que se pueden usar pares de exponentes es bastante restrictiva. Con ello lo que se logra, es controlar todas las fases que puedan aparecer. Así se intenta vencer uno de los principales obstáculos de la acotación de sumas trigonométricas, la variación incontrolada de frecuencias, que en este tipo de funciones depende de la primera derivada, la cual es aproximadamente  $tx^{-s}$  para algún  $t$  y algún  $s$  positivos. Normalmente estas acotaciones están expresadas en términos de la magnitud del intervalo de sumación,  $N$ . En los casos donde la primera derivada sea menor o igual que uno no se pueden usar pares de exponentes (existen otros métodos para realizar este tipo de acotaciones, véanse Teoremas 2.1 y 2.2 de [Gr-Ko]).

La teoría de pares de exponentes está constituida por dos procesos,  $A$  y  $B$ , que producen nuevos pares de exponentes a partir de otros antiguos.

- El proceso  $A$  está basado en la desigualdad de Weyl-van der Corput (véase Lema 2.5 de [Gr-Ko]) y dice que si  $(p, q)$  es un par de exponentes, entonces también lo es

$$(2.16) \quad A(p, q) = \left( \frac{p}{2p+2}, \frac{p+q+1}{2p+2} \right).$$

- El proceso  $B$  proviene de la fórmula de sumación de Poisson y dice que si  $(p, q)$  es un par de exponentes, entonces

$$(2.17) \quad B(p, q) = \left( q - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} \right)$$

también lo es.

El proceso  $A$  reduce la fase de forma que se puedan aplicar métodos analíticos, esencialmente el proceso  $B$ .

Estos procesos también se pueden interpretar geoméricamente. El proceso  $B$  es una simetría por la recta  $y = x + 1/2$  y el proceso  $A$  lleva a los pares de exponentes hacia el trivial, es decir, hacia el par  $(0, 1)$ .

Podemos obtener infinitos pares de exponentes de van der Corput (así se denominan) aplicando repetidas veces los procesos  $A$  y  $B$  al par de exponentes trivial. Además existe un algoritmo [Gr-Ko] para calcular los pares de exponentes que se pueden generar de esta forma y que minimizan una expresión racional. Poco después de que este algoritmo viese la luz, en 1986, E. Bombieri y H. Iwaniec [Bo-Iw] obtuvieron un par de exponentes imposible de conseguir a partir del trivial con los procesos  $A$  y  $B$ , la desventaja es que sólo funcionaba con una función muy particular (estaba orientado a obtener una



acotación de la función zeta). Después, en 1988, Huxley y Watts [Hu-Wa] extendieron el método a funciones más generales, y desde 1988 hasta hoy se han ido sucediendo algunos trabajos ([Hu-Wa2], [Wat], [Hu-Ko] y [Hu2]) que exploran y tratan de sacar mayor partido del método de E. Bombieri y H. Iwaniec. El más reciente de ellos es [Hu4] (en nuestras acotaciones utilizaremos un par de exponentes proveniente del nuevo par de [Hu4]).

En la práctica, probar que una función  $f$  pertenece a la clase de funciones con la que se pueden emplear pares de exponentes puede resultar complicado. Para facilitar un poco este trabajo, en nuestras aplicaciones probaremos que  $f$  cumple la fórmula asintótica que escribimos a continuación. Dados  $k$  y  $s$

$$(2.18) \quad f^{(k+1)}(x) \sim (-1)^k (s)_k t x^{-s-k}$$

cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Si  $f$  verifica esta fórmula, entonces también satisfará (2.15) ya que en nuestras aplicaciones podemos suponer que  $R$  es arbitrariamente grande y, veremos que salvo en un caso que trataremos aparte,  $N$  crece con  $R$ .

Durante toda esta sección denotaremos con  $\partial_i^k f$  a las derivadas parciales  $k$ -ésimas de cualquier función  $f$  con respecto a la variable  $i$  (para  $k = 1$  omitiremos el superíndice).

Empecemos con los resultados que nos llevarán a probar el Teorema 2.3.1. El primero que veremos muestra la acotación que se consigue para  $V_N(R)$  utilizando la mejor estimación en una variable, la hipótesis LEP.

**Lema 2.3.2** *Bajo LEP,  $V_N(R) = O(R^\epsilon N^{5/4+\epsilon})$ .*

*Demostración:* En el caso  $N \leq R^\epsilon$  el resultado es trivial y si  $R > N^\epsilon$  procedemos como en [Ch-Iw] (véase la prueba del Lema 3.1). Allí se transforma la suma  $V_N(R)$  y se obtiene

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\epsilon} + N^{1+\epsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} e(f(x, y)) \right|,$$

donde  $f(x, y) = R(\sqrt{x} - \sqrt{x+y})$  y  $N^{3/2}R^{-1} \ll D \ll N^{1-\epsilon}$ . No es difícil ver que  $f$  satisface (2.18) como función de  $x$  con  $s = 3/2$  y  $t = Ry/4$ , así que podemos aplicar LEP a la suma interior y el lema queda probado.  $\square$

$V_N(R)$  se puede relacionar con una suma bidimensional de más fácil tratamiento, lo podemos ver en la prueba del Lema 3.1 de [Ch-Iw]. Para facilitar las referencias establecemos aquí una versión algo más concreta y precisa.

**Lema 2.3.3** (véase la prueba del Lema 3.1 de [Ch-Iw]) *Sea  $R \gg N^{1/2+\epsilon}$ , entonces para algún  $D \geq 1$  con  $N^{3/2}R^{-1} \ll D \ll N^{1-\epsilon}$ ,*

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon} + R^{-1/4}D^{-1/4}N^{9/8+\epsilon}|T_{DN}|^{1/2}$$

donde  $T_{DN}$  es la suma trigonométrica,

$$T_{DN} = \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp RDN^{-3/2}} e(g(x, y)) \right|$$

con  $g(x, y) = f(\alpha(x, y), y) - x\alpha(x, y)$ ,  $f(x, y) = R(\sqrt{x} - \sqrt{x+y})$  y  $\alpha = \alpha(x, y)$  definida de forma implícita como  $\partial_1 f(\alpha(x, y), y) = x$ .

Por otro lado, si  $R \ll N^{1/2+\epsilon}$ , entonces,

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon}.$$

*Demostración:* Si  $R \gg N^{1/2+\epsilon}$  el resultado queda establecido directamente a partir de (3.1) de [Ch-Iw].

Si  $R \ll N^{1/2+\epsilon}$  procedemos como en la prueba del Lema 3.1 de [Ch-Iw] salvo que fijamos  $|c_1 - c_2| < N^{1/2-10\epsilon}$  después de aplicar la desigualdad de Cauchy. Por tanto, para un  $D < N^{1-10\epsilon}$  apropiado, obtenemos,

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon} + N^{1/2+\epsilon} \left( \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} e(f(x, y)) \right| \right)^{1/2}.$$

Como  $\partial_1 f \asymp RD/N^{3/2}$  deducimos entonces para  $R$  grande,  $|\partial_1 f| < 1/2$ . Aplicando el test de la derivada primera (véase Teorema 2.1 de [Gr-Ko]) concluimos,

$$\sum_{x \asymp N} e(f(x, y)) \ll R^{-1}D^{-1}N^{3/2}$$

y la demostración queda completa.  $\square$

En el siguiente lema trataremos la función  $\alpha(x, y)$  que aparece en la fase de  $T_{DN}$  con el fin de conocer cómo se comporta para luego comprobar si verifica (2.18).

**Lema 2.3.4** *Sean  $x \asymp RDN^{-3/2}$  e  $y \asymp D$ , con  $R^\epsilon \ll N \ll R^{2-\epsilon}$  y  $N^{3/2}R^{-1} \ll D \ll N^{1-\epsilon}$ , entonces,*

$$\alpha(x, y) = \frac{y}{v} A(v)$$

donde  $v = (4xy^{1/2}R^{-1})^{2/3}$  y  $A(t)$  denota una función analítica en un entorno de 0 que cumple  $A(0) = 1$ .

*Demostración:* Por la definición de  $\alpha(x, y)$  tenemos

$$\frac{2xy^{1/2}}{R} = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1/2} \left(1 - \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)^{-1/2}\right).$$

A partir de aquí deducimos que  $y/\alpha \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$  (obsérvese que  $2xy^{1/2}R^{-1}$  tiende a 0) y aplicando el desarrollo de Taylor en el lado derecho de la última ecuación obtenemos

$$\frac{y}{\alpha} = vA_1\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

donde  $A_1$  tiene las mismas propiedades que  $A$ . Finalmente, sustituyendo recursivamente deducimos,

$$\frac{y}{\alpha} = vA_2(v),$$

y terminamos la demostración despejando  $\alpha$  con  $A(v) = 1/A_2(v)$ .  $\square$

**Corolario 2.3.5** Sean  $x$  e  $y$  como antes, para  $k, l \geq 0$ ,

$$\partial_1^k \partial_2^l \alpha(x, y) \sim \frac{(-1)^{k+l} (2/3)_k (-2/3)_l}{v x^k y^{l-1}}$$

cuando  $R \rightarrow \infty$ .

Una vez que conocemos como se comportan la función  $\alpha(x, y)$  y sus derivadas, estamos preparados para acotar  $T_{DN}$ .

**Proposición 2.3.6** Si  $(p, q)$  es un par de exponentes, para  $R, D$  y  $N$  como antes, se tiene,

$$T_{DN} \ll RD^{\frac{3+3p+q}{2p+2}} N^{\frac{-2p-3}{2p+2}} + R^{1/2+\epsilon} D^{3/2} N^{-3/4}.$$

*Demostración:* Podemos suponer  $D \gg N^{p/(p+1-q)}$ , porque si no la cota trivial  $O(RD^2 N^{-3/2})$ , daría un resultado mejor.

Aplicando la desigualdad de Cauchy en la primera suma de  $T_{DN}$ , obtenemos,

$$T_{DN}^2 \ll D \sum_{y \sim D} \left| \sum_{x \sim RDN^{-3/2}} e(g(x, y)) \right|^2$$

y usando la Proposición 8.18 de [Iw-Ko] en la suma interior,

$$T_{DN}^2 \ll \frac{RD^2}{N^{3/2}\Delta} \sum_{y \asymp D} \sum_{|z| < \Delta} \left(1 - \frac{|z|}{\Delta}\right) \sum_{a(z) < x < b(z)} e(G(x, y, z))$$

donde  $G(x, y, z) = g(x + z, y) - g(x, y)$ ,  $a(z), b(z) \asymp RDN^{-3/2}$  y  $\Delta$  es un entero positivo tal que  $1 < \Delta \ll R^{1-\epsilon}DN^{-3/2}$ .

Separando el término diagonal y acotando trivialmente las sumas sobre  $x$  y  $z$  deducimos,

$$(2.19) \quad T_{DN}^2 \ll \frac{R^2D^4}{N^3\Delta} + \frac{D^3R^2}{N^3} \sum_{y \asymp D} e(G(x, y, z))$$

para cierta  $x \asymp RDN^{-3/2}$  y cierta  $0 < |z| < \Delta$ .

A partir de las definiciones de  $\alpha$  y  $g$  sabemos que  $\partial_1 g = -\alpha$  y por el teorema del valor medio, tenemos,

$$\partial_2^{l+1}G(x, y, z) = -z\partial_2^{l+1}\alpha(\xi, y), \quad \xi \in [x, x+z].$$

Como  $\Delta = o(x)$ , entonces  $x \sim \xi$ . Por otro lado el corolario anterior nos dice que

$$\partial_2^{l+1}\alpha(x, y) \sim \frac{(-1)^{l+1}(-2/3)_{l+1}R^{2/3}}{(4x)^{2/3}y^{l+1/3}},$$

lo que muestra que  $\alpha$  satisface (2.18) con  $t = \frac{2}{3}(R/4x)^{2/3}$  y  $s = 1/3$  y lo mismo es válido para  $G(x, \cdot, z)$  con  $t \asymp \Delta ND^{-2/3}$ , así pues, podemos aplicar pares de exponentes en (2.19), obteniendo,

$$T_{DN} \ll \frac{RD^2}{N^{3/2}\Delta^{1/2}} + \frac{RD^{3/2}}{N^{3/2}} \left(\frac{\Delta N}{D}\right)^{p/2} D^{q/2}.$$

Eligiendo  $\Delta = D^{\frac{1-q+p}{1+p}} N^{-\frac{p}{1+p}}$  cuando  $D > N^{\frac{p+3}{2q}} R^{-\frac{1+p}{q}+\epsilon}$  (obsérvese que  $\Delta \ll R^{1-\epsilon}DN^{-3/2}$ ) y  $\Delta = R^{1-\epsilon}DN^{-3/2}$  de otro modo, el resultado queda probado.  $\square$

A continuación podemos ya acotar  $V_N(R)$  que después, por medio de (2.5), nos llevará a la estimación final de  $E_1(R, H)$ .

**Teorema 2.3.7** Para  $R > 1$ ,

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon} + (RN)^\epsilon R^{1/4} N^{(2+\gamma)/2}$$

donde  $\gamma$  viene dado por (2.11).

*Demostración:* Si  $N \leq R^\epsilon$  o  $N \gg R^{2-\epsilon}$ , obtenemos  $V_N(R) \ll N^{5/4+\epsilon}$  trivialmente o a partir de la segunda parte del Lema 2.3.3. Si  $R^\epsilon \ll N \ll R^{2-\epsilon}$ , sustituyendo la Proposición 2.3.6 en el Lema 2.3.3 terminamos la prueba del teorema.  $\square$

OBSERVACIÓN: Nótese que para  $N > R^{1/(1-2\gamma)}$  el “término diagonal”  $N^{5/4+\epsilon}$ , domina. Por tanto en este rango el resultado es tan fuerte como el Lema 2.3.2.

*Demostración del Teorema 2.3.1:* Basta con aplicar el Teorema 2.3.7 en (2.5).  $\square$

## 2.4. La suma de caracteres

En esta sección acotaremos la suma de caracteres, probaremos para ello tres cotas distintas para cada trozo diádico de  $E(N, K)$ ,

$$E_M = M^{-1} \sum_{\substack{N^2 \leq n < N^2 + K \\ n \equiv \nu \pmod{8}}} \sum_{\substack{m \asymp M \\ m \neq \square}} \chi_n(m) \quad \text{con } N, M > 1.$$

La hipótesis  $L_\beta$  es necesaria para demostrar la primera acotación, las otras dos son incondicionales y en algunos rangos mejoran al Lema 2 de [HB2].

**Proposición 2.4.1** *Si  $K \geq 1$ , suponiendo  $L_\beta$  tenemos,*

$$E_M \ll KM^{\beta-1}(NM)^\epsilon.$$

**Proposición 2.4.2** *Para  $K \ll N$ ,*

$$E_M \ll (K^{1/4}M^{1/4} + M^{5/13} + N^{52/201})(NM)^\epsilon.$$

**Proposición 2.4.3** *Para  $K \ll N$  y cualquier entero  $r \geq 3$ , tenemos,*

$$E_M \ll (K^{(r-1)/2r}M^{1/2r} + (M^{5r-3}N^2)^{1/(10r+6)} + (M^3N^{-1})^{5r/(15r+9)})(NM)^\epsilon.$$

A partir de los dos primeros resultados obtenemos el siguiente teorema,

**Teorema 2.4.4** *Suponiendo  $L_\beta$ , si  $H^{-2} \geq R > H^{-1} > 1$ , tenemos,*

$$E_2(R, H) \ll R^{1+\epsilon} \left( (RH)^{5/(18-13\beta)} + (RH)^{(2-\beta)/(5-4\beta)} + R^{52/201} \right).$$

*Demostración:* Acotando  $E_M$  con la Proposición 2.4.1 si  $M > K^{13/(18-13\beta)}$  y con la Proposición 2.4.2 en caso contrario, deducimos para  $K \ll N$ ,

$$E(N, K) \ll \left( K^{5/(18-13\beta)} + K^{(31-13\beta)/(72-52\beta)} + N^{52/201} \right) N^\epsilon.$$

Sustituyendo esta última acotación en (2.7) probamos el resultado en el rango  $11/13 \leq \beta \leq 1$  (obsérvese que  $5/(18-13\beta) \geq (31-13\beta)/(72-52\beta)$ ).

Con el mismo argumento pero ahora aplicando la Proposición 2.4.1 en el caso  $M > K^{3/(5-4\beta)}$ , obtenemos,

$$E(N, K) \ll \left( K^{(2-\beta)/(5-4\beta)} + K^{15/(65-52\beta)} + N^{52/201} \right) N^\epsilon$$

y sustituyendo de nuevo en (2.7) probamos el resultado en el resto del rango (nótese que  $(2-\beta)/(5-4\beta) \geq 15/(65-52\beta)$ ).  $\square$

*Demostración de la Proposición 2.4.1:* Comenzamos añadiendo la contribución de los cuadrados en  $E_M$ ,

$$E_M = M^{-1} \sum_{\substack{N^2 \leq n < N^2 + K \\ n \equiv \nu \pmod{8}}} \sum_{m \asymp M} \chi_n(m) + O(KM^{-1/2}).$$

Después, aplicando un argumento estándar con la fórmula de Perron (véase por ejemplo Ex. 2.12 de [El]) deducimos,

$$E_M = M^{-1} \sum_{\substack{N^2 \leq n < N^2 + K \\ n \equiv \nu \pmod{8}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} L(s, \chi_n) \frac{M_2^s - M_1^s}{s} ds + O(KM^{-1/2+\epsilon})$$

para  $M_1, M_2 \asymp M$ ,  $M_2^{1/2} \leq T \leq M_2$  y  $c = 1 + 1/\log M$ . A continuación, escribiendo

$$\int_{c-iT}^{c+iT} = \int_{c-iT}^{\beta-iT} + \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} + \int_{\beta+iT}^{c+iT},$$

elegimos  $T = M^\beta$  para minimizar el error. Por último, usando  $L_\beta$  y la estimación trivial, obtenemos la cota.  $\square$

Mostramos en lo que sigue el resultado general en el que están basadas las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3,

**Proposición 2.4.5** *Fijado  $r \in \mathbb{Z}^+$ , para  $K \ll N$  y  $\Delta > 0$ , tenemos,*

$$E_M^{2r} \ll (K^{r-1}M + M^r \Delta^{-1} + \min(\Delta^{2r}, \Delta^{5r/3}(1 + N^{2r/3}M^{-r}))(NM)^\epsilon.$$

*Demostración de la Proposición 2.4.2:* Escogiendo  $r = 2$  y  $\Delta = M^{2/5}$  en la Proposición 2.4.5, se deduce,

$$E_M \ll (K^{1/4}M^{1/4} + M^{2/5})(NM)^\epsilon,$$

y escogiendo  $r = 2$  y  $\Delta = M^{6/13}$ ,

$$E_M \ll (K^{1/4}M^{1/4} + M^{5/13}(1 + N^{1/3}M^{-1/2}))(NM)^\epsilon.$$

A partir de aquí podemos escribir,

$$E_M \ll (K^{1/4}M^{1/4} + M^{5/13} + \min(M^{2/5}, N^{1/3}M^{-3/26}))(NM)^\epsilon.$$

Y viendo que  $\min(M^{2/5}, N^{1/3}M^{-3/26}) \ll N^{52/201}$ , el resultado queda probado.  $\square$

*Demostración de la Proposición 2.4.3:* Basta sustituir  $\Delta = (N^{-1}M^3)^{2r/(5r+3)}$  en la Proposición 2.4.5 y coger el segundo argumento del mínimo.  $\square$

En las dos demostraciones anteriores hemos usado la Proposición 2.4.5, sin embargo, ésta aún no ha sido probada, para ello habrá que seguir varios pasos. Será necesario completar la suma en  $n$  de  $E_M$  y después emplearemos la desigualdad de Hölder para ajustar el rango de sumación. Tras aplicar análisis de Fourier encontraremos sumas de caracteres multiplicadas por caracteres aditivos, lo que constituye un escollo a la hora de aplicar resultados de gran criba del tipo de [HB] (hay dependencia en  $m$  de la exponencial). Sin embargo, con el siguiente lema esta cuestión quedará resuelta.

Notamos que el caso  $r = 2$  se obtiene ya en [HB2], no por esto dejamos de escribir nuestra prueba, ambas demostraciones son diferentes.

**Lema 2.4.6** *Para  $r \in \mathbb{Z}^+$ ,*

$$\sum'_{m \succ M} \left| \sum_{L' \leq k < L} \left( \frac{k}{m} \right) e\left(\alpha \frac{k}{m}\right) \right|^{2r} \ll_{r,\epsilon} L^{r+1}(M + L^r)(ML)^\epsilon$$

*uniformemente para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , donde  $m$  esta restringida a los libres de cuadrados mayores que 1 y  $1 \leq L' \leq L \leq 2L'$ .*

*Demostración:* Para abreviar denotaremos con  $\mathcal{C}$  al lado izquierdo de la desigualdad del enunciado del lema.

Empezamos expandiendo la potencia  $r$ -ésima e introduciendo la variable  $h = k_1 + k_2 \cdots + k_r$ . Después aplicamos la desigualdad de Cauchy en la suma en  $h$ , así,

$$\mathcal{C} \ll L \sum'_{m \asymp M} \sum_{h \ll L} \left| \sum_{\substack{L' \leq k_1, \dots, k_r < L \\ k_1 + \dots + k_r = h}} \left( \frac{k_1 k_2 \cdots k_r}{m} \right) \right|^2.$$

Para  $q \leq L^r$  libre de cuadrados y  $d \leq L^{r/2} q^{-1/2}$ , definimos

$$N_h(q, d) = \#\{(k_1, k_2, \dots, k_r) \in [L', L]^r : \sum k_i = h, \prod k_i = qd^2\}$$

y con esto pasamos de sumar en  $r$  variables en la suma interior a sumar sólo en dos,

$$\mathcal{C} \ll L \sum'_{m \asymp M} \sum_{h \ll L} \left| \sum'_{q \leq L^r} \sum_{\substack{d \leq L^{r/2} q^{-1/2} \\ (d, m) = 1}} N_h(q, d) \left( \frac{q}{m} \right) \right|^2.$$

Relajamos ahora la condición  $(d, m) = 1$  introduciendo la función de Möbius,

$$\mathcal{C} \ll L \sum'_{m \asymp M} \sum_{h \ll L} \left| \sum'_{q \leq L^r} \sum_{\substack{d \leq L^{r/2} q^{-1/2} \\ l|d \\ l|m}} \mu(l) N_h(q, d) \left( \frac{q}{m} \right) \right|^2.$$

Sustituimos  $d$  por  $d'l$  (eliminando la condición  $\sum_{l|d}$ ) y cambiamos el orden de los sumatorios para aplicar la desigualdad de Cauchy en la suma sobre  $l$ , así,

$$\mathcal{C} \ll LM^\epsilon \sum'_{m \asymp M} \sum_{h \ll L} \sum_{l|m} \left| \sum'_{q \leq L^r} \sum_{d' \leq L^{r/2} q^{-1/2}} \mu(l) N_h(q, d'l) \left( \frac{q}{m} \right) \right|^2.$$

Después, reemplazando  $m$  por  $m'l$  obtenemos,

$$\mathcal{C} \ll LM^\epsilon \sum_{l \leq L^{r/2}} \sum'_{m' \asymp M/l} \sum_{h \ll L} \left| \sum'_{q \leq L^r} a_l(q, h) \left( \frac{q}{m} \right) \right|^2$$

donde

$$a_l(q, h) = \sum_{d' \leq L^{r/2} q^{-1/2} l^{-1}} N_h(q, d'l) \left( \frac{q}{l} \right).$$

En la última suma de  $\mathcal{C}$  ya no existe dependencia en  $m$ , por tanto podemos utilizar la desigualdad de gran criba para caracteres reales (Corolario 1 de [HB]), con ella deducimos,

$$(2.20) \quad \mathcal{C} \ll M^\epsilon L^{1+\epsilon} \sum_{l \leq L^{r/2}} \sum_{h \ll L} (L^r + Ml^{-1}) \sum_{q \leq L^r} a_l^2(q, h).$$



Ahora, por la definición de  $a_l(q, h)$ ,

$$\sum_h \sum'_q a_l^2(q, h) \ll \sum'_{q \leq L^r} \sum_{d'_1, d'_2 \leq L^{r/2} q^{-1/2} l^{-1}} \sum_{h \ll L} N_h(q, d'_1 l) N_h(q, d'_2 l).$$

Dados  $q$  y  $d$  sólo hay  $L^\epsilon$  posibles valores de  $h$  tales que  $N_h(q, d) \neq 0$ , por otro lado  $N_h(q, d) \ll L^\epsilon$ , así,

$$\sum_h \sum'_q a_l^2(q, h) \ll L^{r+\epsilon} l^{-2}$$

y sustituyendo en (2.20) el resultado queda demostrado.  $\square$

*Demostración de la Proposición 2.4.5:* Nos restringiremos al caso  $\Delta < N$  porque el resultado para  $\Delta \geq N$  es peor que  $N^{5/6+\epsilon}$  y la desigualdad de Pólya-Vinogradov aplicada a la suma en  $n$  da algo mejor para  $M \leq N^{5/3}$ . Para  $M \geq N^{5/3}$ , la desigualdad de Pólya-Vinogradov pero esta vez aplicada en la suma en  $m$  (después de sumar y restar los cuadrados y separar los caracteres principales) mejora otra vez  $N^{5/6+\epsilon}$ . También podemos suponer trivialmente  $K > 1$ .

Por conveniencia ignoramos la condición  $n \equiv \nu \pmod{8}$ , está es claro que nuestros argumentos no se alteran por ello.

Definamos  $E_M^* = E_M^*(N, K)$  como  $E_M$  pero con la suma en  $m$  restringida a los  $m > 1$  libres de cuadrados. Comenzaremos comprobando que basta probar el resultado para  $E_M^*$ .

Cualquier  $m \asymp M$  se puede escribir como  $qd^2$  con  $d \ll M^{1/2}$  y  $q \asymp M/d^2$  libre de cuadrados, entonces,

$$E_M \ll M^{-1} \sum_{d \ll M^{1/2}} \sum'_{q \asymp M/d^2} \sum_{\substack{N^2 \leq n < N^2 + K \\ (n, d) = 1}} \chi_n(q).$$

Aplicando un argumento estándar que utiliza la función de Möbius quitamos la condición  $(n, d) = 1$ ,

$$E_M \ll M^{-1} \sum_{d \ll M^{1/2}} \sum_{q \asymp M/d^2} \sum_{N^2 \leq n < N^2 + K} \sum_{\substack{l|n \\ l|d}} \mu(l) \chi_n(q).$$

Dividimos la variable  $n$  por la variable  $l$  y tras ordenar la suma,

$$E_M \ll M^{-1} \sum_{d \ll M^{1/2}} \sum_{l|d} M d^{-2} |E_{M/d^2}^*(N/\sqrt{l}, K/l)|.$$

Por tanto si  $E_M^*$  satisface la acotación del enunciado también lo hará  $E_M$ .

Introducimos ahora la función  $g = \Delta^{-1}(f_1 * f_2)$ , donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones características de  $[-\Delta/2, \Delta/2]$  y  $[N^2, N^2 + K]$  respectivamente, y  $f_1 * f_2$  indica su convolución. Esta función es un suavizado lineal de  $f_2$ , con ella,

$$E_M^* \leq M^{-1} \sum'_{m \asymp M} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \chi_n(m) \right| + M^{-1} \sum_{N^2 - \Delta/2 < n < N^2} \left| \sum'_{m \asymp M} \chi_n(m) \right| \\ + M^{-1} \sum_{N^2 < n < N^2 + K + \Delta/2} \left| \sum'_{m \asymp M} \chi_n(m) \right|.$$

Aplicando al segundo y al tercer término la estimación trivial y la desigualdad de gran criba para caracteres reales (véase (6) en [HB]) después de la desigualdad de Hölder con  $p = 6$ , concluimos el mínimo del enunciado. Si  $K \leq \Delta$  esta cota también funciona con el primer término.

Falta por demostrar la acotación del primer término, por la desigualdad de Hölder basta probar,

$$\sum'_{m \asymp M} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \chi_n(m) \right|^{2r} \ll (K^{r-1} M^2 + M^{r+1} \Delta^{-1}) (NM)^\epsilon$$

para  $\Delta < K < N$ .

Utilizando la fórmula de sumación de Poisson se tiene,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n + mk) = \frac{1}{m\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_1(k/m) \widehat{f}_2(k/m) e(nk/m),$$

y usando sumas de Gauss,

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \chi_n(m) \right| = \left| \sum_{j=1}^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(j + mk) \chi_j(m) \right| \\ \leq \frac{1}{\Delta \sqrt{m}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_1(k/m) \widehat{f}_2(k/m) \left(\frac{k}{m}\right) \right|.$$

Conjugando podemos suponer  $k > 0$  y como mucho perdemos un factor 2.

Subdividimos ahora en intervalos diádicos para probar,

$$\mathcal{C} := \sum'_{m \asymp M} \left| \sum_{k \asymp L} \widehat{f}_1(k/m) \widehat{f}_2(k/m) \left(\frac{k}{m}\right) \right|^{2r} \\ \ll (K^{r-1} M^{r+2} \Delta^{2r} + M^{2r+1} \Delta^{2r-1}) (NM)^\epsilon.$$

Observamos que la contribución de  $L$  mayor que una potencia de  $M$  es insignificante. Las funciones  $C^\infty$ ,  $\widehat{f}_1$  y  $\widehat{f}_2$ , pueden expresarse simbólicamente como

$$\widehat{f}_1(\xi) = \begin{cases} \Delta B(\xi) & \text{si } 0 < \xi \leq 1/2\Delta \\ \xi^{-1}T(\xi) & \text{si } \xi > 1/2\Delta \end{cases}$$

y

$$\widehat{f}_2(\xi) = \begin{cases} KB(\xi)T(\xi) & \text{si } 0 < \xi \leq 1/2K \\ \xi^{-1}T(\xi) & \text{si } \xi > 1/2K, \end{cases}$$

donde  $B$  y  $T$  representan respectivamente una función decreciente y acotada y un polinomio trigonométrico, no siempre los mismos.

Si  $k \leq c_1 MK^{-1}$  siendo  $c_1$  una constante adecuada, entonces  $\widehat{f}_1(\xi)\widehat{f}_2(\xi) = \Delta KB(\xi)T(\xi)$  para  $\xi = k/m$ . Aplicando el Lema 2.4.6 después de sumar por partes deducimos,

$$\mathcal{C} \ll (\Delta K)^{2r} (MK^{-1})^{r+1} (M + (MK^{-1})^r) (NM)^\epsilon,$$

que es la cota buscada.

En los rangos  $c_1 MK^{-1} < k \leq c_2 M\Delta^{-1}$  y  $k > c_2 M\Delta^{-1}$ , el producto  $\widehat{f}_1(\xi)\widehat{f}_2(\xi)$  es respectivamente  $\xi^{-1}\Delta B(\xi)T(\xi)$  y  $\xi^{-2}T(\xi)$ , para  $\xi = k/m$ . Utilizando el Lema 2.4.6 como antes obtenemos la contribución esperada.  $\square$

## 2.5. Pruebas de los resultados principales

*Demostración del Teorema 2.2.1:*

En el rango  $\beta \geq 12/13$  concluimos el teorema a partir del resultado principal de [HB2].

En el resto de los casos, escogemos  $H = R^{-2\kappa}$  en (2.8), lo que satisface  $RH > 1$ , y así del Teorema 2.3.1, deducimos bajo nuestra hipótesis sobre  $\gamma$ ,  $E_1(R, H) \ll R^{1+\kappa+\epsilon}$  (obsérvese que  $H^{-1/2} > R^{1/4}H^{-\gamma}$ ). A partir de aquí, por (2.8) probar el resultado se reduce a demostrar,

$$(2.21) \quad E_2(R, R^{-2\kappa}) \ll R^{1+\kappa+\epsilon}$$

para todo  $\epsilon > 0$  y  $\kappa = \kappa(\beta)$  en el rango  $\beta \in [1/2, 12/13]$ . A continuación, trataremos por separado los distintos rangos que aparecen en la definición de  $\kappa$ .

Si  $\beta \in [3/4, 12/13]$  la cota (2.21) es consecuencia del Teorema 2.4.4.

En la situación  $M > N^{2/3}$  el tercer término de la Proposición 2.4.3 es mayor que el segundo, usando en este caso la Proposición 2.4.1, obtenemos en todo el rango,

$$(2.22) \quad E_M \ll \left( K^{1/2-1/2r} M^{1/2r} + (M^{5r-3} N^2)^{1/(10r+6)} + K N^{2(\beta-1)/3} \right) (NM)^\epsilon$$

para cada intervalo diádico  $E_M$  de  $E(N, K)$  (definido en §2.4),  $K \ll N$ .

Utilizando esta cota si  $M < R^{(r+1)\rho}$ , donde  $\rho = (4r + 1 - (4r - 2)\beta)^{-1}$  y la Proposición 2.4.1 en caso contrario, concluimos,

$$E_2(R, R^{-2\kappa}) \ll (R^{\lambda_1} + R^{\lambda_2} + R^{\lambda_3})R^{1+\epsilon}$$

con  $\lambda_1 = \rho(r - (r - 1)\beta)$ ,  $\lambda_2 = \rho(5r^2 + 10r - 1 - (8r - 4)\beta)/(10r + 6)$  y  $\lambda_3 = \rho(1 - 2r + (10r - 2)\beta - (8r - 4)\beta^2)/3$ . Teniendo en cuenta el rango y la definición de  $\kappa$  especificados en (2.9), un cálculo prueba que  $\lambda_1 = \kappa$ ,

$$(2.23) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \Leftrightarrow \beta \leq \frac{5r^2 - 4r + 1}{10r^2 - 12r - 2} \Leftrightarrow \beta - \frac{1}{2} \leq \frac{r + 1}{5r^2 - 6r - 1},$$

y

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \lambda_1 \geq \lambda_3 &\Leftrightarrow (8r - 4)\beta^2 - (13r - 5)\beta + 5r - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \beta)(5r - 1 - (8r - 4)\beta) \geq 0. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumple para todo  $r$  si  $\beta \leq 5/8$ . En el caso  $\beta \in [5/8, 3/4]$  por la definición de  $r$  escogemos  $r = 3$  y a partir de (2.23) deducimos que  $\beta \leq 17/26$ , por tanto (2.24) evaluada en  $r = 3$  también se cumplirá, con lo que (2.9) queda probado.

Finalmente, para probar (2.10), utilizamos (2.22) si  $M > R^{10r\rho}$ , donde  $\rho = (25r - 3 - (10r + 6)\beta)^{-1}$  y la Proposición 2.4.1 en el resto de los casos y deducimos,

$$E_2(R, R^{-2\kappa}) \ll (R^{\lambda_1} + R^{\lambda_2} + R^{\lambda_3})R^{1+\epsilon}$$

con  $\lambda_1 = \rho(15r^2 - 6r + 1 - (10r^2 - 8r - 2)\beta)/2r$ ,  $\lambda_2 = \rho(5r - 1 - 2\beta)$  y  $\lambda_3 = \rho(-5r + 3 + 40r\beta - (20r + 12)\beta^2)/3$ . Considerando el rango y la definición de  $\kappa$  especificados en (2.10) concluimos con un cálculo,  $\lambda_2 = \kappa$ ,

$$\lambda_2 \geq \lambda_1 \Leftrightarrow \beta - \frac{1}{2} \leq \frac{r + 1}{5r^2 - 6r - 1},$$

y

$$\begin{aligned} \lambda_2 \geq \lambda_3 &\Leftrightarrow (20r + 12)\beta^2 - (40r + 6)\beta + 20r - 6 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \beta)(20r - 6 - (20r + 12)\beta) \geq 0. \end{aligned}$$

Como  $\beta \leq 3/4$  y  $r \geq 3$ , lo anterior se cumple siempre.  $\square$

#### *Demostración del Teorema 2.2.3:*

Si  $\gamma \geq 3/40$ , entonces  $\min(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 \in [11/13, 12/13]$  y (2.12) se deriva del Teorema 2.2.1 porque  $1/2 - 1/8\kappa(\beta) \geq 1/2 - 1/8\kappa(\gamma_1) = \gamma$ . La misma prueba funciona también

si  $1/20 \leq \gamma \leq 3/40$  usando  $\min(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_2 \in [3/4, 11/13]$  y  $1/2 - 1/8\kappa(\gamma_2) = \gamma$ , lo que implica (2.12).

En el resto de los casos observamos que sustituyendo el Teorema 2.3.1 y el Teorema 2.4.4 en (2.8) deducimos,

$$(2.25) \quad \frac{S(R) - 4\pi R^3/3}{R^{1+\epsilon}} \ll H^{-1/2} + R^{1/4}H^{-\gamma} + R^{52/201} + (RH)^{5/(18-13\beta)} \quad \text{si } \beta \geq \frac{11}{13}$$

y

$$(2.26) \quad \frac{S(R) - 4\pi R^3/3}{R^{1+\epsilon}} \ll H^{-1/2} + R^{1/4}H^{-\gamma} + R^{52/201} + (RH)^{(2-\beta)/(5-4\beta)} \quad \text{si } \beta \leq \frac{11}{13}.$$

El rango en (2.13) es no vacío si y sólo si  $\gamma \geq 3/40$ , eligiendo  $H = R^{(2+13\beta)/(-20+4\gamma(13\beta-18))}$  en (2.25) concluimos (2.13). Suponiendo aún  $\gamma \geq 3/40$  tenemos  $\gamma_2 \geq 11/13$  y (2.14) se sigue de escoger  $H = R^{-3/4((5-4\beta)\gamma+2-\beta)}$  en (2.26). La misma elección de  $H$  implica (2.14) en el caso que falta,  $\gamma < 3/40$ , obsérvese que aquí  $\gamma_2 < 11/13$ .  $\square$

*Demostración del Corolario 2.2.4:* Aplicamos los procesos de van der Corput ( $A$  y  $B$ , véanse (2.16) y (2.17)) en la forma  $BA^2$  al par de exponentes  $(32/205+\epsilon, 269/410+\epsilon)$ , probado en [Hu4]. El par resultante es  $(743/2024+\epsilon, 269/506+\epsilon)$  y evaluando  $\gamma$  con él en (2.11) obtenemos  $\gamma = 871/11068 + \epsilon$ . Sustituyendo este último valor en el Teorema 2.2.3 concluimos el corolario.  $\square$



# Capítulo 3

## Puntos visibles en la esfera

### 3.1. Introducción

Como vimos en la introducción general de esta memoria, además de acotaciones superiores para la discrepancia,  $O$ -resultados, en los problemas de puntos del retículo es interesante obtener  $\Omega$ -resultados. En este capítulo daremos un  $\Omega$ -resultado comparable al que se conoce en el problema de la esfera,  $\Omega_{\pm}(R(\log R)^{1/2})$  [Ts], para el término de error del problema de los puntos visibles en la esfera,  $E^*(R)$  (definido en (1.6)).

El resultado de K-M. Tsang está basado en los momentos de segundo y tercer orden del término de error. Sin embargo, en este capítulo probaremos el  $\Omega$ -resultado sin utilizar los momentos ya que el de segundo orden es desconocido. Subsanaaremos este hecho empleando una serie trigonométrica auxiliar que está correlacionada con  $E^*(R)$ . Hasta donde nosotros sabemos esta forma de probar  $\Omega$ -resultados es nueva y pensamos que quizá podría ser usada con éxito en otros problemas.

Comencemos con la presentación de algunos de los protagonistas del capítulo.

La serie trigonométrica auxiliar de la que hablábamos en el párrafo anterior es la siguiente función,

$$g(t) = \sum_{n \leq M^2} \frac{\cos(2\pi t \sqrt{n})}{\sqrt{n}},$$

donde  $M = R(\log R)^{-1/3}$ . En lugar del momento de segundo orden (desconocido) nos interesaremos por la integral,

$$I(R) := \int g(t) E^*(t) d\nu(t),$$

donde  $d\nu$  es la siguiente medida de probabilidad,

$$d\nu(x) = R^{-1} \psi(x/R) dx$$

con  $\psi \in C_0^\infty((1, 2))$  y  $\int \psi = 1$ .

Nuestro resultado principal es una fórmula asintótica para  $I(R)$ .

**Teorema 3.1.1** *Para  $R > 1$ ,*

$$(3.1) \quad I(R) = -\frac{14}{\pi^2}CR \log R + O(R(\log R)^{5/6}),$$

donde  $C = \int x\psi(x) dx$ .

El resultado anterior revela una correlación entre las funciones  $g(t)$  y  $E^*(t)$ . En particular controlando la norma 2 de  $g$  se deduce:

$$\int |E^*(t)|^2 d\nu(t) \gg \frac{R^2(\log R)^2}{\int |g(t)|^2 d\nu(t)} \gg R^2 \log R,$$

lo que lleva al  $\Omega$ -resultado.

**Corolario 3.1.2** *Para  $R > 1$ ,*

$$(3.2) \quad E^*(R) = \Omega(R(\log R)^{1/2}).$$

Como dijimos en los párrafos iniciales, este  $\Omega$ -resultado es comparable a lo que se conoce en el caso del problema de la esfera ([Sze] y [Ts]).

En la prueba, como siempre,  $r_3(n)$  denota el número de representaciones de  $n$  como suma de tres cuadrados y escribiremos,

$$a_n = \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} \widehat{\phi}(\sqrt{n}/M),$$

donde  $\phi \in C_0^\infty((-1, 1))$  es una función arbitraria positiva tal que  $\int \phi = 1$ . Por tanto,  $a_n$  es similar a una constante en media si  $n \leq M^2$  y es pequeña para  $n$  mucho mayor que  $M^2$ .

A lo largo del capítulo, las constantes implícitas en las igualdades donde aparece alguna  $O(\cdot)$  dependerán de la elección de  $\psi$  y  $\phi$ .



## 3.2. Lemas auxiliares

Sea  $E(R)$  el término de error en el problema de la esfera,

$$E(R) = \sum_{1 \leq n \leq R^2} r_3(n) - \frac{4\pi}{3} R^3.$$

La relación entre  $E(R)$  y  $E^*(R)$  es sencilla, viene dada por el siguiente lema.

**Lema 3.2.1** *Para  $R > t > 1$*

$$E^*(t) = \sum_{d \leq R} \mu(d) E(t/d) + o(t).$$

*Demostración:* Por la fórmula de inversión de Möbius el número de representaciones de  $n$  como suma de tres cuadrados coprimos es  $\sum_{d^2|n} \mu(d) r_3(n/d^2)$ , por tanto, el número de puntos visibles en la esfera es

$$\sum_{n \leq t^2} \sum_{d^2|n} \mu(d) r_3(n/d^2) = \sum_{d \leq t} \mu(d) \sum_{n \leq t^2/d^2} r_3(n).$$

La suma interior se puede sustituir por  $4\pi t^3 d^{-3}/3 + E(t)$ , así, considerando la definición de  $E^*(t)$ , se tiene,

$$E^*(t) = \sum_{d \leq t} \mu(d) E(t/d) + \sum_{d \leq t} \mu(d) \frac{4\pi t^3}{3d^3} - \frac{4\pi t^3}{3\zeta(3)}.$$

A continuación, con el fin de deducir más tarde el término de error, sumamos por partes en el segundo sumatorio utilizando que  $\sum_{n \leq t} \mu(n) = o(t)$ . Así,

$$\sum_{d \leq t} \frac{\mu(d)}{d^3} = o(t) + \sum_{d \leq t-1} \left( \frac{1}{d^3} - \frac{1}{(d+1)^3} \right) \sum_{k \leq d} \mu(k) = o(t) + \sum_{d \leq t-1} \frac{\mu(d)}{d^3}.$$

Aplicando ahora que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s = 1/\zeta(s)$ , el segundo sumando queda,

$$\frac{4\pi t^3}{3} \sum_{d < t} \frac{\mu(d)}{d^3} = \frac{4\pi t^3}{3\zeta(3)} - \frac{4\pi t^3}{3} \sum_{d=t}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^3} = \frac{4\pi t^3}{3\zeta(3)} + o(t).$$

Por tanto,

$$E^*(t) = \sum_{d \leq t} \mu(d) E(t/d) + o(t).$$

Por último, acabamos la prueba observando que  $E(u) = -(4\pi/3)u^3$  para  $0 < u < 1$ .  $\square$

OBSERVACIÓN: La fórmula del lema funciona en todas las dimensiones  $d$ . Para  $\alpha > 1$ ,  $E(x) = O(x^\alpha)$  da  $E^*(x) = O(x^\alpha)$ , ya que

$$E^*(t) = \sum_{d \leq t} \mu(d)E(t/d) + o(t) \ll \sum_{d \leq t} (t/d)^\alpha = O(t^\alpha).$$

En cambio, si  $\alpha < 1$ ,  $E(x) = O(x^\alpha)$  da,  $E^*(x) = O(x)$  (lo que también se comprueba con el lema).

Por tanto, de la observación anterior se deduce que los mejores resultados en las bolas se trasladan fácilmente al problema de los puntos visibles si  $d \geq 3$ . Sin embargo, para  $d = 2$ , con la conjetura de Hardy ( $\alpha = 1/2 + \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ) solamente se obtendría un resultado trivial.

Para  $d = 3$  la conjetura es  $\alpha = 1 + \epsilon$ , pero observamos que por ejemplo  $E(x) = O(x \log x)$  implica  $E^*(x) = O(x \log^2 x)$ , es decir, un logaritmo extra puede arruinar resultados en media para  $E^*(x)$  si no se tiene en cuenta la cancelación inducida por la función de Möbius. Por tanto, como no se controla bien la cancelación se hace necesario utilizar aproximaciones precisas de  $E(t)$  ya que un término de error como  $O((\log t)^{1/2})$  puede absorber el orden del  $\Omega$ -resultado en (3.2).

**Lema 3.2.2** Para  $R > 1/2$ ,

$$E(R) = -\frac{R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cos(2\pi R\sqrt{n}) + T(R) + U(R),$$

donde

$$T(R) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \operatorname{sen}(2\pi R\sqrt{n}) \quad y \quad U(R) \ll 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_3(k)\chi_k(R),$$

siendo  $\chi_k$  la función característica del intervalo  $[\sqrt{k} - 1/M, \sqrt{k} + 1/M]$ .

*Demostración:* Por el Lema 2.1 de [Ch-Iw], pero ahora con  $f$  siendo la convolución de la identidad restringida a  $[-R, R]$  y  $M\phi(Mx)$  (la regularización no es la misma que

en la esfera por la necesidad expresada en el párrafo anterior al enunciado del lema de ser más precisos) se tiene,

$$(3.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n) \frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \frac{4\pi}{3} R^3 - \frac{R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \cos(2\pi R\sqrt{n}) + T(R) + O(1).$$

El término principal puede ser calculado directamente o derivando la transformada de Fourier,  $\widehat{f}$ , en el cero y utilizando que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de Fourier de cada una de las funciones. A continuación mostramos el cálculo, partimos de,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbb{I}_{[-R,R]} * M\phi(Mx))(r) e(-r\xi) dr = \widehat{\mathbb{I}}_{[-R,R]}(\xi) \widehat{\phi}(\xi/M),$$

donde  $\mathbb{I}_{[-R,R]}$  denota la identidad restringida a  $[-R, R]$ . Derivando en ambos lados de la igualdad anterior,

$$-2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} r (\mathbb{I}_{[-R,R]} * M\phi(Mx))(r) dr = \widehat{\mathbb{I}}'_{[-R,R]}(0) \widehat{\phi}(0) + \widehat{\mathbb{I}}_{[-R,R]}(0) \widehat{\phi}'(0).$$

El lado izquierdo de la última igualdad dividido por  $-i$  es el término principal que estamos buscando,  $4\pi \int_0^{\infty} r f(r) dr$  (como  $f$  es par se tiene que  $\int_0^{\infty} = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty}$ ). Por tanto, para hallar dicho término principal basta calcular los miembros del lado derecho,  $\widehat{\mathbb{I}}_{[-R,R]}(0) = 0$ ,  $\widehat{\mathbb{I}}'_{[-R,R]}(0) = -4\pi i R^3/3$ ,  $\widehat{\phi}(0) = 1$  y  $\widehat{\phi}'(0) = 0$ , operarlos y dividir el resultado por  $-i$ .

El término  $f'(0)$  se halla derivando la convolución, en este caso es uno. Por otro lado, la transformada seno de Fourier,  $\widetilde{f}$ , del Lema 2.1 de [Ch-Iw] se calcula a partir de su definición y es

$$\widetilde{f}(\sqrt{n}) = i \widehat{\mathbb{I}}_{[-R,R]}(\sqrt{n}) \widehat{\phi}\left(\frac{\sqrt{n}}{M}\right) = \left( \frac{-R \cos(2\pi R\sqrt{n})}{\pi \sqrt{n}} + \frac{\text{sen}(2\pi R\sqrt{n})}{2\pi^2 n} \right) \widehat{\phi}\left(\frac{\sqrt{n}}{M}\right).$$

Vayamos con  $U(R)$ , veamos de dónde viene. El lado izquierdo de (3.3) es igual a  $\sum_{n \leq R^2} r_3(n)$  si  $|R - \sqrt{N}| > M^{-1}$ , siendo  $N$  el entero más cercano a  $R^2$ . En cambio, si la condición anterior no se da, se debe añadir la contribución de los términos  $r_3(n) f(\sqrt{n})/\sqrt{n}$  de la suma, en los cuales,  $f(\sqrt{x})/\sqrt{x}$  y la función característica de  $(0, R]$  son diferentes, obsérvese que esto sólo ocurre en el intervalo  $[R - M^{-1}, R + M^{-1}]$ . Estos términos donde  $f$  es distinta de la identidad son los que dan la cota para  $U(R)$ .  $\square$

**Lema 3.2.3** *Tenemos,*

$$\sum_{n \leq N} r_3^2(n) \sim C_1 N^2,$$

con  $C_1$  una constante positiva. De hecho,  $C_1 = 8\pi^4/(21\zeta(3))$ .

*Demostración:* La afirmación del enunciado del lema se puede probar usando las propiedades de la convolución de Rankin-Selberg o a partir de la aplicación del método del círculo para estudiar las asintóticas de  $\int |\theta(z)|^6 dz$ , [Bl-Dy], [Ch-Ku-Os] (véase también [Mü] para un teorema general).  $\square$

**Lema 3.2.4** *Se tiene que*

$$\sum_{n \leq N} \mu^2(n) r_3(n) = \frac{28}{3\pi} N^{3/2} + O(N^{5/4} (\log N)^2).$$

OBSERVACIÓN: La fórmula del lema se ha demostrado sin intentar reducir el término de error al mínimo. Es posible que se puedan emplear las técnicas de [Go-Ho] para disminuir el exponente a  $1 + \epsilon$ .

*Demostración:* La relación entre  $r_3(n)$  y el número de clases (véanse (2.3) y (2.2) del capítulo 2), implica que

$$\frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} \ll \sum_{d^2|n} d^{-1} L(1, \chi_{n/d^2}) \quad \text{con} \quad \chi_k(\cdot) = \left(\frac{-4k}{\cdot}\right),$$

y esta desigualdad, junto con  $L(1, \chi_m) \ll \log m$ , lleva a

$$(3.4) \quad r_3(n) = O(\sqrt{n} (\log n)^2).$$

Por otro lado, de la identidad elemental  $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$  se sigue,

$$\sum_{n \leq N} \mu^2(n) r_3(n) = \sum_{d < N^{1/4}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} r_3(n) + \sum_{N^{1/4} < d < N^{1/2}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} r_3(n).$$

Tratamos el segundo sumando utilizando la acotación (3.4),

$$\sum_{N^{1/4} < d < N^{1/2}} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} \sqrt{n} (\log n)^2 \ll \sqrt{N} \log^2 N \sum_{\substack{N^{1/4} < d < N^{1/2} \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}, n \leq N}} 1,$$

por la segunda condición de sumación, digamos  $n = kd^2 < N$ ,

$$\sum_{N^{1/4} < d < N^{1/2}} \sum_{1 \leq k \leq N/d^2} 1 \ll \sum_{N^{1/4} < d < N^{1/2}} \frac{N}{d^2} \ll N^{3/4}.$$

Uniendo todo llegamos a,

$$(3.5) \quad \sum_{n \leq N} \mu^2(n) r_3(n) = \sum_{d < N^{1/4}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} r_3(n) + O(N^{5/4}(\log N)^2).$$

Vayamos con el primer sumando, el cual, nos dará el término principal. La suma interior de este primer sumando se puede escribir así,

$$\sum_{\substack{1 \leq r_1, r_2, r_3 \leq d^2 \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \equiv 0 \pmod{d^2}}} \sum_{\substack{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq N \\ a_j \equiv r_j \pmod{d^2}}} 1.$$

Podemos contar los términos que sumamos en el segundo sumatorio haciendo el cambio de variable,  $x_i = (a_i - r_i)/d^2$  para  $i = 1, 2, 3$ , así el número de términos es igual al volumen de una esfera de radio  $\sqrt{N}/d^2$  más el error trivial de la esfera,  $O(R^2)$ ,

$$\#\{(a_1, a_2, a_3)\} = \#\{(x_1, x_2, x_3)\} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{N}}{d^2}\right)^3 + O\left(\frac{N}{d^4}\right).$$

Y tenemos,

$$\sum_{\substack{1 \leq r_1, r_2, r_3 \leq d^2 \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \equiv 0 \pmod{d^2}}} \sum_{\substack{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq N \\ a_j \equiv r_j \pmod{d^2}}} 1 = w(d^2) \left(\frac{4\pi}{3} N^{3/2} d^{-6} + O(Nd^{-4})\right),$$

donde  $w(d^2)$  es el número de soluciones de la ecuación  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 0$  en  $\mathbb{Z}/d^2\mathbb{Z}$ ; es una función multiplicativa y se tiene  $w(2^2) = 2^3$  y  $w(p^2) = p^4$  si  $p$  es un primo impar.

Por tanto, finalmente a partir de (3.5),

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \mu^2(n) r_3(n) &= \frac{4\pi}{3} N^{3/2} \sum_{d < N^{1/4}} \frac{\mu(d) w(d^2)}{d^6} + O(N^{5/4}(\log N)^2) \\ &= \frac{4\pi}{3} N^{3/2} \prod_p \left(1 - \frac{w(p^2)}{p^6}\right) + O(N^{5/4}(\log N)^2) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el producto infinito es igual a  $(1 - 2^{-2})^{-1}(1 - 2^{-3})/\zeta(2) = 7/\pi^2$  la demostración queda terminada.  $\square$

**Lema 3.2.5** *Para  $g$  definida como en la introducción de este capítulo,*

$$\int \left| \sum_{n \leq M^2} \frac{e(t\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right|^2 d\nu(t) \sim 2 \log R \quad y \quad \int |g(t)|^2 d\nu(t) \sim \log R.$$

*Demostración:* Empezamos probando la primera expresión. Desarrollando el cuadrado y haciendo el cambio de variable  $y = t/R$ , tenemos,

$$\sum_{n_1 \leq M^2} \sum_{n_2 \leq M^2} \frac{1}{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}} \int_1^2 e(yR(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1})) \psi(y) dy.$$

Para  $n_1 = n_2$ , el término diagonal, teniendo en cuenta las propiedades de  $\psi$  y el valor de  $M$  deducimos,

$$\sum_{n \leq M^2} \frac{1}{n} \int_1^2 \psi(y) dy \sim 2 \log R.$$

Por tanto, esta primera expresión quedará probada si comprobamos que la contribución de los términos no diagonales es más pequeña que la de los diagonales.

De hecho, para  $n_1 \neq n_2$  tenemos,

$$(3.6) \quad \sum_{\substack{n_1, n_2 \leq M^2 \\ n_1 \neq n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}} \widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})).$$

Según en qué parte del rango de sumación nos encontremos, la transformada de Fourier de  $\psi$  se comportará de una manera u otra, hecho que condiciona el desarrollo de la suma.

En el rango  $|R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})| \gg 1$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $n_1 > n_2$  y utilizando que,  $\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2} = (n_1 - n_2) / (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})$ , se tiene,  $n_1 - n_2 \gg \sqrt{n_1}/R$ . Además, en este rango, la transformada decae bien,  $\widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})) \ll |R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})|^{-1}$ . Uniendo todo esto se deduce que

$$\sum_{\substack{n_1, n_2 \leq M^2 \\ n_1 \neq n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_1} \sqrt{n_2}} \widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})) \ll \frac{1}{R} \sum_{n_1 \leq M^2} \sum_{n_2 < n_1} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \frac{1}{n_1 - n_2}.$$

Intercambiando el orden de sumación se tiene,

$$\frac{1}{R} \sum_{n_2 \leq M^2} \frac{1}{\sqrt{n_2}} \sum_{n_2 < n_1 \leq M^2} \frac{1}{n_1 - n_2} \ll \frac{M}{R} \log M.$$

Por tanto, queda claro que la contribución de este rango a (3.6) es  $o(\log R)$ .

En el rango  $|R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})| \ll 1$ ,  $\sqrt{n_1}$  y  $\sqrt{n_2}$  son comparables, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $n_2 > n_1$  de lo que se sigue que  $n_2 - n_1 \ll \sqrt{n_2}/R$  y por

tanto,  $n_2 - B\sqrt{n_2}/R \leq n_1 < n_2$ , donde  $B$  es una constante. A partir de aquí, utilizando la acotación  $\widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})) \ll 1$ , tenemos,

$$\sum_{\substack{n_1, n_2 \leq M^2 \\ n_1 \neq n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}} \widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})) \ll \sum_{n_2 \leq M^2} \sum_{n_2 - B\sqrt{n_2}/R \leq n_1 < n_2} \frac{1}{\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}}$$

ya es fácil ver que la contribución de este rango a (3.6) también es  $o(\log R)$ .

Vayamos con la segunda expresión, comencemos escribiéndola en función de exponenciales (utilizaremos  $\cos(2\pi t\sqrt{n}) = (e(t\sqrt{n}) + e(-t\sqrt{n}))/2$ ), desarrollando el cuadrado y haciendo el cambio de variable  $y = t/R$  la expresión queda,

$$\begin{aligned} \sum_{n_1 \leq M^2} \sum_{n_2 \leq M^2} \frac{1}{4\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}} & \left( \int_1^2 e(yR(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1})) + e(yR(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2})) \psi(y) dy \right. \\ & \left. + \int_1^2 e(yR(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})) + e(-yR(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})) \psi(y) dy \right). \end{aligned}$$

Utilizando que la suma en los dos primeros sumandos es igual que antes y la definición de transformada de Fourier se sigue que la expresión anterior es

$$\log R + o(\log R) + o(\log R) \sum_{\substack{n_1 \leq M^2 \\ n_2 \leq M^2}} \frac{1}{4\sqrt{n_1}\sqrt{n_2}} \left( \widehat{\psi}(-R(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})) + \widehat{\psi}(R(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})) \right).$$

Finalmente, apelando de nuevo al decaimiento de  $\widehat{\psi}$  no es difícil comprobar que la contribución de la suma anterior es  $o(\log R)$ .  $\square$

### 3.3. Prueba del resultado

Escribamos,

$$I(R) = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) + O(R),$$

donde  $I_1(R)$ ,  $I_2(R)$  e  $I_3(R)$  dan la contribución a  $I(R)$  de cada suma del Lema 3.2.2 después de sustituir en el Lema 3.2.1. Por ejemplo,

$$(3.7) \quad I_2(R) = \sum_{d < 2R} \mu(d) \int g(t) T(t/d) d\nu(t).$$

Con estas definiciones, (3.1) es una consecuencia de los siguientes resultados.

**Proposición 3.3.1** Para  $R > 2$ ,

$$I_1(R) = -\frac{14}{\pi^2}CR \log R + O(R(\log R)^{5/6}).$$

**Proposición 3.3.2** Si  $R > 2$ ,

$$I_2(R) = O((\log R)^4).$$

**Proposición 3.3.3** Para  $R > 2$ ,

$$I_3(R) = O(R(\log R)^{5/6}).$$

La clave del argumento está en la demostración de la Proposition 3.3.1. Para probarla utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 3.3.4** Dados  $N$ ,  $D$  y  $L$  números reales positivos tales que  $1 \leq D \leq 2\sqrt{N}$  y  $\sqrt{N}/DL < 1$ , definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$C_n = \{D \leq d < 2D : 0 \neq |||n/d^2||| < \sqrt{N}/DL\}$$

donde  $||| \cdot |||$  denota la distancia al entero más cercano. Consideramos también la suma

$$S(N, D, L) = \sum_{N \leq n < 2N} a_n |C_n|.$$

Entonces,

$$(3.8) \quad S(N, D, L) \ll (\log N)^2 \mathcal{A}$$

$$(3.9) \quad S(N, D, L) \ll N^{1/2} \mathcal{A}^{1/2} \quad \text{si } D^4 < N < L^2$$

$$(3.10) \quad S(N, D, L) \ll \mathcal{A} \quad \text{si } DN^{13/32} > L,$$

con  $\mathcal{A} = N^{3/2}L^{-1} \min(1, M^{40}N^{-20})$ .

*Demostración:* Usando la definición de  $a_n$  junto con que  $r_3(n) = O(\sqrt{n} (\log n)^2)$  (véase (3.4)) y con que  $\hat{\phi}(x) \ll (1 + |x|^{40})^{-1}$  se sigue,

$$a_n \ll (\log N)^2 \min(1, M^{40}N^{-20}).$$



Dados  $m$  y  $d$ , como mucho hay  $2d^2\sqrt{N}/DL$  valores de  $n$  que satisfagan  $0 \neq |n/d^2 - m| < \sqrt{N}/DL$  (se deduce despejando  $n$  de la desigualdad), por tanto podemos escribir,

$$\sum_{N \leq n < 2N} |C_n| \ll \sum_{m > N/D^2} \sum_{d > D} \frac{d^2 \sqrt{N}}{DL} \ll N^{3/2} L^{-1}.$$

Combinando esta acotación con la anterior de  $a_n$  obtenemos (3.8),

$$S(N, D, L) \ll \sup_{N \leq n \leq 2N} a_n \sum_{N \leq n < 2N} |C_n| \ll (\log N)^2 \mathcal{A}.$$

Probamos ahora (3.9), por tanto que en lo que sigue estamos bajo las hipótesis de este caso.

Si  $0 \neq |||n/d^2||| < \sqrt{N}/DL$  entonces existe un  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $|h| < d^2\sqrt{N}/DL$  y  $d^2|n - h|$ . La existencia del  $h$  se puede ver definiéndolo como  $h = n - md^2$ , así es menor que  $\sqrt{N}/DL$  y  $(n - h)/d^2 = m$ . A partir de aquí, por el Lema 3.2.3, después de aplicar la desigualdad de Cauchy, deducimos,

$$(3.11) \quad S^2(N, D, L) \ll N \min(1, M^{80} N^{-40}) \sum_{N \leq n < 2N} \left( \sum_{0 < |h| \ll D\sqrt{N}/L} \sum_{\substack{D \leq d < 2D \\ d^2 | n - h}} 1 \right)^2.$$

La suma de la última expresión se puede escribir de la siguiente manera,

$$\sum_{\substack{D \leq d_1 < 2D \\ D \leq d_2 < 2D}} \sum_{\substack{0 < |h_1| \ll D\sqrt{N}/L \\ 0 < |h_2| \ll D\sqrt{N}/L}} |\{N \leq n < 2N : n \equiv h_1 \pmod{d_1^2}, n \equiv h_2 \pmod{d_2^2}\}|.$$

Cuantificaremos esta suma separando los términos “diagonales”,  $h_1 = h_2 = h$ , de los que no lo son y sumando la contribución de ambos tipos de términos.

Comencemos con los términos “diagonales”, su aportación viene dada por

$$\sum_{0 < |h| \ll D\sqrt{N}/L} \sum_{D \leq d_1, d_2 < 2D} \frac{N}{[d_1, d_2]^2} \ll \frac{N^{3/2}}{LD^3} \sum_{D \leq d_1, d_2 < 2D} (d_1, d_2)^2 \ll N^{3/2} L^{-1}$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  y  $(\cdot, \cdot)$  denotan el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor respectivamente (obsérvese que  $[d_1, d_2]^2 < N$  porque  $D^4 < N$ ).

Por el Teorema Chino del Resto,  $n \equiv h_1 \pmod{d_1^2}$ ,  $n \equiv h_2 \pmod{d_2^2}$  tiene una única solución  $\pmod{[d_1, d_2]^2}$  cuando  $(d_1, d_2)^2 | h_1 - h_2$ . Por tanto la contribución de los términos no diagonales a la suma es

$$\sum_{D \leq d_1, d_2 < 2D} \left( \frac{D\sqrt{N}}{L} \right)^2 (d_1, d_2)^{-2} \frac{N}{[d_1, d_2]^2} \ll N^2 L^{-2} \leq N^{3/2} L^{-1}$$

siempre que  $N < L^2$ . Sustituyendo estos cálculos en (3.11) se sigue,

$$S(N, D, L) \ll N^{5/4} L^{-1/2} \min(1, M^{40} N^{-20}) \ll N^{1/2} \mathcal{A}^{1/2},$$

y (3.9) queda probado.

Para probar (3.10) empezamos como en la prueba de (3.8), observando que estando fijados  $m$  y  $d$  hay como mucho  $2d^2\sqrt{N}/DL$  valores de  $n$  tales que  $|n - md^2| < d^2\sqrt{N}/DL$ ; entonces se tiene,

$$S(N, D, L) \ll \sum_{m \asymp N/D^2} \sum_{d \asymp D} \sum_{n \in I_{m,d}} a_n,$$

donde  $I_{m,d}$  es un intervalo contenido en  $\{x : |x - md^2| \leq 4D\sqrt{N}/L\}$ . Aplicando (1.4) del Teorema 1.1 de [Ch-Iw] con  $R^2 = md^2$ ,  $R \ll N$ ,  $RH \asymp D\sqrt{N}/L$  y  $R^2H \asymp DN/L$  se deduce (obsérvese que  $S(R, H) \ll R^2H$  es trivial para  $1 \leq H \ll R$ ),

$$\frac{\sum_{n \in I_{m,d}} a_n}{\min(1, M^{40} N^{-20})} \ll D\sqrt{N}/L + (D/L)^{7/8} N^{7/16} + (D\sqrt{N}/L)^{2/3} N^{1/32} + 1 \ll D\sqrt{N}/L,$$

lo que lleva, bajo las hipótesis de (3.10), a

$$S(N, D, L) \ll \min(1, M^{40} N^{-20}) \sum_{m \asymp N/D^2} \sum_{d \asymp D} D\sqrt{N}/L \ll \mathcal{A}$$

y concluye la prueba.  $\square$

*Demostración de la Proposición 3.3.1:* Recordando la definición de  $I_1(R)$  tenemos,

$$I_1(R) = -\frac{1}{\pi} \sum_{d < 2R} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{m \leq M^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{nm}} I(n, m, d),$$

donde

$$\begin{aligned} I(n, m, d) &= \int t \cos(2\pi t \sqrt{m}) \cos(2\pi \frac{t}{d} \sqrt{n}) d\nu(t) \\ &= R\hat{\eta}(R(\sqrt{m} - \frac{\sqrt{n}}{d})) + O(R^{-2}), \end{aligned}$$

siendo  $\eta$  la extensión par de  $x\psi(x)/4$ . Deberemos distinguir dos situaciones, cuando  $n = d^2m$  (caso diagonal) y cuando  $n \neq d^2m$  (caso no diagonal).

*Caso diagonal:* Por la fórmula para  $I(n, m, d)$  se tiene,

$$I(n, m, d) = \frac{1}{2}CR + O(R^{-2}).$$

Por tanto, su contribución a  $I_1(R)$  es

$$\begin{aligned} -\frac{CR}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d^2|n \\ \sqrt{n}/M < d < 2R}} \mu(d) \frac{a_n}{n} + O(1) &= -\frac{CR}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\mu^2(n) + O(\frac{n}{R^2} + \frac{\sqrt{n}}{M})) \\ &= -\frac{14}{\pi^2} CR \log M + O(R), \end{aligned}$$

para hallarla hemos utilizado que  $\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n)$ , el Lema 3.2.4 y el comportamiento de  $\widehat{\phi}$ .

*Caso no diagonal:* Comenzamos tratando los términos que verifican  $0 \neq |\sqrt{m} - d^{-1}\sqrt{n}| < (4R)^{-1}$ , obsérvese que esta situación implica que  $0 \neq |m - n/d^2| < \sqrt{n}/dR$  y  $d < 2\sqrt{n}$ .

Usando la estimación trivial  $I(n, m, d) \ll R$ , la contribución de estos términos a  $I_1(R)$  está controlada por

$$R \sum_{d < 2R} \frac{1}{d} \sum_{0 \neq |m - n/d^2| < \frac{\sqrt{n}}{dR}} \frac{a_n}{\sqrt{nm}} \ll R \sum_{d < 2R} \sum_{0 \neq |m - n/d^2| < \frac{\sqrt{n}}{dR}} \frac{a_n}{n}.$$

En el rango  $n \geq d^2 R^2$  la suma interior está acotada por  $\sum_{n \geq d^2 R^2} a_n / (dR\sqrt{n})$  y su aportación es menor que  $O(R)$ . Por tanto, los términos tales que  $0 \neq |\sqrt{m} - d^{-1}\sqrt{n}| < (4R)^{-1}$  contribuyen,

$$R \sum_{d < 2R} \sum_{0 < ||| \frac{n}{d^2} ||| < \frac{\sqrt{n}}{dR} < 1} \frac{a_n}{n} + O(R).$$

Del mismo modo se pueden considerar los términos tales que  $\lambda/8R \leq |\sqrt{m} - d^{-1}\sqrt{n}| < \lambda/4R$ ,  $\lambda \geq 1$ , y por el decaimiento de  $\widehat{\eta}$  (representado más abajo como  $\lambda^{-50}$ ) podemos suponer que  $\lambda$  es menor que una potencia de  $R$ , digamos  $\lambda < R$ , esto implica de nuevo  $d < 2\sqrt{n}$ . Así, la contribución total de la parte no diagonal está controlada por

$$R \sum_{\lambda=2^i < R} \lambda^{-50} \sum_{d < 2R} \sum_{0 < ||| \frac{n}{d^2} ||| < \frac{\lambda\sqrt{n}}{dR} < 1} \frac{a_n}{n} + O(R),$$

donde para omitir los términos con  $\lambda\sqrt{n}/(dR) \geq 1$  se usa el decaimiento de  $a_n$  si  $\lambda < (\log R)^{1/4}$  y en caso contrario el factor  $\lambda^{-50}$ .

Después de todas estas reducciones, utilizando la notación del Lema 3.3.4, la contribución de la parte no diagonal queda acotada por

$$R \sum_{\lambda=2^i < R} \lambda^{-50} \sum_{N=2^j} N^{-1} \sum_{\lambda R^{-1}\sqrt{N} < D=2^k < 2\sqrt{N}} S(N, D, R\lambda^{-1}) + O(R).$$

Empleando (3.8) podemos ver que la suma sobre  $N \geq (R\lambda^{-1})^2$  queda absorbida por  $O(R)$ . A continuación, usaremos la siguiente desigualdad,

$$S(N, D, R\lambda^{-1}) \ll \lambda N^{5/4} R^{-1/2} \min(1, M^{20} N^{-10}),$$

ésta se sigue del Lema 3.3.4 usando (3.8) si  $N < (R\lambda^{-1})^{8/5}$ ; (3.9) cuando  $(R\lambda^{-1})^{8/5} \leq N \leq (R\lambda^{-1})^2$  y  $D < (R\lambda^{-1})^{2/5}$  (así se garantiza  $D^4 < N$ ); y (3.10) si  $(R\lambda^{-1})^{8/5} \leq N \leq (R\lambda^{-1})^2$  y  $D \geq (R\lambda^{-1})^{2/5}$ .

Por tanto, a partir de la desigualdad, se deduce que la contribución de los términos no diagonales es

$$\sum_{\lambda=2^i < R} \lambda^{-49} \sum_{N=2^j} \sum_{D=2^k < 2\sqrt{N}} N^{1/4} R^{1/2} \min(1, M^{20} N^{-10}) \ll R(\log R)^{5/6},$$

y la prueba queda completa.  $\square$

*Demostración de la Proposición 3.3.2:* Partimos de (3.7), los términos diagonales contribuyen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} \sum_{d < 2R, d^2 | n} \mu(d)d \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \ll \log M.$$

Los términos restantes, usando cotas triviales, dan

$$\frac{1}{R} \sum_{d < 2R} \sum_{n \neq md^2} \frac{a_n}{n\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{|\sqrt{m} - \sqrt{n}/d|}$$

y esto está acotado por  $O((\log R)^4)$ .  $\square$

*Demostración de la Proposición 3.3.3:* Partimos de la definición y la acotación de  $U(R)$  dadas en el Lema 3.2.2, las sustituimos en el Lema 3.2.1, y después introducimos la acotación resultante de  $E^*(t)$  en la definición de  $I(R)$ , así,

$$I_3(R) \ll R \int |g(t)| d\nu(t) + \sum_{d < 2R} \int |g(t)| \sum_{k=1}^{\infty} r_3(k) \chi_k(t/d) d\nu(t).$$

Comenzamos acotando la contribución del primer sumando, para ello aplicamos la desigualdad de Cauchy y el Lema 3.2.5, así se sigue,

$$R \int |g(t)| d\nu(t) \leq R \left( \int |g(t)|^2 d\nu(t) \right)^{1/2} \left( \int d\nu(t) \right)^{1/2} \ll R(\log R)^{1/2}.$$

Por tanto,

$$I_3(R) \ll R(\log R)^{1/2} + \sum_{d < 2R} \int |g(t)| \sum_{k=1}^{\infty} r_3(k) \chi_k(t/d) \, d\nu(t).$$

Aplicando de nuevo la desigualdad de Cauchy y el Lema 3.2.5 deducimos que

$$I_3(R) \ll R(\log R)^{1/2} + (\log R)^{1/2} \sum_{d < 2R} \left( \int \left| \sum_{k=1}^{\infty} r_3(k) \chi_k(t/d) \right|^2 \, d\nu(t) \right)^{1/2}.$$

Desarrollando el cuadrado y haciendo un cambio de variable la integral queda acotada por

$$\frac{d}{R} \sum_{j,k} r_3(j) r_3(k) \int_{R/d}^{2R/d} \chi_j(t) \chi_k(t) \, dt.$$

Obsérvese ahora que como  $\chi_k$  es la función característica de  $[\sqrt{k} - 1/M, \sqrt{k} + 1/M]$  se tiene que  $\chi_j(t) \chi_k(t) = 0$  si  $|\sqrt{j} - \sqrt{k}| > 2/M$ ; por consiguiente la última expresión está acotada superiormente por

$$\frac{d}{RM} \sum_{\substack{j,k \asymp R^2/d^2 \\ |\sqrt{j} - \sqrt{k}| \leq 2/M}} r_3(j) r_3(k) \ll \frac{d}{RM} \sum_{\substack{j,k \asymp R^2/d^2 \\ |j-k| \ll R/dM}} r_3(j) r_3(k),$$

donde hemos utilizado que  $|\sqrt{j} - \sqrt{k}| = |j - k| / (\sqrt{j} + \sqrt{k})$ .

A partir de la desigualdad elemental,  $\sum_{l \leq L} \sum_n a_n a_{n+l} \leq 4L \|\mathbf{a}\|^2$ , tenemos,

$$I_3(R) \ll R(\log R)^{1/2} + (\log R)^{1/2} \sum_{d < 2R} \left( \frac{d}{RM} \left( \frac{R}{Md} + 1 \right) \sum_{k \asymp R^2/d^2} r_3^2(k) \right)^{1/2},$$

y por el Lema 3.2.3 concluimos que  $I_3(R) \ll R(\log R)^{5/6}$ .  $\square$



# Capítulo 4

## Puntos del retículo en elipsoides racionales

### 4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es estudiar el número de puntos del retículo en elipsoides racionales. Como siempre en este tipo de problemas, sabemos que este número será más o menos como el volumen. El desafío consiste en acotar lo mejor posible ese “más o menos”, es decir, el término de error

$$E(R) = \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 : \vec{n}/R \in \mathcal{B}\} - \text{Vol}(\mathcal{B})R^3,$$

donde  $\mathcal{B}$  es un elipsoide racional en  $\mathbb{R}^3$  que contiene al origen. Buscamos el mejor de los exponentes posibles para  $E(R)$ ,

$$\theta_3 = \inf\{\alpha : E(R) = O(R^\alpha)\}.$$

Al igual que en el problema de la esfera se conjetura que  $\theta_3 = 1$  y se sabe, como dijimos en la introducción general, que  $\theta_3 \geq 1$  (incluso se conoce algo más fino [No3]). Respecto a la cota superior, en [Ch] se prueba que  $\theta_3 \leq 4/3$ , cota mejor que la de los cuerpos convexos generales [Mü2] y peor que la de la esfera [HB2].

Comenzaremos nuestra aproximación al problema escribiendo el número de puntos del retículo en un elipsoide racional como una suma que después regularizaremos con el fin de obtener un término principal y un término de error que quedará expresado en función de sumas trigonométricas.

Por otro lado, debido a la regularización, al igual que en la esfera, perdemos un poco. La suma inicial se alarga y nos encontramos contando puntos en un elipsoide más grande que el original. Sin embargo, esta pérdida no causa ningún contratiempo, los puntos del retículo entre el nuevo elipsoide y el inicial son sumas cortas de coeficientes

de formas modulares. Estos coeficientes se descomponen en una parte cuspidal y en otra no cuspidal (una combinación lineal de series de Eisenstein). En dimensiones mayores que tres la parte no cuspidal codifica la información local y es la que más contribuye. Sin embargo, W. Duke y R. Schulze-Pillot han mostrado en varios trabajos que lo que ocurre en dimensión tres es diferente y más complicado (véanse [Blo], [Du-Sc] y [Han]).

En nuestra aproximación, una vez llegados a las sumas cortas de coeficientes de formas modulares, emplearemos la fórmula de masa de Siegel [Sie] para expresar la contribución de la parte no cuspidal como una suma de un producto de factores locales, la cual seremos capaces de expresar como una suma corta de funciones  $L$ . Conseguiremos acotar este tipo de sumas adaptando el método de [HB2]. Por otro lado, los coeficientes cuspidales no se pueden controlar individualmente, pero, usando la estructura de la correspondencia de Shimura, la cota de W. Duke y H. Iwaniec para peso semientero (véanse [Du] e [Iw]) y la conjetura de Ramanujan-Petersson para peso 2 (dada por Eichler y Shimura) se consigue probar que la contribución cuspidal gana una potencia pequeña con respecto al error de la parte no cuspidal (este ahorro no se consigue con cualquier cota no trivial).

Relacionamos a continuación, la forma de proceder en la esfera para acotar el término de error con el razonamiento que se utiliza en los elipsoides racionales. En la esfera (véase el capítulo 2, [Ch-Iw] o [HB2]) es fundamental descomponer el término de error utilizando caracteres aditivos (sumas trigonométricas) y multiplicativos (sumas de caracteres). En el caso de los elipsoides racionales en la descomposición del término de error aparece una parte modular (sumas cortas de coeficientes de formas modulares). Además creemos que, como hemos dicho en la introducción general, es la primera vez que las formas modulares intervienen en uno de los problemas clásicos de puntos del retículo.

Probaremos que en el término de error del problema de los elipsoides dominarán la parte aditiva y la multiplicativa, con lo que se logra conseguir en los elipsoides racionales la misma estimación del error que en la esfera [HB2]:

**Teorema 4.1.1** *Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : Q(\vec{x}) \leq 1\}$  donde  $Q$  es una forma cuadrática definida positiva con coeficientes racionales, entonces,  $\theta_3 \leq 21/16$ .*

## 4.2. Descomposición del término de error

De ahora en adelante, gracias a que  $\theta_3$  es invariante por dilataciones de  $\mathcal{B}$ , podemos suponer que la forma cuadrática  $Q$  tiene coeficientes enteros. Así partimos de una matriz  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$  con números pares en la diagonal tal que

$$Q(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^t A \vec{x}.$$



Denotaremos con  $D$  al determinante de  $A$ . Cambiando  $A$  por  $2A$  podremos suponer que  $DA^{-1}$  tiene de nuevo números pares en la diagonal y que  $4|D$ . Por tanto, la forma dual  $Q^*(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^t DA^{-1}\vec{x}$  será también una forma cuadrática entera.

El número de representaciones de  $n$  a partir de  $Q$ ,  $r_Q(n)$ , aparece en la función theta,  $\theta_Q(z) = \sum r_Q(n)e(nz)$ , la cual, es una forma modular en  $\mathfrak{M}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$  (véanse [Sh] p. 456 e [Iw2] Prop.10.6). No es una forma cuspidal, de hecho, su proyección sobre el espacio lineal generado por las series de Eisenstein es la función theta asociada al género,  $\theta_{\text{gen}}(z) = \sum r(n, \text{gen } Q)e(nz)$  y sus coeficientes,  $r(n, \text{gen } Q)$  (el número de soluciones enteras para todas las formas cuadráticas pertenecientes al mismo género que  $Q$ ) están dados por la fórmula de masa de Siegel [Sie],

$$r(n, \text{gen } Q) = \frac{4\pi\sqrt{2n}}{\sqrt{D}}L(n) \quad \text{con} \quad L(n) = \prod_p \delta_p(n),$$

donde  $\delta_p(n)$  son las densidades  $p$ -ádicas de las soluciones de  $Q(\vec{x}) = n$ .

Además, para  $\alpha$  suficientemente grande se tiene,

$$\delta_p(n) = p^{-2\alpha} N_{p^\alpha}(n)$$

siendo  $N_q(n)$  el número de soluciones de  $Q(\vec{x}) = n$  en  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^3$ .

Escribiremos,

$$a_n = r_Q(n) - r(n, \text{gen } Q).$$

Es el  $n$ -ésimo coeficiente de una forma en  $\mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$ , el espacio lineal de las formas cuspidales de peso  $3/2$  con multiplicador  $\chi$ .

Por último antes de empezar la descomposición del término de error, introduciremos una función de suavizado, la misma que se escoge en la esfera, (véase [Ch-Iw]),

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ R(R + H - x)/H & \text{si } R \leq x \leq R + H \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $0 < H < 1$ .

Esta función tiene una transformada seno de Fourier con fórmula explícita pero con decaimiento lento,

$$\tilde{f}(\xi) := 2 \int_0^\infty f(t) \text{sen}(2\pi\xi t) dt = \frac{\text{sen}(2\pi R\xi)}{2\pi^2\xi^2} - \frac{R}{H} \frac{\text{sen}(\pi H\xi)}{\pi^2\xi^2} \cos(\pi(2R + H)\xi).$$

Una vez vistas todas estas definiciones, estamos preparados para descomponer el término de error de nuestro problema en tres partes,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{M}$ , que serán tratadas con

sumas trigonométricas, sumas de caracteres y formas modulares respectivamente en las secciones 3, 4 y 5. Al igual que en la esfera el tamaño de  $H$  se puede elegir. De hecho, en la sección 6 escogeremos  $H = R^{-5/8}$  que corresponde al  $H$  óptimo que se elige en el problema de la esfera (véase [HB2]).

**Proposición 4.2.1** *Con las definiciones anteriores, tenemos para  $R > 1$  y  $0 < H < 1$ ,*

$$E(R) = \mathcal{T} + \mathcal{C} + \mathcal{M}$$

donde

$$\mathcal{T} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \int_R^{R+H} r f(r) dr - 1 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_{Q^*}(n) \frac{\tilde{f}(\sqrt{4n/D})}{\sqrt{n}},$$

$$\mathcal{C} = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} L(n) f(\sqrt{n}) \quad \text{y} \quad \mathcal{M} = - \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} a_n \frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

En la próxima sección (en la prueba de la Proposición 4.3.1) comprobaremos que la serie que aparece en la definición de  $\mathcal{T}$  converge, es más, lo hace uniformemente para  $R$  en un intervalo acotado. Teniendo en cuenta esto, la descomposición de  $E(R)$  es una consecuencia de la siguiente fórmula de sumación (cf. [Ch-Iw]).

**Lema 4.2.2** *Sea  $g \in C_0^\infty([0, +\infty))$  con  $g(0) = g'(0) = 0$ , entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) \frac{g(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \int_0^\infty r g(r) dr - g'(0) + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_{Q^*}(n) \frac{\tilde{g}(\sqrt{4n/D})}{\sqrt{n}}.$$

*Demostración:* Por la definición de  $r_Q(n)$ ,

$$r_Q(n) = \#\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : Q(n_1, n_2, n_3) = n\},$$

podemos escribir,

$$g'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) \frac{g(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{\vec{n}} \frac{g(\sqrt{Q(\vec{n})})}{\sqrt{Q(\vec{n})}},$$

donde  $\vec{n}^t = (n_1, n_2, n_3)$  y  $g'(0) = g(0)/0$  por convenio.

Sea  $G(\vec{x})$  la extensión de  $g(\sqrt{Q(\vec{x})})/\sqrt{Q(\vec{x})}$  en  $C_0^2(\mathbb{R}^3)$ . Aplicando la fórmula de sumación de Poisson se tiene,

$$(4.1) \quad g'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) \frac{g(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sum_{\vec{n}} \widehat{G}(\vec{n}).$$

Usando coordenadas esféricas conocemos que la transformada de Fourier de  $g(\|\vec{x}\|)/\|\vec{x}\|$  es  $\tilde{g}(\|\vec{x}\|)/\|\vec{x}\|$  (véase Lema 2.1 de [Ch-Iw]). Por otro lado, teniendo en cuenta que un elipsoide puede transformarse en una esfera, hacemos el cambio de variable,  $\vec{x} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}C^{-1}\vec{x}$  donde  $C^tAC = I$ , o equivalentemente,  $A^{-1} = CC^t$ . Así, tras algunas manipulaciones, deducimos,

$$\widehat{G}(\vec{n}) = \frac{\sqrt{2}\tilde{g}(\sqrt{4Q^*(\vec{n})/D})}{\sqrt{Q^*(\vec{n})}} \quad \text{para } \vec{n} \neq \vec{0} \quad \text{y} \quad \widehat{G}(\vec{0}) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \int_0^\infty rg(r) dr.$$

Sustituyendo lo anterior en (4.1), el resultado queda demostrado.  $\square$

*Demostración de la Proposición 4.2.1:* Escribamos el término de error,

$$\begin{aligned} E(R) &= \sum_{1 \leq n \leq R^2} r_Q(n) - \text{Vol}(\mathcal{B})R^3 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) \frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} - \sum_{R < \sqrt{n} < R+H} r_Q(n) \frac{f(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} - \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \int_0^R rf(r) dr. \end{aligned}$$

Por el Lema 4.2.2 queda claro que el primer y el tercer término dan  $\mathcal{T}$ . Por otro lado, a partir de la definición de  $a_n$  y de la fórmula de masa de Siegel tenemos,

$$r_Q(n) = \frac{4\pi\sqrt{2n}}{\sqrt{D}}L(n) + a_n,$$

sustituyendo esto en el segundo término comprobamos que de él vienen  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{M}$ .  $\square$

### 4.3. La suma trigonométrica

La suma trigonométrica que aparece en este problema es análoga a la que se trata en [Ch-Iw]. Por ello, aquí sólo esbozaremos el argumento.

**Proposición 4.3.1** *Para cualquier  $0 < H < 1 < R < H^{-2}$  y  $\varepsilon > 0$ , tenemos*

$$\mathcal{T} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{\sqrt{D}}HR^2 + O_\varepsilon((R^{21/16+\varepsilon} + RH^{-1/2} + R^{29/24}H^{-5/24} + R^{11/8}H^{1/8})H^{-\varepsilon}).$$

OBSERVACIÓN: En el capítulo 2 hemos probado que los términos  $R^{21/16+\varepsilon}$  y  $R^{11/8}H^{1/8}$  se pueden reducir. Sin embargo, como esta mejora no produce cambios en el resultado

final, en esta sección preferimos apelar a la acotación de [Ch-Iw] al igual que se hace en [Ch-Cr-Ub2]. Finalmente, indicar que cualquier mejora incondicional del término  $(R^{11/6+\epsilon}H^{5/6})$  que lleva al  $R^{21/16}$  en la Proposición 4.4.3 (la suma de caracteres) implicaría también una mejora incondicional para nuestro resultado principal (siempre y cuando la mejora no produjese que alguno de los otros términos alcanzase el  $R^{21/16}$ ).

*Demostración:* Empezamos probando con un cálculo que

$$(4.2) \quad \frac{8\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \int_R^{R+H} r f(r) dr = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} HR^2 + \frac{4\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{D}} H^2 R,$$

donde  $f$  es la función de suavizado de siempre (definida en la sección anterior). A partir de aquí la cuestión principal es estimar

$$(4.3) \quad S_{\tilde{f}}(R) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_{Q^*}(n) \frac{\tilde{f}(\sqrt{4n/D})}{\sqrt{n}}.$$

La aplicación del Lema 4.2.2 esta justificada porque probaremos que

$$V_N(R) = \sum_{N \leq n < 2N} r_{Q^*}(n) e(R\sqrt{4n/D})$$

satisface (4.4), lo que asegura que la serie resultante del Lema 4.2.2 converge uniformemente en los compactos.

Escribamos,

$$V_N(R) = \sum_{\vec{n}} e\left(R\sqrt{\frac{4}{D}\left(\frac{D}{2}\vec{n}^t A^{-1}\vec{n}\right)}\right).$$

Lo primero que debemos hacer es diagonalizar  $Q^*$  (forma dual definida en la sección anterior). Para ello, hacemos el cambio de variable  $\vec{n} = B\vec{m}$ , siendo  $B$  una matriz en  $GL_3(\mathbb{Q})$  tal que  $B^t D A^{-1} B = J$ , donde  $J$  es una matriz diagonal perteneciente a  $GL_3(\mathbb{Q})$ . Tras el cambio,

$$V_N(R) \ll \left| \sum_{\vec{m}} e\left(R\sqrt{\frac{2}{D}\vec{m}^t J \vec{m}}\right) \right|.$$

Sin embargo,  $\vec{m} = B^{-1}\vec{n}$  no siempre es un vector de coordenadas enteras, por ello debemos multiplicarlo por  $m$ , el entero positivo más pequeño tal que  $mB^{-1} \in GL_3(\mathbb{Z})$  y tiene elementos pares en la diagonal (se dice que  $m$  es el nivel de  $B^{-1}$ ), así obtenemos  $\vec{p} = mB^{-1}\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$ . Finalmente, multiplicando por  $s$  (nivel de  $J$ ) los elementos de dicha matriz, tenemos,

$$V_N(R) \ll \left| \sum_{\vec{p}}^* e\left(Rt\sqrt{\vec{p}^t M \vec{p}}\right) \right|,$$

donde  $t = \sqrt{2}/(m\sqrt{sD})$  y  $M = sJ$ , matriz diagonal, que ahora pertenece a  $\text{Gl}_3(\mathbb{Z})$ . El asterisco indica que la suma no es sobre todos los enteros, es más,  $\vec{p} = (an_1 + bn_2 + cn_3, dn_1 + fn_2 + gn_3, hn_1 + in_2 + jn_3)$  donde  $a, b, c, d, e, f, g, h$  y  $i$  son los elementos de  $mB^{-1}$ .

Ahora nuestro problema es equivalente a contar puntos del retículo en elipsoides dilatados  $tR$ , pero como  $\theta_3$  no se ve afectado por dilataciones, esto no es ningún inconveniente. Además, veremos a continuación que para acotar  $V_N(R)$  basta utilizar el Lema 3.1 de [Ch-Iw] con ligeras modificaciones.

Comenzamos como en él eligiendo la coordenada más pequeña de  $\vec{p}$ , digamos que es  $p_3$  y a partir de  $p_1$  y  $p_2$  creamos una nueva variable,  $n = Ap_1^2 + Bp_2^2$  ( $A$  y  $B$  son los dos primeros elementos de la diagonal de  $M$ ). Teniendo en cuenta que

$$\#\{(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 : Ap_1^2 + Bp_2^2 = n\} \ll N^\varepsilon,$$

aplicamos el Lema 7.3 de [Gr-Ko] en la suma sobre  $p_3$ , así,

$$V_N(R) \ll N^\varepsilon \sum_{n \asymp N} \left| \sum_{p_3 \ll \sqrt{N}} e(\theta p_3) e(Rt\sqrt{n + Cp_3^2}) \right|,$$

( $C$  es el tercer elemento de la diagonal de  $M$ ).

A partir de aquí, dividiendo el rango de la suma interior en segmentos de longitud  $N^{1/2-\varepsilon}$ , aplicando la desigualdad de Cauchy y separando el término diagonal, obtenemos,

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon} + N^{1+\varepsilon} \sum_{p_4, p_5 < \sqrt{N}} \left| \sum_{n \asymp N} e(Rt(\sqrt{n + Cp_4^2} - \sqrt{n + Cp_5^2})) \right|,$$

donde  $|p_4 - p_5| < N^{1/2-\varepsilon}$ .

Hacemos ahora un nuevo cambio de variable,  $x = n + Cp_4^2$  e  $y = C(p_5^2 - p_4^2)$ , de aquí escribimos,  $y \asymp D$  y  $D \ll N^{1-\varepsilon}$ , entonces,

$$\sum_{y \asymp D} \#\{(p_4, p_5) \in \mathbb{Z}^2 : C(p_4^2 - p_5^2) = y\} = \sum_{y \asymp D} O(N^\varepsilon)$$

y

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon} + N^{1+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} e(f(x, y)) \right|,$$

donde  $f(x, y) = Rt(\sqrt{x} - \sqrt{x+y})$ . Como  $t$  es una constante bien definida que sólo depende de  $Q^*$  el resto de la prueba se sigue del Lema 3.1 de [Ch-Iw]. Así se deduce,

$$(4.4) \quad V_N(R) \ll N^{5/4+\varepsilon} + N^\varepsilon \min \left( R^{3/8} N^{15/16} + R^{1/8} N^{17/16}, \right. \\ \left. R^{7/24} N^{49/48} + R^{5/24} N^{53/48} \right),$$

lo que da

$$\begin{aligned} N^{-1}V_N(R) &\ll R^{5/16} \quad \text{si } N \leq R, \\ N^{-1}V_N(R) &\ll (H^{-1/2} + R^{5/16})H^{-\epsilon} \quad \text{si } R \leq N \leq H^{-2}, \quad \text{y} \\ N^{-3/2}V_N(R) &\ll (H^{1/2} + R^{3/8}H^{9/8})H^{-\epsilon} \quad \text{si } H^{-2} \leq R. \end{aligned}$$

(Obsérvese que en la p. 427 de [Ch-Iw] y en (5.3) del mismo artículo en lugar de  $R^{9/8}H^{-1/8}$  debería aparecer  $R^{11/8}H^{1/8}$ ).

Finalmente, usando las desigualdades anteriores para acotar  $S_{\tilde{f}}$  deducimos,

$$S_{\tilde{f}}(R) \ll (R^{21/16+\epsilon} + RH^{-1/2} + R^{29/24}H^{-5/24} + R^{11/8}H^{1/8})H^{-\epsilon},$$

combinando esta cota con (4.2) la prueba queda terminada.  $\square$

## 4.4. La suma de caracteres

El objetivo de esta sección es estimar la suma  $\mathcal{C}$ . Para ello el paso clave está en expresarla como una suma de caracteres. Esto se logra probando que  $L(n)$  es una suma de funciones  $L$  sobre divisores cuadrados de  $n$  salvo por algunos factores locales. Además estos factores no interfieren en la acotación final gracias a su periodicidad, así que ésta es importante. Comenzamos estudiándola.

Recordamos antes de empezar que  $N_q(n)$  es el número de soluciones de  $Q(\vec{x}) = n$  en  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^3$ . Definimos del mismo modo,  $N_q^*(n)$ , pero ahora sólo considerando soluciones primitivas, es decir, aquellas que tienen al menos una coordenada coprima con  $q$ . Obsérvese que ambas son funciones multiplicativas en  $q$ .

**Lema 4.4.1** *Sea  $p$  un número primo tal que  $p^r \parallel D$  y sea  $\alpha$  un entero positivo, entonces*

$$\delta_p^*(n) = p^{-2\alpha} N_{p^\alpha}^*(n)$$

*no depende de la elección de  $\alpha$  siempre y cuando  $\alpha \geq r+1$  si  $p \neq 2$  y  $\alpha \geq r+3$  si  $p = 2$ .*

**OBSERVACIÓN:** Nótese que por definición se sigue que  $\delta_p^*(n)$  es  $p^{r+1}$ -periódica en  $n$  si  $p \neq 2$  y  $2^{r+3}$ -periódica si  $p = 2$ .

*Demostración:* La prueba se divide de forma natural en dos casos,  $p$  impar y  $p = 2$ . Comenzamos con la demostración del caso impar.

Empecemos escribiendo,  $A = C^tTC$ , donde  $T$  es una matriz diagonal con coeficientes enteros,  $C$  tiene coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  (los enteros  $p$ -ádicos) y  $|C| \in \mathbb{Z}_p^\times$  ([Jo], Theorem 32). Así podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $Q(\vec{x})$  es una forma diagonal. Por tanto, escribimos,

$$Q(\vec{x}) = t_1x_1^2 + t_2x_2^2 + t_3x_3^2,$$

y suponemos que  $p^{a_j} \parallel t_j$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$  con los  $a_j$  son decrecientes. Definimos ahora para cualquier  $\alpha > a_1$ ,  $\mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n)$ , el número de soluciones primitivas de  $Q(\vec{x}) \equiv n \pmod{p^\alpha}$  con  $1 \leq x_j \leq p^{\alpha-a_j}$  para todo  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Podemos expresar cada componente de una solución contada por  $\mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n)$  como  $w_j + p^{\alpha-a_j}h_j$  con  $1 \leq w_j \leq p^{\alpha-a_j}$  y  $0 \leq h_j < p^{a_j}$ . Entonces,

$$\mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n) = p^{a_1+a_2+a_3} \mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n).$$

Consideramos  $\vec{w}$ , solución primitiva de  $Q(\vec{x}) \equiv n \pmod{p^\alpha}$ , cada uno de sus componentes es como antes, es decir,  $1 \leq w_j \leq p^{\alpha-a_j}$ . Si  $\vec{x} = \vec{w} + (p^{\alpha-a_1}m_1, p^{\alpha-a_2}m_2, p^{\alpha-a_3}m_3)$  con  $0 \leq m_j \leq p-1$ , es fácil comprobar que  $Q(\vec{x}) \equiv n \pmod{p^{\alpha+1}}$  es equivalente a

$$Aw_1m_1 + Bw_2m_2 + Cw_3m_3 \equiv \frac{n - Q(\vec{w})}{2p^\alpha} \pmod{p} \quad \text{con } p \nmid A, B, C.$$

Con  $\vec{w}$  como antes esta ecuación tiene  $p^2$  soluciones  $(m_1, m_2, m_3)$ . Por tanto,  $\mathcal{N}_{p^{\alpha+1}}^*(n) = p^2 \mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n)$  y consecuentemente,  $\mathcal{N}_{p^{\alpha+1}}^*(n) = p^2 \mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n)$ . De aquí se sigue que  $p^{-2\alpha} \mathcal{N}_{p^\alpha}^*(n)$  es constante si  $\alpha \geq r+1 > a_1$ .

Retornamos al caso  $p=2$  y comenzamos su prueba. Toda forma cuadrática es equivalente sobre  $\mathbb{Z}_2$  a  $s_1x_1^2 + s_2x_2^2 + s_3x_3^2$ ,  $s_1x_1^2 + s_2x_2x_3$  o  $s_1x_1^2 + s_2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$  ([Jo], p.84-85). Como los tres casos son muy parecidos nos restringimos a  $Q(\vec{x}) = s_1x_1^2 + s_2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$  en esta demostración.

Suponemos que  $2^{a_i} \parallel s_i$  y definimos, para  $\alpha > \max(a_1 + 2, a_2)$ ,  $\mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n)$ , el número de soluciones primitivas de  $Q(\vec{w}) \equiv n \pmod{2^\alpha}$  con  $1 \leq w_1 \leq 2^{\alpha-a_1-1}$  y  $1 \leq w_2, w_3 \leq 2^{\alpha-a_2}$ . Observamos que cambiar  $x_1$  por  $x_1 + 2^{\alpha-a_1-1}m_1$  o  $x_j$  por  $x_j + 2^{\alpha-a_2}m_j$ ,  $j = 2, 3$ , deja invariante la congruencia  $Q(\vec{x}) \equiv n \pmod{2^\alpha}$ , por tanto, se tiene como antes que  $\mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n) = 2^{a_1+1+2a_2} \mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n)$  y una solución contada por  $\mathcal{N}_{2^{\alpha+1}}^*(n)$  es de la forma  $\vec{w} + (2^{\alpha-a_1-1}m_1, 2^{\alpha-a_2}m_2, 2^{\alpha-a_2}m_3)$  para algún  $m_i \in \{0, 1\}$ . Sustituyendo una de estas soluciones,  $\vec{x}$ , en  $Q(\vec{x}) \equiv n \pmod{2^{\alpha+1}}$  deducimos,

$$s_12^{\alpha-a_1}w_1m_1 + s_22^{\alpha-a_2}(w_2m_3 + w_3m_2) \equiv n - Q(\vec{w}) \pmod{2^{\alpha+1}}.$$

Dado  $\vec{w}$ , hay  $2^2$  posibilidades para  $(m_1, m_2, m_3)$  (obsérvese que  $s_12^{-a_1}$  y  $s_22^{-a_2}$  son enteros impares) entonces se cumple que  $\mathcal{N}_{2^{\alpha+1}}^*(n) = 2^2 \mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n)$  y por tanto  $\mathcal{N}_{2^{\alpha+1}}^*(n) = 2^2 \mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n)$ , además  $2^{-2\alpha} \mathcal{N}_{2^\alpha}^*(n)$  es constante para  $\alpha \geq r+3 > \max(a_1 + 2, a_2)$ .  $\square$

Ayudados del lema anterior, en el siguiente resultado probaremos que  $L(n)$  se puede expresar como una suma de funciones  $L$ , excepto por ciertos factores que se pueden controlar gracias a que como veremos, son periódicos.

**Lema 4.4.2** *Existe una función  $B$ ,  $8D^2$ -periódica, tal que*

$$L(n) = \sum_{d^2|n} d^{-1} B(n/d^2) L(1, \chi_{Dn/d^2}), \quad \text{donde } \chi_m = \left(\frac{m}{\cdot}\right).$$

*Demostración:* Empezamos observando que  $N_{p^\alpha}^*(n)$  y  $N_{p^\alpha}(n)$  están relacionados de la siguiente forma,

$$N_{p^\alpha}(n) = \sum_{p^{2\gamma}|(n, p^\alpha)} N_{p^{\alpha-\gamma}}^* \left(\frac{n}{p^{2\gamma}}\right) p^\gamma.$$

Por otro lado, a partir de las definiciones de  $\delta_p(n)$  y  $\delta_p^*(n)$  para  $\alpha$  suficientemente grande tenemos que  $p^{2\alpha}\delta_p(n) = N_{p^\alpha}(n)$  y  $p^{2\alpha}\delta_p^*(n) = N_{p^\alpha}^*(n)$ , entonces,

$$(4.5) \quad \delta_p(n) = \sum_{p^{2\gamma}|n} \frac{1}{p^\gamma} \delta_p^* \left(\frac{n}{p^{2\gamma}}\right).$$

Para  $p \nmid D$  el Hilfssatz 16 de [Sie] garantiza

$$\delta_p(n) = \sum_{p^{2\gamma}|n} \frac{1}{p^\gamma} \frac{1 - p^{-2}}{1 - \chi_{Dn/p^{2\gamma}}(p)p^{-1}}$$

o de manera equivalente, por (4.5),  $\delta_p^*(n) = (1 - p^{-2})/(1 - \chi_{Dn}(p)p^{-1})$ . Así,

$$L^*(n) := \prod_p \delta_p^*(n) = B(n)L(1, \chi_{Dn}),$$

donde  $B(n) = C_D \prod_{p|D} \delta_p^*(n)$  y  $C_D = \prod_{p \nmid D} (1 - p^{-2})$ . Además, por el Lema 4.4.1, se puede observar que  $B$  es  $8D^2$ -periódica.

Finalmente, utilizando que  $\delta_p^*(n) = \delta_p^*(m^2n)$  para  $p \nmid m$ , obtenemos,

$$L(n) = \sum_{d^2|n} d^{-1} L^*(n/d^2),$$

lo cual lleva a la fórmula esperada.  $\square$

Una vez expresado  $L(n)$  como suma de funciones  $L$ , estimaremos  $\mathcal{C}$ , para ello emplearemos [HB2].



**Proposición 4.4.3** *Para cualesquiera  $R \geq 1 \geq H > 0$  y  $\varepsilon > 0$  existe una constante  $c = c(Q)$  tal que,*

$$\mathcal{C} = cR^2H + O_\varepsilon(R^{1+\varepsilon}(R^{5/6}H^{5/6} + R^{4/15} + R^{1/6}H^{-1/6})).$$

*Demostración:* Aplicando el Lema 4.4.2 podemos expresar  $\mathcal{C}$  como

$$\mathcal{C} = -\frac{4\pi\sqrt{2}}{\sqrt{D}} \sum_{\nu=1}^{8D^2} B(\nu) \sum_{d < R+H} d^{-1} \sum_{\substack{R/d < \sqrt{m} < (R+H)/d \\ m \equiv \nu \pmod{8D^2}}} L(1, \chi_{Dm}) f(d\sqrt{m}).$$

A continuación, sumando por partes y utilizando los Lemas 1 y 2 de [HB2] (que también funcionan con la condición de la congruencia) la proposición queda demostrada (véase también el Corolario 4.2 y la prueba del Teorema 1.1 en [Ch-Iw]).  $\square$

## 4.5. La suma modular

En esta sección acotaremos la contribución modular,  $\mathcal{M}$ .

**Proposición 4.5.1** *Para cualesquiera  $R \geq 1 \geq H > 0$  y  $\varepsilon > 0$  se tiene,*

$$\mathcal{M} = O_\varepsilon(R^{27/14+\varepsilon}H + R).$$

Este resultado está directamente relacionado con la estimación de los coeficientes de Fourier de las formas modulares de peso semientero, dicha estimación fue introducida en [Iw] y extendida en [Du] y [Du-Sc]. En este último artículo (véanse también [Blo] y [Sc-Pi]) se habla del número de representaciones por formas en el mismo género y también en el mismo género espinorial, manipulando a partir de estos resultados es posible concluir la proposición anterior, sin embargo, preferimos emplear la cota para formas cuspidales de peso  $3/2$  que enunciamos en el siguiente lema, además ésta extiende el Lema 2 de [Du-Sc].

**Lema 4.5.2** *Sea  $f(z) = \sum a_n e(nz) \in \mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$ ,  $4|D$ , tal que su correspondencia de Shimura es una forma cuspidal, entonces  $a_n \ll_{f,\varepsilon} n^{13/28+\varepsilon}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .*

OBSERVACIÓN: En el reciente trabajo de V. Blomer [Blo2] (véase apéndice 2) la cota de Duke-Iwaniec ([Du], [Iw]) es mejorada. Utilizando el Teorema 6 de [Blo2] con

$\theta = 7/64$  (véase la hipótesis  $H_\theta$ ), en la prueba del lema anterior se podría reemplazar  $13/28 = 0,4642\dots$  por  $231/512 = 0,4517\dots$ , sin embargo esto no afecta al resultado final. En principio incluso se podrían obtener cotas mejores si [By] o [Con-Iw] se extendieran a formas modulares de peso 2 y nivel arbitrario  $D$ .

*Demostración:* Es posible encontrar una base de  $\mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$  cuyos elementos sean autofunciones de los operadores de Hecke  $T_{p^2}$  para todo  $p \nmid D$  (conmutan y son normales). Podemos suponer que  $f$  es uno de estos elementos de la base porque siempre se puede expresar como una combinación lineal de ellos. Sea  $V \subset \mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$  el subespacio de las formas modulares con los mismos autovalores que  $f$  para todo  $p \nmid D$  (en particular la correspondencia de Shimura de cada forma de  $V$  es también una forma cuspidal). Como  $0 < \dim V < \infty$ , los elementos de  $V$  están determinados por sus  $N$  primeros coeficientes de Fourier para algún  $N$  apropiado, y para algún subespacio  $S \subset \mathbb{C}^N$  tenemos un isomorfismo  $i : V \rightarrow S$ .

Sea  $g = \sum b_n e(nz) \in V$ , a partir del Corolario 1.8 de [Sh] se tiene,  $(T_{p^2})^k(g) = \sum b_{np^{2k}} e(nz)$  para  $p \mid D$ , además, por el teorema principal de este mismo artículo, para  $n \leq N$  fijado,  $b_{np^{2k}}$  es una suma de los  $lp^k$ -ésimos coeficientes de Fourier de una forma cuspidal de peso 2, donde  $l$  divide a la parte no libre de cuadrados de  $n$ . Por tanto, a partir de la conjetura de Ramanujan-Petersson está asegurado que  $b_{np^{2k}} \ll_{g,N,\epsilon} (p^k)^{1/2+\epsilon}$ , o de forma equivalente,  $\|i \circ (T_{p^2})^k \circ i^{-1}\| \ll (p^k)^{1/2+\epsilon}$  para cualquier  $p \mid D$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma del operador. Concluimos que

$$(4.6) \quad \|(T_{p^2})^k|_V\| \ll (p^k)^{1/2+\epsilon} \quad \text{para } p \mid D.$$

Denotamos con  $D^\infty$  a una potencia de  $D$  arbitrariamente grande. Sea  $t$  libre de cuadrados y  $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \mid D^\infty$ , consideramos el operador  $L = (T_{p_1^2})^{\alpha_1}|_V \circ \cdots \circ (T_{p_r^2})^{\alpha_r}|_V$ . Fijando una base ortonormal  $\{g_j\}_{j \in J}$  de  $V$ , a partir (4.6) deducimos,  $f = \sum \lambda_j g_j$  y  $L(g_j) = \sum \mu_{jk} g_k$  con  $\lambda_j \ll 1$  y  $\mu_{jk} \ll \|L\| \ll m^{1/2+\epsilon}$  y donde las constantes del  $\ll$  no dependen de  $m$ . A partir de la cota de Duke-Iwaniec ([Du], [Iw]) el  $t$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $g_k$  es  $O(t^{13/28+\epsilon})$ , despejando dicho coeficiente en la identidad  $L(f) = \sum \lambda_j L(g_j)$ , obtenemos,

$$(4.7) \quad a_{tm^2} \ll t^{13/28+\epsilon} m^{1/2+\epsilon} \ll (tm^2)^{13/28+\epsilon}$$

para todo  $t$  libre de cuadrados y  $m \mid D^\infty$ . Considerando la  $t$ -correspondencia de Shimura de  $f$  con  $t$  libre de cuadrados deducimos la identidad (véase [Sh] o (2.4) en [Blo] para una formulación más explícita),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{td^2}}{d^s} = \sum_{m \mid D^\infty} \frac{a_{tm^2}}{m^s} \cdot \sum_{(l,D)=1} \frac{\omega_l}{l^s} \cdot L(s, \chi)^{-1}$$

para cierto carácter  $\chi$  de módulo  $4tD$  y para  $|\omega_l| \ll l^{1/2+\epsilon}$  (lo que de nuevo requiere la conjetura de Ramanujan-Petersson para peso 2). Por tanto si  $n = td^2$  con  $t$  libre de cuadrados, tenemos,

$$a_n \ll \sum_{\substack{ml|d \\ m|D^\infty}} |a_{tm^2}| l^{1/2+\epsilon} \ll m^\epsilon \sum_{m|(d, D^\infty)} |a_{tm^2}| (d/m)^{1/2} \ll n^{13/28+\epsilon}$$

(para la última desigualdad hemos utilizado (4.7)).  $\square$

*Demostración de la Proposición 4.5.1:* Existe una combinación lineal de funciones theta  $\sum \chi(k)ke(tk^2)$  con  $t|D$  tal que añadida a  $f(z) = \sum a_n e(nz)$  da  $f^*(z) = \sum a_n^* e(nz) \in \mathcal{S}_{3/2}(\Gamma_0(D), \chi)$  con correspondencia de Shimura cuspidal, [Ci]. Obsérvese que en el rango  $R^2 \leq n < (R+H)^2$  se tiene  $a_n = a_n^*$  excepto para un subconjunto de subíndices de cardinal acotado en los cuales  $a_n = a_n^* + O(R)$ . Por tanto, la prueba del resultado se reduce a aplicar el Lema 4.5.2 a  $f^*$ .  $\square$

## 4.6. Demostración del resultado principal

Se sustituyen las Proposiciones 4.3.1, 4.4.3 y 4.5.1 en la Proposición 4.2.1, después, eligiendo  $H = R^{-5/8}$  obtenemos,

$$E(R) = \left( \frac{4\sqrt{2}\pi}{\sqrt{D}} - c \right) R^{11/8} + O(R^{21/16+\epsilon}).$$

De  $\int_0^\infty E(t)e^{-t^2/R^2} dt = O(R)$ , que es un ejercicio con la fórmula de sumación de Poisson, se deduce que  $c = 4\sqrt{2}\pi/\sqrt{D}$ , lo que termina la prueba del Teorema 4.1.1. Una aproximación alternativa sería apelar a los  $\Omega_\pm$ -resultados, [No3].

## 4.7. Apéndice: breve introducción a las formas modulares

La existencia de esta sección está motivada por el hecho de que, como hemos dicho ya varias veces, las formas modulares no aparecen en general en los problemas clásicos de puntos del retículo; además, dentro de la memoria sólo se utilizan en este capítulo. Por tanto, el objetivo de la sección es simplemente, como indica el título, exponer brevemente algunos conceptos sobre formas modulares.

Con pocas palabras y de una manera muy primaria se puede decir que una forma modular es esencialmente una función analítica (compleja) definida en el semiplano superior

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  que satisface ciertas simetrías (las veremos más adelante). Por tanto, no sería ilógico incluir a las formas modulares dentro del análisis complejo, sin embargo, su principal papel ha estado unido a la teoría de números (aunque también aparecen en otras áreas). Históricamente si que fueron descubiertas y estudiadas con fines relacionados con el análisis complejo (en particular, en conexión con las funciones elípticas) pero, con el paso del tiempo han quedado ligadas a la teoría de números. Además, aparte de proporcionar nuevas herramientas han dado lugar a nuevos problemas (véase [Iw-Ko]).

Por último, señalar que si indagásemos más en las formas modulares veríamos que la breve noción que hemos escrito anteriormente sobre qué es una forma modular se refiere únicamente a un caso importante dentro de todo el panorama de formas modulares (para más información sobre este panorama se puede consultar [Iw-Ko]).

Adentrémonos ya en las formas modulares. Comenzamos definiendo cierto grupo de matrices

**Definición:**  $SL_2(\mathbb{Z})$  es el grupo de matrices enteras con determinante uno.

Denotaremos con  $g$  a los elementos de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Su acción sobre  $\mathbb{H}$  se define de la siguiente forma,

$$\text{si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad \text{entonces } gz = (az + b)/(cz + d).$$

OBSERVACIÓN: El único inconveniente de este grupo es que  $g$  y  $-g$  actúan igual, por ello a veces se trabaja con  $SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ .

Las matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generan  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

Bajo la acción de  $SL_2(\mathbb{Z})$  en  $\mathbb{H}$ ,

$$D = \{z : |\text{Re}(z)| \leq 1/2 \quad \text{y} \quad |z| \geq 1\}$$

es un dominio fundamental. En concreto se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.7.1** *Para todo  $z \in \mathbb{H}$  existe  $g \in SL_2(\mathbb{Z})$  tal que  $gz \in D$ . De hecho  $z$  corresponde a un solo punto en  $D$  si se suprime la parte de la frontera  $\text{Re}(z) < 0$ .*

Si consideramos la actuación de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sobre  $\mathbb{H}$  o lo que es lo mismo,  $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$  (el conjunto de las órbitas de  $z$  en  $\mathbb{H}$ ) entonces, a partir de la Proposición 4.7.1, se tiene que es como  $D$  con las fronteras izquierda y derecha identificadas; topológicamente es una esfera con un punto en el infinito, es decir, sería como una botella abierta.

La demostración de los últimos resultados se puede encontrar en [Se] o [Ch2] y para lecturas sobre formas modulares con mayor profundidad que en esta breve sección véanse también [Se] y [Ch2], o [Iw-Ko].

Después de este pequeño recorrido llegamos a la definición de función modular.

**Definición:** Una función holomorfa  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función modular de peso  $k$  si satisface

$$(4.8) \quad f(z) = (cz + d)^{-k} f(gz) \quad \text{para} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Como  $SL_2(\mathbb{Z})$  está generado por  $S$  y  $T$ , para ver que una función es modular basta comprobar que es invariante por  $T$  y que con  $S$  cumple la relación que debe. Así, si  $f$  es una función holomorfa en  $\mathbb{H}$ , será una función modular de peso  $k$ , si y sólo si satisface las siguientes relaciones,

$$(4.9) \quad f(z) = f(z + 1)$$

$$(4.10) \quad f(z) = z^{-k} f(-1/z).$$

A continuación, enunciamos por fin la definición de forma modular,

**Definición:** Una función modular holomorfa en todos los puntos incluyendo el infinito se denomina forma modular y si además es cero en el infinito (en  $i\infty$ ) se denomina forma cuspidal o parabólica.

Por (4.9) queda claro que una forma modular es una función periódica de periodo uno, por tanto, tendrá un desarrollo de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e(mz)$$

que converge cuando  $Im(z) > 0$ . Además, si  $a_0 = 0$  la forma es cuspidal.

Mostramos a continuación el caso más sencillo de forma modular, las series de Eisenstein,

$$G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^k},$$

son formas modulares de peso  $k$  con  $k > 2$  (véase [Se]).

Una de las propiedades más importantes de las formas modulares es que forman espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ . Denotaremos con  $\mathcal{M}_k$  al espacio vectorial compuesto por formas modulares de peso  $k$  y  $\mathcal{S}_k$  será el espacio compuesto por formas cuspidales de peso  $k$ ,  $\mathcal{S}_k$  es un subespacio de  $\mathcal{M}_k$ .

OBSERVACIÓN: Como  $g$  y  $-g$  actúan igual sobre  $\mathbb{H}$  estos espacios serán triviales si  $k$  es impar, por ello algunos autores escriben directamente que las formas modulares tienen peso  $2k$  en lugar de  $k$ . Por otro lado, existen generalizaciones de la definición de forma modular para  $k \in \mathbb{R}$  [Iw2].

Veamos en la siguiente proposición cual es la dimensión de estos espacios.

**Proposición 4.7.2** Para  $k \geq 0$  par,

$$\dim \mathcal{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } 12|k - 2 \\ \lfloor k/12 + 1 \rfloor & \text{si } 12 \nmid k - 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{S}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 12 \\ \dim \mathcal{M}_k - 1 & \text{si } k \geq 12 \end{cases},$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la parte entera.

Teniendo en cuenta estas dimensiones se pueden encontrar importantes identidades entre los coeficientes de las formas modulares, es decir, si por ejemplo tuviésemos un espacio de dimensión uno sus formas modulares deben ser proporcionales y a partir de aquí se hallan las identidades sobre sus coeficientes.

Las bases de estos espacios vectoriales están formadas por series de Eisenstein y formas parabólicas. Por tanto, toda forma modular se puede expresar como combinación lineal de ellas.

Aparte de las formas modulares que hemos visto, hay más. A continuación extendemos la definición de forma modular considerando grupos diferentes de  $SL_2(\mathbb{Z})$  e introduciendo caracteres, lo cual permitirá que el peso pueda ser semientero.

**Definición:** Se dice que  $f(z)$  es una forma modular de peso  $k$  en el subgrupo  $\Gamma_0(N)$  con multiplicador  $\psi$ , siendo  $\psi$  un carácter de Dirichlet de módulo  $N$ , si  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\mathbb{H}$  que satisface

$$f(\gamma z) = (cz + d)^k \psi(d) f(z) \quad \text{para} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{con} \quad N|c.$$

Esta definición da lugar a un nuevo espacio vectorial de dimensión finita que llamaremos  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ , donde  $\Gamma_0(N)$  es el subgrupo de  $SL_2(\mathbb{Z})$  que aparece en la definición, consecuentemente, también da lugar a  $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ , el subespacio formado por formas cuspidales.

Formas modulares de este tipo bastante importantes son las funciones theta,

$$\Theta(\chi, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) n^v e(n^2 z),$$

pertenecen a  $\mathcal{M}_{1/2+v}(\Gamma_0(4N), \chi \chi_4^v)$ , donde  $v = 0, 1$  se elige tal que  $\chi(-1) = (-1)^v$ ,  $\chi$  es un carácter de Dirichlet módulo  $N$  y  $\chi_4$  es el único carácter no principal módulo 4. El caso más simple ocurre cuando  $\chi$  es el carácter trivial y  $v$  es 0, así se tiene,

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n^2 z)$$

que satisface las relaciones

$$\Theta(z) = \Theta(z + 1) \quad \text{y} \quad \Theta(z) = cz^{-1/2} \Theta(-1/4z).$$

Éstas se demuestran por la periodicidad y utilizando la fórmula de sumación de Poisson.

Si elevamos a  $d$  la función, sus coeficientes de Fourier serán el número de representaciones de  $n$  como suma de  $d$  cuadrados, es decir,

$$\Theta^d(z) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} e((n_1^2 + n_2^2 \dots + n_d^2)z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_d(n) e(nz).$$

Un problema interesante y clásico relacionado con los coeficientes de las formas modulares es estimar su tamaño, de hecho esto es lo que se hace en la “parte modular” de nuestro capítulo. Enunciamos a continuación algunos resultados sobre esto (las demostraciones se pueden encontrar en [Se]).

**Proposición 4.7.3** *Si  $f$  es una serie de Eisenstein, el orden de magnitud de  $a_n$  es  $n^{k-1}$ , más preciso, existen dos constantes  $A, B > 0$  tales que*

$$An^{k-1} \leq |a_n| \leq Bn^{k-1}.$$

**Teorema 4.7.4 (Hecke)** *Si  $f$  es una forma cuspidal de peso  $k$ , entonces*

$$a_n = O(n^{k/2}).$$

El resultado anterior se puede mejorar. La célebre conjetura de Ramanujan-Petersson postula que  $a_n = O(n^{(k-1)/2+\epsilon})$  para todo  $\epsilon > 0$  y para toda forma cuspidal (en realidad la conjetura se enunció para peso entero pero después ha sido extendida a peso semientero para libres de cuadrados y a más situaciones). En el caso de peso entero ( $k \geq 2$ ) la conjetura ya está probada. El autor de la prueba fue P. Deligne, [De], quién por tan poderoso resultado recibió una medalla Fields. La demostración es una consecuencia de la RH para variedades algebraicas sobre cuerpos finitos (las conjeturas de Weil).

La correspondiente fórmula para  $k = 1$  también está probada (véase [De-Se]) y cuando el peso es semientero se puede hacer algo más que suponer la conjetura, recordemos que en este capítulo usamos la cota  $a_n = O(n^{13/28+\epsilon})$  ([Du], [Iw]).

**Corolario 4.7.5** *Si  $f$  no es una forma cuspidal, el orden de magnitud de  $a_n$  es  $n^{k-1}$ .*

G. Shimura [Sh] probó una sorprendente relación entre los coeficientes de formas modulares de peso semientero y otras de peso entero.

**Teorema 4.7.6** *Sea  $t$  un entero positivo libre de cuadrados y supongamos que  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e(nz) \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(4N), \psi)$  con  $k \geq 3/2$  semientero positivo. Si los números  $A_n$  están definidos como sigue,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-s} = L(s - k + 1/2, \psi \chi_4^k \chi_t) \sum_{n=1}^{\infty} b_{tn^2} n^{-s},$$

donde  $\chi_t = \left(\frac{\cdot}{t}\right)$  es el carácter de Kronecker módulo  $t$  y  $\chi_4$  es de nuevo el carácter no principal módulo 4, entonces,  $S_t(f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e(nz) \in \mathcal{M}_{2k-1}(\Gamma_0(2N), \psi^2)$ . Además, si  $k > 3/2$ ,  $S_t(f)(z)$  es una forma cuspidal.



Es decir, la correspondencia de Shimura relaciona coeficientes de la forma  $b_{tn^2}$  con  $A_n$  que es el coeficiente de una forma modular de peso entero par,  $2k - 1$ . Además, en el caso  $k > 3/2$  el resultado de la correspondencia de Shimura es una forma cuspidal, lo que permite utilizar el teorema de Deligne para acotar los “nuevos” coeficientes. Si  $k = 3/2$  entonces cabe la posibilidad de que con la correspondencia de Shimura se obtenga una forma modular de peso dos no cuspidal. Investigaciones posteriores han probado que siempre se puede evitar este caso sumando previamente una combinación lineal de funciones theta de la forma  $\sum \chi(k)ke(tk^2)$  con  $t|N$ .

Por último, para acabar la sección hablaremos brevemente de algo fundamental en la teoría de formas modulares, los operadores de Hecke. Antes de empezar indicamos que lo que sigue a continuación versa sobre operadores de Hecke clásicos, de peso entero y para todo el grupo modular, sin embargo, los que aparecen en la última sección son de peso semientero y relativamente recientes, introducidos por G. Shimura en la década de 1970.

Los operadores de Hecke actúan del siguiente modo sobre las formas modulares,

$$T_n f = n^{k-1} \sum_{ad=n} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Aplican  $\mathcal{M}_k$  en  $\mathcal{M}_k$  y  $\mathcal{S}_k$  en  $\mathcal{S}_k$ . También actúan sobre los desarrollos de Fourier de las formas modulares, lo vemos a continuación.

**Proposición 4.7.7** Sea  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e(mz) \in \mathcal{M}_k$ , entonces

$$T_n f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e(mz) \quad \text{con} \quad b_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}.$$

**Corolario 4.7.8**  $b_0 = \sigma_{k-1}(n)a_0$  y  $b_1 = a_n$ .

**Corolario 4.7.9** Si  $n = p$  es primo, entonces,  $b_m = a_{pm}$  si  $p \nmid m$  y  $b_m = a_{pm} + p^{k-1}a_{m/p}$  si  $p \mid m$ .

Las demostraciones de estos resultados se pueden ver en [Se]. La acción sobre los coeficientes de Fourier también se puede leer en el propio operador.

**Proposición 4.7.10** *Los operadores de Hecke satisfacen*

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mn/d^2}.$$

*En particular conmutan y si  $(n, m) = 1$  se tiene  $T_m T_n = T_{mn}$ .*

Estos operadores son autoadjuntos respecto a cierto producto escalar, lo que garantiza la existencia de las llamadas bases de Hecke,  $\mathcal{B} = \{f_1, f_2 \dots f_r\}$ , formadas por funciones de  $\mathcal{M}_k$  o  $\mathcal{S}_k$  tales que cada  $f \in \mathcal{B}$  cumple  $T_n f(z) = \lambda_n f(z)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y ciertos  $\lambda_n$  que dependen de  $f$ . Estas funciones tienen también ciertas propiedades.

**Proposición 4.7.11** *Sea  $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e(mz)$  un elemento de la base de Hecke con  $a_1 = 1$ , entonces,  $a_n = \lambda_n$ , el autovalor de  $f$  en  $T_n$  para todo  $n > 1$ . También se cumple que  $a_n a_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}$ .*

Con esto damos por finalizada la breve introducción a las formas modulares y también el capítulo 4.

# Bibliografía

- [Ad-Pe] S.D Adhikari and Y.-F.S. Pétermann. *Lattice points in ellipsoids*. Acta Arith. **59** (1991), 329–338.
- [Bl-Dy] P.M. Bleher and F.J. Dyson. *Mean square limit for lattice points in a sphere*. Acta Arith. **68** (1994), 383–393. (Erratum: Acta Arith. **73** (1995), 199).
- [Blo] V. Blomer. *Uniform bounds for Fourier coefficients of theta-series with arithmetic applications*. Acta Arith. **114** (2004), 1–21.
- [Blo2] V. Blomer, G. Harcos and P. Michel. *A Burgess-like subconvex bound for twisted L-functions*. Forum Math. **19** (1) (2004), 1–21.
- [Bo] E. Bombieri. *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis*. Clay (2000).
- [Bo-Iw] E. Bombieri and H. Iwaniec. *On the order of  $\zeta(1/2 + it)$* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4) **13** (1986), 449–472.
- [By] V. A.Bykovskii. *A trace formula for the scalar product of Hecke series and its applications* (Russian). Traducción en J. Math. Sci. (N.Y.) **89** (1) (1998), 915–932.
- [By2] V. A.Bykovskii. *Density theorems and the mean value of arithmetic functions on short intervals* (Russian). Traducción en J. Math. Sci. **83** (1997), no. 6: 720–730.
- [Ch] F. Chamizo. *Lattice points in bodies of revolution*. Acta. Arith. **85** (1998), 265–277.
- [Ch2] F. Chamizo. *Temas de teoría de números. Seminario Avanzado*. En [www.uam.es/fernando.chamizo/semavanz06/semavanz06.html](http://www.uam.es/fernando.chamizo/semavanz06/semavanz06.html), capítulo 5, 2006.
- [Ch-Cr] F. Chamizo and E. Cristóbal. *The the sphere problem and zeros of the L-functions*. Enviado al Journal Mathematical Society of Japan.
- [Ch-Iw] F. Chamizo and H. Iwaniec. *On the sphere problem*. Rev. Mat. Iberoamericana **11** (1995), no. 2, 417–429.
- [Ch-Cr-Ub] F. Chamizo, E. Cristóbal and A. Ubis. *Visible points in the sphere*. J. Number Theory **126** (2007), 200–211.

- [Ch-Cr-Ub2] F. Chamizo, E. Cristóbal and A. Ubis. *Lattice points in rational ellipsoids*. J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 283–289.
- [Ch] J.-R. Chen. *Improvement on the asymptotic formulas for the lattice points in a region of the three dimensions* (II). Sci. Sinica **12** (1963), 751–764.
- [Ch2] J.-R. Chen. *The lattice-points in a circle*. Sci. Sinica **12** (1963), 633–639.
- [Ch3] J.-R. Chen. *The lattice-points in a circle*. Acta Math. Sinica **13** (1963), 299–313 (Chinese); translation: Chinese Math. **4** (1963), 322–339.
- [Ch-Ku-Os] S.K.K. Choi, A.V. Kumchev and R. Osburn. *On sums of three squares*. Int. J. Number Theory. **1** (2005), 161–173.
- [Ci] B.A. Cipra. *On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms*. Nagoya Math. J. **91** (1983), 49–117.
- [Con-Iw] J.B. Conrey and H. Iwaniec. *The cubic moment of central values of automorphic L-functions*. Ann. of Math. (2) **151** (2000), 1175–1216.
- [Dav] H. Davenport. *Multiplicative number theory*, 2nd ed., revised by Hugh L. Montgomery. Graduate texts in mathematics 74, Springer-Verlag, 1980.
- [De] P. Deligne. *La conjecture de Weil, I*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1972), 206–226.
- [De-Se] P. Deligne and J-P. Serre. *Formes modulaires de poids*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530.
- [Di] P.G.L. Dirichlet. *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*. Abhandl. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. (1837), 45–81 [in Werke I, G. Reimer, Berlin 1889, 313–342]
- [Du] W. Duke. *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*. Invent. Math. **92** (1988), 73–90.
- [Du-Sc] W. Duke and R. Schulze-Pillot. *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids*. Invent. Math. **99** (1990), 49–57.
- [El] W.J. Ellison. *Les nombres premiers*, en collaboration avec Michel Mendès France. Hermann, Paris, 1975.
- [Fr] F. Fricker. *Eigenführung die Gitterpunkteleher*. Birkhauser Verlag, 1982.

- [Ga] C. F. Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Go-Ho] D. Goldfeld and J. Hoffstein. *Eisenstein series of  $1/2$ -integral weight and the mean value of real Dirichlet  $L$ -series*. *Invent. Math.* **80** (1985), 185–208.
- [Gö] F. Götze. *Lattice point problems and values of quadratic forms*. *Invent. Math.* **157** (2004), 196–226.
- [Gr-Ko] S. W. Graham and G. Kolesnik. *Van der Corput's method of exponential sums*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 126. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Gr] E. Grosswald. *Representation of Integers as sums of squares*. Springer Verlag, 1985.
- [Han] Hanke, J. *Some recent results about (ternary) quadratic forms*. Number theory, CRM Proc. Lecture Notes. **36** (2004), 147–164, Amer. Math. Soc, Providence, 2004.
- [Har] G.H. Hardy. *On the expression of a number as the sum of two squares*. *Quart. J. Math.* **46** (1915), 357–430.
- [Har2] G.H. Hardy. *On Dirichlet's divisor problem*. *Proc. London Math. Soc. (2)* **15** (1916), 96–115.
- [Har-Li] G.H. Hardy and J.E. Littlewood. *Some problems of 'Partitio Numerorum' III. On the Expression of a Number as a Sum of Primes*. *Acta Arith.* **44** (1922), 1–70.
- [HB] D.R. Heath-Brown. *A mean value estimate for real character sums*. *Acta Arith.* **72** (1995), 1–25.
- [HB2] D. R. Heath-Brown. *Lattice points in the sphere*. Number theory in progress. Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), 883–892, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [Hl] E. Hlawka. *Ueber Integrale auf konvexen Körpern I*. *Monatsh. Math.* **54** (1950), 81–99.
- [Hua] L.-K. Hua. *The lattice points in a circle*. *Quart. J. Math; Oxford Ser.* (**13**) (1942), 18–29.
- [Hu] M. N. Huxley. *Exponential sums and lattice points II*. *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), 279–301.
- [Hu2] M. N. Huxley. *Exponential sums and the Riemann zeta-function IV*. *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), 1–40.
- [Hu3] M. N. Huxley. *Exponential sums and lattice points III*. *Proc. London Math. Soc. (3)* **87** (2003), 591–609.

- [Hu4] M. N. Huxley. *Exponential sums and the Riemann zeta-function V*. Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), 1–41.
- [Hu-Ko] M. N. Huxley and G. Kolesnik. *Exponential sums and the Riemann zeta-function III*. Proc. London Math. Soc. (3) **62** (1991), 449–458, corrigenda, ibid **66** (1993) 302.
- [Hu-Wa] M. N. Huxley and N. Watts. *Exponential sums and the Riemann zeta-function*. Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988), 1–24.
- [Hu-Wa2] M. N. Huxley and N. Watts. *Exponential sums with a parameter*. Proc. London Math. Soc. (3) **59** (1989), 233–252.
- [Iv-Kr-Kü-No] A. Ivić, E. Krätzel, M. Kühleitner and W.G. Nowak. *Lattice points in large regions and related arithmetic functions: Recent developments in a very classic topic*. Arxiv. Math. **1** (2004).
- [Iw] H. Iwaniec. *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight*. Invent. Math. **87** (1987), 385–401.
- [Iw2] H. Iwaniec *Topics in Classical Automorphic Forms*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [Iw-Ko] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic Number Theory*, Colloquium Publications, Vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Iw-Mo] H. Iwaniec and C.J. Mozzochi. *On the divisor and circle problems*. J. Number Theory **29** (1988), 60–93.
- [Jo] B.W. Jones. *The Arithmetic Theory of Quadratic Forms*, The Mathematical Association of America, Buffalo, 1950.
- [Ko] G. Kolesnik. *On the method of exponent pairs*. Acta Arith. **45** (1985), 115–113.
- [Kr] E. Krätzel. *Lattice points*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London 1988.
- [Kr2] E. Krätzel. *Analytische Funktionen in der Zahlentheorie*, Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2000.
- [Kr-No] E. Krätzel and W.G. Nowak. *Lattice points in large convex bodies*. Monatsh. Math. **112** (1991), 61–72.
- [Kr-No2] E. Krätzel and W.G. Nowak. *Lattice points in large convex bodies II*. Acta. Arith. **62** (1992), 285–295.

- [La1] E. Landau. *Über die Anzahl der Gitterpunkte im gewissen Bereichen*, Math.-Phys, Klasse. (1912), 687–771.
- [La2] E. Landau. *Über die Gitterpunkte in einem Kreise(Erste, zweite Mitteilung)*. Math.-Phys, Klasse. (1915), 148–160, 161–171.
- [La3] E. Landau. *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Math. Zeitschrift **21** (1924), 126–132.
- [La4] E. Landau. *Note on the preceding paper*. Proc. Royal Soc. **106** (1924), 487–488.
- [Mo] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [Mor] B.Z. Moroz. *On the number of primitive lattice points in plane domains*. Monatsh. Math. 99 (1985), 37–43.
- [Mü] W. Müller. *The mean square of Dirichlet series associated with automorphic forms*. Monatsh. Math. 113 (1992), 121–159.
- [Mü2] W. Müller. *Lattice points in large convex bodies*. Monatsh. Math. 128 (2000), 315–330.
- [No] W.G. Nowak. *Lattice points in a circle and divisors in arithmetic progressions*. Manusc. Math. **49** (1984), 195–205.
- [No2] W.G. Nowak. *An  $\Omega_+$ -estimate for the number of lattice points in a sphere*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 73 (1985), 31–40.
- [No3] W.G. Nowak. *On the lattice rest of a convex body in  $\mathbb{R}^s$ . II*. Arch. Math. (Basel) **47** (1986), 232–237.
- [No4] W.G. Nowak. *Primitive lattice points in rational ellipses and related arithmetic functions*. Monatsh. Mat. 106 (1987), 57–62.
- [No5] W.G. Nowak. *Primitive lattice points inside an ellipse*. Czechosl. Math. J. **55** (2005), 519–530.
- [Pa] S. J. Patterson. *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-function*. Cambridge University Press 1988.
- [Ph] E. Phillips. *The zeta-function of Riemann; further developments of Van der Corput's method*. Q. J. Math. 4 (1993), 209–225.

- [Ri] B. Riemann. *Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen GröÖsse*. Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1859, 671–680.
- [Sc-Pi] R. Schulze-Pillot. *Thetareihen positiv definiter quadratischer Formen*. Invent. Math. **75** (1984), 283–299.
- [Se] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [Sh] G. Shimura. *On modular forms of half integral weight*. Ann. of Math. (2) **97** (1973), 440–481.
- [Sie] C.L. Siegel. *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*. Ann. of Math. (2) **36** (1935), 527–606.
- [Si] W. Sierpiński. *O pewnem zagadnieniu z rachunku funcktyi asymptotycznych* (Polish). Prace mat.-fiz. **17** (1906), 77–118.
- [Si2] W. Sierpiński. *O pewnej summie potrónjaj* (Polish). C. Rendus. Soc. Sc. Lettres Varsovie (3) **2** (1909), 117–120.
- [So] K. Soundararajan. *Omega results for the divisor and circle problems*. Intern. Math. Research Notes. **36** (2003), 1987–1998.
- [Sze] G. Szegö. *Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome II: Zahlentheoretische Anwendungen*. Math. Zeitschrift **26** (1926), 388–404.
- [Ti] E. C. Titchmarsh. *The lattice-points in a circle*. Proc. London Math. Soc. **38** (1934) 96–115; Corrigendum 555.
- [Ts] K. M. Tsang. *Counting lattice points in the sphere*. Bull. London Math. Soc. **32** (2000) 679–688.
- [vdC] J. G. van der Corput. *Neue zahlentheoretische Abschätzungen*. Math. Ann. **89** (1923) 215–254.
- [Vi] I.M. Vinogradov. *On the number of lattice points in a sphere* (in Russian). Trudy Mat. Steklov Akad. Nauk SSSR **9** (1935), 17–38.
- [Vi2] I.M. Vinogradov. *Representation of an odd number as a sum of three primes*. Dokl. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **15** (1937), 291–294.
- [Vi3] I.M. Vinogradov. *On the number of integer points in a sphere*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **27** (1963), 957–968.



- [Wa] A. Walfisz. *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*. Math. Zeitschrift **19** (1924) 300–307.
- [Wa2] A. Walfisz. *Teilerprobleme*. Math. Zeitschrift **26** n°1 (1927), 66–88.
- [Wa3] A. Walfisz. *Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden*. Math. Zeitschrift **72** (1960) 259–278.
- [Wat] N. Watts. *Exponential sums and the Riemann zeta-function II*. J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), 385–404.
- [Wu] J. Wu. *On the primitive circle problem*. Monatsh. Math. **135** (2002), 69–81.
- [Zh-Ca] W. Zhai and X. Cao. *On the number of coprime integer pairs within a circle*. Acta. Arith. **90** (1999), 1–16.