Universidad Autónoma de Madrid
Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

Problemas críticos y supercríticos de reacción-difusión

Juan Antonio Aguilar Crespo

Director: Ireneo Peral Alonso

Trabajo realizado dentro del proyecto PB94-0187

Índice

Notaciones **3**

Introducción **5**

0.1 Presentación 5
0.2 Descripción del contenido 7
0.2.1 Problemas Elípticos 7
0.2.2 Problemas Parabólicos 12

1 Problemas elípticos con crecimiento exponencial **15**

1.1 Introducción 15
1.2 Existencia de solución para λ pequeño 17
1.3 Condición suficiente para la existencia de solución positiva 19
1.4 $V \geq 0$ y $1 < p < N$: solución minimal 21
1.5 V cambiando de signo y $p \geq N$ 28
1.6 Resultados de no existencia 32
1.7 Análisis de soluciones radiales positivas en la bola unidad 34
1.8 Observaciones sobre el problema de evolución asociado 37
1.9 Apéndice: aislamiento del primer autovalor de $-\Delta_p$ 38

2 Explosión para un problema elíptico crítico con crecimiento exponencial **41**

2.1 Introducción 41
2.2 Estimaciones a priori para soluciones de entropía 43
2.3 Resultados previos al teorema de explosión: acotación de soluciones 48
2.4 Teorema de explosión 54
2.5 Apéndice: soluciones de entropía con condición de borde no homogénea 59

3 Problemas elípticos supercríticos con crecimiento potencial **65**

3.1 Introducción 65
3.2 Resultados de ordenación y de no existencia de soluciones 67
3.3 Problema radial en $\mathbb{R}^N$: análisis del espacio de fases 69
3.4 Un teorema para soluciones regulares del problema radial 76
3.5 Resultados para el problema con potencial $|x|^l$, $l > -p$ 84

3.6 Observaciones sobre el problema de evolución asociado . . . 85
3.7 Apéndice: linealización del sistema autónomo . . . 86

4 Problemas parabólicos críticos **89**
4.1 Introducción . . . 89
4.2 Una solución autosemejante al problema de Cauchy para $p < 2$ . . . 90
4.3 Los problemas truncados y resultados de compacidad . . . 93
4.4 Resultados de existencia para el problema de Cauchy . . . 96
4.4.1 Resultados de existencia para $\lambda < \lambda_{N,p}$, $1 < p < N$ . . . 96
4.4.2 Resultados de existencia para $\lambda > 0$, $1 < p < 2N/(N+1)$ . . . 97
4.4.3 Soluciones acotadas de los problemas truncados si $1 < p < 2$ . . . 101
4.5 Extinción en tiempo finito . . . 101
4.5.1 Resultados de extinción . . . 101
4.5.2 Resultados de no extinción . . . 105
4.6 Resultados adicionales . . . 108
4.6.1 Existencia global con dato inicial no acotado . . . 108
4.6.2 Algunas notas sobre unicidad . . . 110
4.6.3 Extinción en tiempo finito . . . 112
4.7 Apéndice: enunciado del Teorema de Boccardo-Murat . . . 113

Bibliografía y referencias **115**

Agradecimientos **121**

NOTACIONES

Notaciones generales

Símbolo	Significado
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elemento de $I\!R^N$
$r = \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2)^{1/2}$	Módulo de x
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradiente de u
$\Delta_p u = \mathrm{div}\,(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p-Laplaciano de u
p'	Exponente conjugado de p, $1/p + 1/p' = 1$
$p^* = Np/(N-p)$	Exponente crítico de Sobolev
$\Omega \subset I\!R^N$	Dominio acotado con frontera lisa
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
$\|A\|$	Medida de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
χ_A	Función característica del conjunto A
$\|\| \cdot \|\|_s$	Norma en el espacio $L^s(\Omega)$
$\|\| \cdot \|\|_E$	Norma en el espacio E
B_R	Bola en $I\!R^N$ de radio R centrada en el origen
$B_R(x_0)$	Bola en $I\!R^N$ de radio R centrada en $x_0 \in I\!R^N$
C_N	Medida de la esfera unidad en $I\!R^N$
E'	Espacio dual de E
$\langle , \rangle$	Producto escalar en $I\!R^N$ / dualidad E, E'
δ_x	Delta de Dirac soportada en $x \in I\!R^N$
$T_k(s) = \begin{cases} s & \|s\| \le k \\ k\dfrac{s}{\|s\|} & \|s\| > k \end{cases}$	Función truncamiento
$\Phi_u(k) = \|\{x \in \Omega : \|u(x)\| > k\}\|$	Función de distribución de u
$c.t.p.$	Casi todo punto
V^+	Parte positiva de la función V, i.e. $V^+ = \max(V, 0)$
V^-	Parte negativa de la función V, i.e. $V^- = \max(-V, 0)$

Espacios funcionales

Símbolo	Significado
$\mathcal{C}(\Omega)$	Funciones continuas en Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Funciones continuas en Ω con soporte compacto
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Funciones Hölder continuas en Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Funciones de clase k en Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Funciones Hölder continuas de clase k en Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ con soporte compacto
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Funciones indefinidamente diferenciables en Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con soporte compacto
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ no negativas
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espacio dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o espacio de las distribuciones
$L^p(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω, $\int\limits_\Omega \|u\|^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω y existe C tal que $\|u(x)\| \le C$ c.t.p. en Ω $\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espacio dual de $L^p(\Omega)$
$W^{1,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev con traza cero
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$L^1(\log L)^\beta(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω, $\int\limits_\Omega \|u\|(\log(1+\|u\|))^\beta \, dx < \infty\}$, $1 \le \beta < \infty$
$\mathcal{M}^s(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω, $\|\{\|u(x)\| > h\}\| \le C_1 h^{-s}\}$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espacio de las medidas de Radon en Ω
$\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω, $T_k u \in W^{1,N}(\Omega)\}$
$\mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$	$\{u$ medible en Ω, $T_k u \in W_0^{1,N}(\Omega)\}$
$L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$	$\{u$ medible en $\Omega \times (0,T)$, $\int_0^T \int\limits_\Omega \|\nabla u(x,t)\|^p \, dxdt < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
$L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$	Espacio dual de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$
$C([0,1];W_0^{1,p}(\Omega))$	Funciones continuas de $[0,1]$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

Introducción

0.1 Presentación

Se reúne en esta Memoria [1] el producto del trabajo de investigación realizado durante los últimos cuatro años con el objeto de que constituya una Tesis Doctoral a presentar en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid.

Tal vez el hilo conductor de todo este trabajo sea la noción de *problema crítico* y *supercrítico*, si bien, como se verá en cada caso, la palabra crítico tiene un significado concreto diferente. Es decir, se estudian distintos problemas cuyo punto común es que están en el *límite de aplicación* de alguna propiedad.

En los tres primeros capítulos de esta Memoria se estudian algunos problemas elípticos en los que el concepto de *problema crítico* tiene que ver con el comportamiento de los términos de orden cero, respecto a la inclusión de Sobolev (si $1 < p < N$ el exponente crítico de Sobolev es $p^* = Np/(N-p)$, si $p \geq N$, $p^* = \infty$).

Más precisamente, se consideran problemas quasilineales de la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u & \equiv & -\mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|) = \lambda V(x) f(u) \quad \text{ en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

donde $p > 1$, $\lambda > 0$, Ω es un dominio acotado de $I\!R^N$ con frontera regular, $V(x)$ es una función bajo hipótesis de integrabilidad que serán precisadas en cada caso y $f(u)$ es una función no lineal satisfaciendo hipótesis que se detallarán en cada caso.

Sea $1 < p < N$. Se dice que f es **subcrítica en infinito** si

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{p^*-1}} = 0, \tag{0.2}$$

Se dice que f es **subcrítica en cero** si

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u^{p^*-1}} = \infty. \tag{0.3}$$

Si los límites anteriores son finitos y distintos de cero se dice que f tiene comportamiento **crítico**, y si tienen un comportamiento simétrico al subcrítico en 0 e infinito, es decir, si

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^{p^*-1}} = \infty, \tag{0.4}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u^{p^*-1}} = 0, \tag{0.5}$$

se dice que f tiene comportamiento **supercrítico en infinito** y **supercrítico en cero** respectivamente (véase [**14**] para una discusión de estos conceptos). El caso $p = N$ es distinto e involucra la desigualdad de Moser-Trudinger (véase [**52**]).

[1] En las páginas 3 y 4 se presenta una relación de la notación más usada en la Memoria.

Este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiado para $p = 2$ en muchos contextos de la Matemática Pura y Aplicada: por ejemplo, en Geometría Riemanniana aparece en el problema de Yamabe (véase [**87**]); otras referencias relacionadas con este contexto son [**35**] y [**72**]. En Astrofísica aparece también (véase [**34**] por ejemplo). Si la no linealidad f es de tipo exponencial, se tiene entonces el modelo de Frank-Kamenetstkii para la ignición de sólidos (véase [**42**]). También aparece el problema tipo (0.1) en modelos en Mecánica de Fluidos, en Física de Plasmas y en problemas relacionados con fenómenos estacionarios de reacción-difusión (veánse los ejemplos en [**8**] y [**43**]).

En general, y este es uno de los puntos de interés en las aplicaciones, estos problemas se pueden ver también como una descripción de los estados estacionarios asociados a las ecuaciones de evolución con difusión no lineal. Es decir,

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u &=& \lambda V(x) f(u), & x \in \Omega \subset I\!\!R^N,\ t > 0, \\ u(x,0) &=& u_0(x), & \\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{0.6}$$

donde Ω es un dominio, acotado o no, y V y f son como antes.

En los problemas *autónomos*, es decir, con $V(x) = c$ constante, el crecimiento del segundo miembro es importante para obtener la explosión de las soluciones de los problemas de evolución, pero es claramente insuficiente para concluir otras propiedades, tales como la existencia global o la estabilidad de los estados de equilibrio. Para este tipo de resultados es necesario comprender más profundamente el comportamiento del problema elíptico asociado, el cual depende del crecimiento y también de otras propiedades del segundo miembro, como por ejemplo su forma. Cambios en la forma implican cambios radicales en el comportamiento de las soluciones, tanto en el caso estacionario como en el problema de evolución. En este sentido, una de las diferencias en la forma que es relevante si $p = 2$ es la concavidad o convexidad de la no linealidad f, y si $f(0) = 0$ o no. Si $p \neq 2$, la concavidad y convexidad se sustituyen por los siguientes conceptos de ser subdifusiva o superdifusiva respectivamente. Se dirá que f es **subdifusiva** (respectivamente **superdifusiva**) cuando $u \to a$, donde $a = 0$ ó $a = \infty$, si se verifica:

$$\lim_{u \to a} \frac{f(u)}{u^{q-1}} = c_1 \quad \text{para algún } q, \quad 1 < q < p \text{ (respectivamente } p < q).$$

Cuando $V(x)$ es una función no constante, el comportamiento global de las soluciones del problema (0.6) es más sutil. En este caso, se entenderá como subcrítico el problema, si $V(x) \in L^r(\Omega)$ para algún $r > N/p$, exponente que corresponde a la teoría clásica de existencia, unicidad, y regularidad si $f(u)$ tiene el crecimiento adecuado (véanse [**39**] y [**64**]).

Así, en este contexto, *problema crítico* significará que $V(x) \in L^r$ con $1 \leq r < N/p$.

Se verá que varios problemas parabólicos críticos aparecen de forma natural y este hecho mostrará la profunda conexión entre los problemas elípticos que se estudian en los tres primeros capítulos y los problemas parabólicos que se estudian en el cuarto.

En esta Memoria se reúnen varios resultados originales relativos a los problemas (0.1) y (0.6) que se describen a continuación en esta Introducción y se estudiarán en detalle en los siguientes Capítulos.

0.2 Descripción del contenido

0.2.1 Problemas Elípticos

Como es bien sabido, si se estudian problemas subcríticos o críticos es posible encontrar soluciones variacionalmente pues hay un funcional de energía bien definido en el correspondiente espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si se tratan problemas supercríticos un planteamiento variacional *directo* no es posible. Por esta razón, es necesario precisar lo que significará ser solución del problema en cada caso.

Definición 0.2.1 *(a) Se dice que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es una* **solución débil** *de (0.1) si y sólamente si* $V(x)f(u) \in W^{-1,p'}(\Omega)$*, y la ecuación se verifica en el sentido de* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

(b) Se dice que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es* **solución regular** *si además* $u \in L^\infty(\Omega)$ *y se verifica la ecuación en* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

En la literatura sobre problemas supercríticos es habitual encontrar la siguiente definición:

Definición 0.2.2 *Se dice que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *es* **solución singular** *de (0.1) si* $V(x)f(u) \in L^1(\Omega)$ *y verifica la ecuación en el sentido de* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Con esta última definición se quiere hacer notar el hecho de que $V(x)f(u) \in L^1(\Omega)$, pero es obvio por un argumento de densidad que toda *solución singular* es una *solución débil*; en toda la Memoria el concepto de solución singular será el de la Definición 0.2.2, es decir, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Una vez precisados los conceptos de solución que se van a emplear, se presentan los distintos resultados originales obtenidos para cada uno de los problemas estudiados.

En el **Capítulo 1** se considerará el problema de Dirichlet con dato cero para el Problema (0.1) donde se supondrá

$$f(u) = \exp(u),$$

por tanto, se trata de una no linealidad convexa como función de u y el problema, en el caso $V = 1$, es subcrítico o supercrítico si $p \geq N$ o $p < N$ respectivamente (véase **[3]** y las referencias allí contenidas).

El término exponencial aparece en modelos asociados a reacciones químicas, cuya velocidad de reacción sigue la ley de Arrhenius; si se supone que la difusión es proporcional a una potencia del gradiente se obtiene el problema anterior. Con V constante este problema ha sido ampliamente estudiado (véanse **[16]**, **[34]**, **[42]**, **[45]**, **[46]**, **[48]**, **[50]**, **[51]**, **[60]**, **[61]**, **[70]** y **[71]**).

En este Capítulo de la Memoria se estudian diversos problemas según las propiedades del potencial V. Más concretamente se obtienen los resultados siguientes:

Teorema. Sea el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda V(x) e^u \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N,\ N \geq 2, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{cases}$$

donde $p > 1$, $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ un dominio acotado, y $V(x) \in L^q(\Omega)$ es una función dada que puede cambiar de signo en Ω. Se verifica:

(a) Si λ es suficientemente pequeño, entonces existe al menos una solución al problema para $q > N/p > 1$, y existen al menos dos soluciones al problema para $p \geq N$.

(b) Se halla una condición suficiente que asegura la existencia de soluciones positivas del problema con V cambiando de signo en Ω (resultado no considerado en la literatura incluso en el caso semilineal $p = 2$).

(c) Si λ es suficientemente grande y $V \geq 0$, entonces el problema no tiene solución. Además el conjunto de λ para los cuales el problema tiene al menos una solución, es un intervalo; en adelante se denotará por λ_* el extremo superior de tal intervalo.

(d) Si $V(x) \in L^q(\Omega)$, $q > N/p > 1$, y $\lambda_n \nearrow \lambda_*$ entonces existe una sucesión de soluciones $\{u_n\}$ regulares correspondientes a λ_n tales que se verifica:

(i) Si $N \geq pq(3+p)/(4+q(p-1))$, $\lim_{n\to\infty} u_n = u_*$ es una solución singular correspondiente a λ_*.

(ii) Si $N < pq(3+p)/(4+q(p-1))$, $\lim_{n\to\infty} u_n = u_* \in L^\infty$, solución regular correspondiente a λ_*.

(e) Se estudia el caso radial supercrtico ($N > p$) con $V(x) = |x|^l$, $l > -p$, $\Omega = B_1$; existe una única solución radial singular correspondiente a

$$\tilde{\lambda} = (l+p)^{(p-1)}(N-p), \quad S(r) = \log\left(\frac{1}{|x|^{l+p}}\right),$$

y se verifica:

(i) Si $N \geq p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\lambda_* = \tilde{\lambda}$, para cada $\lambda < \lambda_*$ se tiene una única solución regular, $\underline{u}(\lambda)$, y $\lim_{\lambda\to\lambda_*} \underline{u}(\lambda) = S(x)$.

(ii) Si $p < N < p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\tilde{\lambda} < \lambda^*$, y para $\lambda = \tilde{\lambda}$, existen infinitas soluciones radiales regulares, cuyos valores en el origen tienden a infinito, con $\lim_{\lambda\to\lambda^*} \underline{u}(\lambda) = u_* \in L^\infty$.

(Véanse Capítulo 1, Teoremas 1.2.3, 1.3.3, 1.4.6, 1.4.7, 1.5.1, 1.6.1, 1.7.3 y **[3]**).

Para los resultados con $p \geq N$ se utilizan técnicas variacionales, mientras que en el caso $1 < p < N$ se utiliza el método clásico de iteración para construir una solución para λ pequeño. Para la descripción de la rama de soluciones en el caso supercrítico radial, un cambio de variables permite pasar a estudiar un sistema autónomo no lineal, usando un plano de fases conveniente.

En el **Capítulo 2** se describe la *pérdida de compacidad* de sucesiones u_k de soluciones singulares de

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \quad \text{en } \Omega,$$

donde Ω es un dominio acotado, y para algún $1 < q \leq \infty$, se verifica:

$$\begin{aligned} V_k &\geq 0 \text{ en } \Omega, \\ ||V_k||_q &\leq C_1, \\ ||e^{u_k}||_{q'} &\leq C_2, \end{aligned}$$

cuyo precedente en el caso $N = 2$ es debido a Brezis y Merle (véase **[30]**). Como se ve, será necesario estimar soluciones de problemas con el segundo miembro en L^1.

Sea el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_N u &=& f \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} &=& g, \end{array} \right. \tag{0.7}$$

donde se supone que $f \in L^1$, Ω es un dominio acotado con frontera regular y el dato g tiene regularidad suficiente de forma que si $u \in \mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$ se tiene que $u - \varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$, siendo $\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles tal que todos sus truncamientos verifican $T_k(u) \in W^{1,N}(\Omega)$, y φ una extensión conveniente del dato g (véase el apéndice del Capítulo 2 para la definición precisa del operador truncamiento y de φ) denotando como $\mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ la compleción de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$.

El tratamiento variacional de este tipo de problemas no es posible; la estrategia que se sigue es truncar los datos, es decir, resolver el problema con $T_k(f)$ y $T_k(g)$ e intentar pasar al límite en un espacio conveniente de forma que el límite sea al menos solución en sentido de distribuciones; tal espacio es $\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$. Este tipo de teoría ha sido desarrollada en los últimos años, y algunas referencias son: **[15]**, **[20]**, **[24]**, **[25]** y las referencias contenidas en ellas (véase también **[26]**).

Siguiendo las ideas en **[20]** se tiene la siguiente

Definición 0.2.3 *Se dice que $u \in \mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$ es una* **solución de entropía** *del problema (0.7) si:*

1. $u - \varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$.
2. $\int\limits_\Omega |\nabla u|^{N-2}\langle \nabla u, \nabla \psi\rangle = \int\limits_\Omega f\psi dx$, *para toda* $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
3. *Se verifica*

$$\int_{\{|u-\varphi-\psi|\le k\}} \langle D_N(\nabla u, \nabla\varphi),\, \nabla(u-\varphi-\psi)\rangle\, dx \le \int\limits_\Omega T_k(u-\varphi-\psi) f dx, \;\; k>0, \tag{0.8}$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde $D_N(\xi,\eta) = |\xi|^{N-2}\xi - |\eta|^{N-2}\eta$, con ξ, $\eta \in I\!R^N$.

La condición (0.8) se llamará *condición de entropía* siguiendo la nomenclatura acuñada en **[20]**, donde se demuestra que la condición de entropía determina la clase en la que se verifica la unicidad de soluciones.

Para este tipo de soluciones se obtiene el siguiente resultado:

Teorema. Sea u solución de entropía del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_N u &=& f \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} &=& 0, \end{array} \right. \tag{0.9}$$

donde $N \ge 2$ y $f \in L^1(\Omega)$. Entonces,

$$\int\limits_\Omega \exp\left[\frac{(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)|u(x)|}{||f||_1^{1/(N-1)}}\right] dx \le \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|\Omega| \qquad \forall \delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)}), \tag{0.10}$$

C_N denotando la medida de la esfera unidad en $I\!R^N$ (véase el Capítulo 2 y **[2]**).

El resultado fundamental del Capítulo 2 es el siguiente:

Teorema. Si u_k es una sucesión de soluciones de

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \quad \text{en } \Omega,$$

donde Ω es un dominio acotado, y para algún q, $1 < q \leq \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, se verifica:

$$\begin{array}{rcl} V_k & \geq & 0 \text{ en } \Omega, \\ ||V_k||_q & \leq & C_1, \\ ||e^{u_k}||_{q'} & \leq & C_2, \end{array}$$

entonces, existe una subsucesión u_{k_l} verificando una de las tres alternativas siguientes:

(i) u_{k_l} está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

(ii) $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

(iii) El conjunto de explosión $\mathcal{S}$ relativo a la subsucesión u_{k_l} definido como

$$\mathcal{S} = \{x \in \Omega : \text{ existe una sucesión } x_{k_l} \in \Omega \text{ tal que } x_{k_l} \to x \text{ y } u_{k_l}(x_{k_l}) \to \infty\}$$

es finito, no vacío y $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Además, en el caso (iii) la sucesión $V_{k_l} e^{u_{k_l}}$ converge en el sentido de las medidas a $\Sigma \alpha_i \delta_{a_i}$ donde $\mathcal{S} = \cup \{a_i\}$ y $\alpha_i \geq C_N (N/q')^{N-1}$.
(véanse Capítulo 2, Teorema 2.1.2 y **[4]**).

En el **Capítulo 3** se estudia el problema supercrítico radial en la bola unidad B_1 para

$$f(u) = \lambda u^{q-1} + u^{\alpha - 1}, \text{ donde } \lambda > 0, \text{ y } 1 < q \leq p, \, \alpha > p^*,$$

por tanto, se supone $1 < p < N$.

Este tipo de no linealidades combinación de dos potencias ha sido extensivamente estudiado en los últimos años, principalmente para el caso $p = 2$ y sobre todo el caso crítico, es decir, si $\alpha = \dfrac{2N}{N-2}$. A tal interés contribuyó sin duda el artículo de Brezis y Nirenberg, **[31]**, probando que si al término crítico se le añade una perturbación de la forma λu^{q-1} con $2 \leq q < 2N/(N-2)$ entonces existe solución positiva al menos para algunos $\lambda > 0$ que dependen de la dimensión. Es decir, el resultado de no existencia de Pohozaev (**[76]** y **[77]**) deja de ser cierto cuando se suma una perturbación subcrítica.

Para problemas críticos y subcríticos con no linealidades combinación de dos potencias se citan a título de ejemplo los siguientes trabajos que están relacionados con el problema objeto de estudio del Capítulo 3: **[1]**, **[9]**, **[10]**, **[11]**, **[47]**, **[54]** y el artículo **[74]** y las referencias en él contenidas. El problema supercrítico en dominio general fue estudiado en **[23]** en el caso $1 < q < p$. Obsérvese que el método de sub/supersoluciones no es aplicable al caso $p = q$.

A continuación se discute el caso radial objeto de la investigación llevada a cabo para el problema supercrítico anterior. Los problemas para $q = p$ y para $1 < q < p$ tienen comportamientos distintos: en el primero se tiene una bifurcación desde el primer autovalor, en tanto que si $q > p$ la bifurcación se obtiene desde el origen (véase **[11]**).

Para el problema supercrítico radial en el caso $p = 2 = q$ se tienen los resultados de Budd en **[32]**, estudiando el comportamiento global de la rama de soluciones positivas, y Merle y Peletier **[69]** que estudian la existencia y comportamiento de la solución singular. En el caso del *p-Laplaciano* la bifurcación desde el primer autovalor puede verse en **[38]** en el caso $q = p$; el caso $q < p$ es estudiado en **[10]**.

En esta Memoria se trata la existencia de solución singular y del comportamiento global de la rama de soluciones positivas.

Concretamente se obtiene el resultado siguiente.

Teorema. Sea el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1} \quad \text{en } B_1, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial B_1, \end{cases}$$

donde B_1 denota la bola unidad en $I\!R^N$, $\lambda > 0$, $1 < q \le p < N$ y $\alpha > p^*$. Se define $\overline{\alpha}$ como sigue

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} p + \dfrac{p^2}{N - 2 - p - 2(\frac{N-1}{p-1})^{1/2}}, & N > p + \dfrac{4p}{p-1}, \\ \infty, & N \le p + \dfrac{4p}{p-1}. \end{cases}$$

Entonces:

(a) Existe un valor $\lambda_* < \infty$ tal que este problema tiene una solución radial singular S.

(b) Si w_j denota una sucesión de soluciones radiales regulares del problema correspondientes a λ_j, tales que $||w_j||_\infty \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces $\lambda_j \to \lambda_*$.

(c) Si $\alpha < \overline{\alpha}$, entonces existe una sucesión de soluciones radiales regulares w_j del problema tal que $\lambda_j = \lambda_*$ y $w_j(0) \to \infty$ cuando $j \to \infty$.

(d) Si $\alpha \ge \overline{\alpha}$, entonces, para cualquier sucesión w_j de soluciones radiales regulares del problema con $w_j(0) \nearrow \infty$ cuando $j \to \infty$, se tiene $\lambda_j \to \lambda_*$ de forma monótona para $j \ge j_0$ suficientemente grande.

(e) Si w_j denota una sucesión de soluciones radiales regulares del problema correspondientes a λ_j, tales que $||w_j||_\infty \to \infty$ cuando $j \to \infty$, y S es como en (a), entonces $w_j \to S$ cuando $j \to \infty$ uniformemente sobre conjuntos compactos que no contienen el origen; además, $w_j \to S$ en $L^\beta(B_1)$ y en $W_0^{1,p}(B_1)$ con $\beta < N(\alpha - p)/p$.

(f) Resultados análogos se obtienen para el problema con potencial $|x|^l$, $l > -p$, es decir,

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= |x|^l(\lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1}) \quad \text{en } B_1, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial B_1. \end{cases}$$

En este caso

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} p + \dfrac{p(l+p)}{N-p-2\frac{l+p}{p} - \frac{2}{p}((l+p)(l+p\frac{N-1}{p-1}))^{1/2}}, & N > p + 4\dfrac{l+p}{p-1}, \\ \infty, & N \leq p + 4\dfrac{l+p}{p-1}. \end{cases}$$

Obsérvese que la influencia de la dimensión en el comportamiento de las soluciones depende del mismo valor que aparecía en el apartado (e) de la enumeración anterior de los resultados contenidos en el Capítulo 1.

(Véanse Capítulo 3, Teoremas 3.1.1, 3.1.2 y **[5]**).

0.2.2 Problemas Parabólicos

El estudio de los problemas parabólicos en esta Memoria se centra fundamentalmente en el siguiente,

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \dfrac{\lambda}{| x |^p}|u|^{p-2}u, & x \in \Omega,\ t > 0,\ \lambda \in I\!R, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) &= 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{0.11}$$

con $u_0(x) \geq 0$ verificando condiciones de regularidad que se precisarán en cada caso. Se supone que Ω es un dominio acotado con frontera regular, o bien $\Omega = I\!R^N$, y $1 < p < N$.

En los problemas elípticos supercríticos estudiados en los Capítulos 1 y 3 se obtienen soluciones radiales singulares. Por ejemplo, si se considera en la bola unidad de $I\!R^N$, $N > 2 = p$,

$$u_t - \Delta u = \lambda e^u,$$

una solución radial singular estacionaria para $\lambda_N = 4/(N-2)^2$ es

$$S(x) = \log\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Definiendo $v = S - u$ se tiene

$$v_t - \Delta v = \lambda_N(e^S - e^u) = \frac{\lambda_N}{|x|^2}(1 - e^{-v}),$$

y por linealización, resulta

$$W_t - \Delta W = \frac{\lambda_N}{|x|^2}W$$

(Véase **[75]**).

Algo análogo resulta para la solución singular de los problemas

$$u_t - \Delta u = \lambda u + u^{\alpha-1}, \qquad \text{donde } \frac{2N}{N-2} < \alpha.$$

La ecuación lineal resultante es un caso *crítico* en el sentido que el potencial $\lambda/|x|^2$ pertenece a L^r_{loc} si y solo si $1 \le r < N/2$; la teoría de unicidad y regularidad no es aplicable en este caso. Esta ecuación lineal fue estudiada por Baras y Golsdtein, **[17]**, obteniendo el siguiente resultado.

TEOREMA. (*Baras-Goldstein*). *Se considera el problema de valor inicial con datos Dirichlet*

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u &=& \dfrac{\lambda}{|x|^2}u, & x \in \Omega \subset I\!R^N, \quad N \ge 3,\, t>0,\, \lambda \in I\!R,\\ u(x,0) &=& u_0(x), & x \in \Omega, \quad f \in L^2,\\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t>0, \end{array}\right. \tag{0.12}$$

donde Ω *es un dominio verificando que* $0 \in \Omega$*. Entonces existe* λ_N *de forma que,*
i) Si $\lambda \le \lambda_N^{-1}$*, el problema (0.12) tiene solución global.*
ii) Si $\lambda > \lambda_N^{-1}$ *el problema (0.12) no tiene solución local si* $f > 0$*.*

En **[75]** este resultado se relaciona con una clásica desigualdad de Hardy en $W^{1,2}(\Omega)$; tal desigualdad es extensible a $W_0^{1,p}(\Omega)$ por lo que parece natural intentar obtener el resultado de Baras-Goldstein para el problema (0.11). En **[49]** se estudió el problema (0.11) en dominios acotados obteniéndose cierta similitud con el caso lineal si $p > 2$, pero notables diferencias si $1 < p < 2$. En esta Memoria se estudia el problema de Cauchy y se profundiza en el caso $1 < p < 2$. Más concretamente, los resultados que se obtienen son los siguientes.

Teorema. Sea el problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u &=& \lambda\dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, & x \in I\!R^N,\, t>0,\\ u(x,0) &=& u_0(x) \ge 0 & \end{array}\right.$$

donde $1 < p < N$ y $\lambda > 0$, entonces:

(a) Existe una solución autosemejante S para $1 < p < 2N/N+1$, con $u_0 \equiv 0$ si $\lambda > \mu_{N,p}$ constante optimal, donde
$$\mu_{N,p} = (p/(2-p))^{p-1}(N - p/(2-p)).$$

(b) Si $1 < p < N$, $0 < \lambda < \lambda_{N,p} = ((N-p)/p)^p$ y $u_0 \in L^2(B)$, entonces existe una solución global del problema. Aquí $\lambda_{N,p}$ es la inversa de la mejor constante en la desigualdad de Hardy.

(c) Si $1 < p < 2N/(N+1)$, $\lambda > \mu_{N,p}$ y $u_0 \in L^2(B)$, entonces existe una solución del problema en sentido de distribuciones, donde B es una bola en $I\!R^N$.

(d) Si $1 < p < 2N/(N+2)$, $0 < \lambda < \mu_{N,p}$ y $u_0 \in L^2(I\!R^N) \cap L^s(I\!R^N)$, existe un tiempo finito de extinción $T^\star$ (dependiente solo de N, p, λ y $||u_0||_s$) para la solución del problema hallada en (a), $s = N(2-p)/p$.

(e) Si $1 < p < 2$, $\lambda > \lambda_{N,p}$, no puede haber extinción en tiempo finito para las soluciones del problema; por otra parte, si $1 < p < 2N/(N+1)$, $\mu_{N,p} < \lambda$, entonces se puede hallar una solución del problema que no se extingue en tiempo finito.

Al final del Capítulo 4 se presentan algunos resultados relacionados para potenciales no homogéneos y no linealidades más generales (véanse Capítulo 4, Teoremas 4.4.1, 4.4.3, 4.5.6, 4.5.8, 4.5.10 y **[6]**).

Hay que hacer hincapié en el apartado (d); cuando $p < 2$ se tiene un problema singular en el sentido que el exponente de $|\nabla u|^{p-2}$ es negativo. En la literatura se recoge esta situación diciendo que se trata de *difusión rápida.*

Este hecho motiva que si $\lambda = 0$ se tenga tiempo de extinción finito para el problema de Dirichlet si $1 < p < 2$ y para el problema de Cauchy en todo $I\!R^N$ si $1 < p < 2N/(N+1)$ (véanse **[40]**, **[59]**). Tomando $\lambda > 0$ en los rangos del Teorema anterior, se ve que hay unos valores pequeños para los que la reacción no es suficiente para evitar la extinción y que al sobrepasar el valor crítico $\mu_{N,p}$, la reacción pasa a ser dominante sobre la difusión rápida.

Por otra parte, la explosión en L^∞ es cierta para todo p. El problema para $\lambda > \lambda_{Np}$ empeora a medida que p crece hacia 2. Además, para $p > 2N/(N+1)$, la solución autosemejante deja de estar en L^1, es decir, no se puede decir que satisfaga dato inicial cero en ningún sentido, aunque verifique la ecuación en todo punto fuera del eje tiempo.

A continuación se desarrolla el contenido de la Memoria, detallando la obtención de los resultados anteriormente citados.

Capítulo 1

Problemas elípticos con crecimiento exponencial

1.1 Introducción

En este capítulo se considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda V(x) e^u \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N,\ N \geq 2, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $p > 1$, $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ un dominio acotado, y $V(x)$ es una función dada que *puede cambiar de signo* en Ω.

El caso $V \equiv$ constante ha sido estudiado en **[48]** y **[50]** para p general. El caso semilineal $p = 2$, con V constante también, ha sido ampliamente estudiado; véanse por ejemplo las referencias **[16]**, **[45]**, **[46]**, **[51]**, **[60]**, **[70]** y **[71]**. Diferentes motivaciones para este modelo en el caso $p = 2$ se pueden hallar en **[34]**, **[42]** y **[61]**.

Por otra parte, el caso $p = 2$ y V una función dada tiene algunos precedentes, véanse **[30]** y **[61]** para $N = 2$, o **[37]** para $N \geq 3$ en todo $I\!R^N$. En este capítulo se consideran casos más generales.

Los conceptos de solución que se emplearán serán los de solución regular y singular (véase la introducción de esta Memoria). Hay que notar que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p > N$, el *teorema de Morrey* (véase **[52]**, Cap. 7) implica que $e^u \in L^\infty(\Omega)$. Por otra parte, usando el *lema de De Giorgi-Stampacchia* **[83]** y la *desigualdad de Trudinger* (**[52]**, p. 162) se obtiene que una solución de (1.1) para $p = N$, $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, verifica $u \in L^\infty(\Omega)$ siempre y cuando la función V pertenezca a $L^q(\Omega)$, $q > 1$. En otras palabras, se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.1.1 *Si $V \in L^q(\Omega)$, con $q \geq 1$, $p > N$ ó $q > 1$, $p = N$, entonces toda solución singular de (1.1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es a la vez solución regular de (1.1).*

Los resultados más importantes obtenidos en este capítulo para el problema (1.1) con $V \in L^q(\Omega)$, donde $q \geq 1$ para $p > N$, $q > N/p$ para $1 < p \leq N$, son los siguientes:

(a) Si λ es suficientemente pequeño, entonces existe al menos una solución al problema (1.1) para $q > N/p > 1$, y existen al menos dos soluciones al problema (1.1) para $p \geq N$.

(b) Se halla una condición suficiente que asegura la existencia de soluciones positivas de (1.1) con V cambiando de signo en Ω, resultado nuevo incluso para el caso semilineal $p = 2$.

(c) Si λ es suficientemente grande y $V \geq 0$, entonces el problema (1.1) no tiene solución (obviamente, si $V < 0$ entonces el principio del máximo implica que el problema (1.1) tiene una solución negativa). Para ello se utiliza que el primer autovalor para el p-Laplaciano con peso $V \in L^q(\Omega)$, $V(x) \geq 0$, es simple y aislado (véase el apéndice de este capítulo). Además, el conjunto de λ para los cuales el problema tiene al menos una solución, es un intervalo; se denotará por λ_* el extremo superior de este intervalo.

(d) Si $V(x) \geq 0$, $N > p$, y $\lambda_n \nearrow \lambda_*$ entonces existe una sucesión de soluciones $\{u_n\}$ regulares correspondientes a λ_n tales que se verifica:

(i) Si $N \geq pq(3+p)/(4+q(p-1))$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_*$ es una solución singular correspondiente a λ_*.

(ii) Si $N < pq(3+p)/(4+q(p-1))$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_* \in L^\infty$, solución regular correspondiente a λ_*.

(e) Si $V(x) = |x|^l$, $l > -p$, $\Omega = B_1$, entonces existe una única solución radial singular correspondiente a

$$\tilde{\lambda} = (l+p)^{p-1}(N-p), \quad S(r) = \log\left(\frac{1}{|x|^{l+p}}\right),$$

y se verifica:

(i) Si $N \geq p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\lambda_* = \tilde{\lambda}$, para cada $\lambda < \lambda_*$ se tiene una única solución regular, y $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_*} \underline{u}(\lambda) = u_*$ es una solución singular.

(ii) Si $p < N < p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\tilde{\lambda} < \lambda^*$, y para $\lambda = \tilde{\lambda}$, existen infinitas soluciones radiales regulares, cuyos valores en el origen tienden a infinito, con $\lim\limits_{\lambda\to\lambda^*} \underline{u}(\lambda) = u_* \in L^\infty$.

(Véase [**3**])

El capítulo está organizado de la siguiente manera: primero, se prueba mediante un argumento de punto fijo la existencia de solución al problema (1.1) para $V \in L^q(\Omega)$, permitiendo que V pueda cambiar de signo en Ω, obteniendo seguidamente una condición suficiente sobre el signo positivo de la solución cuando V cambia de signo. La siguiente sección se dedica al estudio del comportamiento de la solución minimal para $1 < p < N$, $V \geq 0$ mediante argumentos de comparación; para el caso $p \geq N$ se usan métodos variacionales, permitiendo a V tener signo no constante. Seguidamente, tras tratar la no existencia de soluciones, se analizan las soluciones radiales en la bola unidad de $I\!R^N$ para el caso específico $V(x) = |x|^l$, $l > -p$, y por último, se incluye un apéndice donde se demuestra el aislamiento del primer autovalor para el p-Laplaciano con peso $V \in L^q(\Omega)$, $V(x) \geq 0$.

1.2 Existencia de solución para λ pequeño

En esta sección se prueba la existencia de solución al problema (1.1) mediante un argumento elemental de punto fijo, donde $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ y $V(x)$ es una función dada en $L^q(\Omega)$, $q \geq 1$ si $p > N$, $q > N/p$ si $p \leq N$. Nótese que V *puede cambiar de signo* en Ω.

Lema 1.2.1 *Sea $\mathcal{B}_\delta = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) : |\varphi| < \delta,\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\delta > 0$. Sea $F_\lambda : \mathcal{B}_\delta \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ definida por $\varphi \longrightarrow F_\lambda(\varphi) = \psi$, donde ψ es solución del siguiente problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p \psi & = & \lambda V(x) e^{\varphi} & \text{en } \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} & = & 0. & \end{array} \right.$$

Entonces,

$$||\psi||_\infty \leq C(\lambda e^\delta ||V||_q)^{1/(p-1)}$$

donde $C = C(p, N, \Omega)$.

Demostración. Caso $p > N$. En este caso, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ por el *teorema de Morrey*, y por la *desigualdad de Sobolev* se obtiene la siguiente estimación

$$||\psi||_\infty \leq C(p, N, \Omega)||\nabla\psi||_p \leq C(p, N, \Omega)(\lambda e^\delta ||V||_q)^{1/(p-1)}.$$

Caso $1 < p \leq N$. Ya que φ está acotada, se tiene que $\lambda V(x)e^\varphi$ pertenece a $L^q(\Omega)$, $q > N/p$. Así pues, se puede encontrar $s > N/(p-1)$ tal que $\lambda V(x)e^\varphi$ pertenece a $W^{-1,s}(\Omega)$. Entonces, existen $f_1, f_2, ..., f_N$ en $L^s(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\langle\nabla\psi, \nabla\eta\rangle\, dx = \int_\Omega \langle \mathbf{f}, \nabla\eta\rangle\, dx \qquad \forall \eta \in W_0^{1,s'}(\Omega),$$

donde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)$ y $\lambda V(x)e^\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}$ (véase **[27]**, Prop. IX.20). Para $k > 0$, si se toma como función *test*

$$\eta_k = \operatorname{sign}(\psi)(|\psi| - k)^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \psi - k & \psi \geq k, \\ \psi + k & \psi \leq -k, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{array} \right.$$

entonces $\nabla\eta_k = \nabla\psi$ en $A(k) = \{x \in \Omega : |\psi(x)| > k\}$ y $\eta_k = 0$ en $\Omega \setminus A(k)$. Por tanto, usando la *desigualdad de Hölder*,

$$\int_{A(k)} |\nabla\psi|^p\, dx = \int_{A(k)} \langle \mathbf{f}, \nabla\eta_k\rangle\, dx \leq \left(\int_{A(k)} |\nabla\psi|^p\, dx \right)^{1/p} ||\mathbf{f}||_s |A(k)|^{1-1/p-1/s}.$$

De esta estimación y de la *desigualdad de Sobolev*, se concluye

$$S_p^{1/p} \left(\int_{A(k)} |\psi|^{p^*}\, dx \right)^{1/p^*} \leq ||\mathbf{f}||_s^{1/(p-1)} (|A(k)|^{1-1/p-1/s})^{1/(p-1)}$$

($S_p^{1/p}$ denotando la mejor constante para esta desigualdad, $p^* = Np/(N-p)$; el caso $p = N$ se reduce al caso $p < N$ debido a la inclusión $W_0^{1,N}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < N$ ya que Ω es acotado). Si $0 < k < h$, $A(h) \subset A(k)$. Entonces

$$|A(h)|^{1/p^*}(h-k) = \left(\int_{A(h)} (h-k)^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*} \leq \left(\int_{A(h)} |\psi|^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*} \leq \left(\int_{A(k)} |\psi|^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*}.$$

De donde

$$|A(h)| \leq \frac{1}{S_p^{p^*/p}} \frac{1}{(h-k)^{p^*}} ||\mathbf{f}||_s^{p^*/(p-1)} |A(k)|^{p^*(1/p\,-\,1/(s(p-1)))}.$$

Como $s > N/(p-1)$, el exponente para $|A(k)|$ es mayor que 1. Así, se puede aplicar el *lema de De Giorgi-Stampacchia* **[83]**, concluyendo que existe algún h para el cual $|A(h)| = 0$, es decir, $\psi \in L^\infty(\Omega)$ y obteniéndose además, del propio *lema de De Giorgi-Stampacchia* la estimación,

$$||\psi||_\infty \leq C(p, N, \Omega)(\lambda e^\delta ||V||_q)^{1/(p-1)}.$$

∎

Si $D_p(x,y) = |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y$ para $x, y \in I\!\!R^N$, las desigualdades (véase **[82]**)

$$< D_p(x,y), x-y > \geq \begin{cases} C_p|x-y|^p & \text{si } p \ \geq \ 2, \\ C_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{si } p \ < \ 2, \end{cases} \tag{1.2}$$

implican el siguiente resultado

Lema 1.2.2 *Dadas $f_1, f_2 \in W^{-1,p'}(\Omega)$, considérense $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tales que $-\Delta_p u_i = f_i,\ i = 1, 2$. Entonces:*

$$\int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)\,dx \geq \begin{cases} C_p \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p\,dx & si\ p \ \geq \ 2, \\ C_p \int_\Omega \dfrac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}}\,dx & si\ 1 \ < \ p < 2. \end{cases}$$

Como consecuencia

$$C_p \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p\,dx \leq ||u_1 - u_2||_{W_0^{1,p}(\Omega)} ||f_1 - f_2||_{W^{-1,p'}(\Omega)} \qquad p \ \geq \ 2,$$

$$C_p \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p\,dx \leq (||\nabla u_1||_p + ||\nabla u_2||_p)^{2-p} ||f_1 - f_2||^p_{W^{-1,p'}(\Omega)} \qquad 1 \ < \ p < 2.$$

Ahora se puede enunciar el teorema de existencia

Teorema 1.2.3 *Si λ es suficientemente pequeño, entonces existe una solución al problema (1.1).*

Demostración. La aplicación F_λ, definida en el lema 1.2.1, aplica la bola de radio δ en $L^\infty(\Omega)$ en sí misma, para λ suficientemente pequeño, según ese mismo lema. Por otro lado, si $\psi_1 = F_\lambda \varphi_1$, $\psi_2 = F_\lambda \varphi_2$, donde φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{B}_\delta$, el lema 1.2.2 implica para $p \geq 2$ ($\gamma_0(p) > 0$)

$$\gamma_0 \int_\Omega |\nabla\psi_1 - \nabla\psi_2|^p\,dx \leq \lambda |\int_\Omega V(x)(e^{\varphi_1} - e^{\varphi_2})(\psi_1 - \psi_2)dx| \leq$$
$$\lambda e^\delta ||\varphi_1 - \varphi_2||_\infty ||\psi_1 - \psi_2||_\infty ||V||_q |\Omega|^{1/q'},$$

donde la última desigualdad resulta de la desigualdad de Hölder. De forma similar, para $p < 2$ ($\gamma_1(p) > 0$)

$$\gamma_1 \int_\Omega |\nabla\psi_1 - \nabla\psi_2|^p \, dx \leq \lambda e^\delta ||\varphi_1 - \varphi_2||_\infty^{p/2} ||\psi_1 - \psi_2||_\infty^{p/2} (||\psi_1||_\infty + ||\psi_2||_\infty)^{(2-p)/2} ||V||_q |\Omega|^{1/q'},$$

gracias al teorema del valor medio. Por tanto, por la *inclusión de Sobolev* en el caso $p > N$, o por el *lema de De Giorgi-Stampacchia* en el caso $1 < p \leq N$,

$$||F_\lambda\varphi_1 - F_\lambda\varphi_2||_\infty = ||\psi_1 - \psi_2||_\infty \leq C(p, N, \Omega, ||V||_q)(\lambda e^\delta)^{\gamma(p)} ||\varphi_1 - \varphi_2||_\infty,$$

donde $\gamma(p) > 0$. Así se ha probado que F_λ es contractiva si λ es suficientemente pequeño; por consiguiente, el *teorema clásico del punto fijo de Banach-Picard* permite concluir la prueba. ■

Nota 1.2.4 En el caso $p = N$, el potencial puede tomarse con menor regularidad. Precisamente $V \in L^1(\log L)^\beta(\Omega)$, el espacio de Orlicz usual con $\beta > N - 1$, implica que cada iteración en la prueba del teorema 1.2.3 verifica $u \in L^\infty(\Omega)$ (véase **[26]**). ■

1.3 Condición suficiente para la existencia de solución positiva

Cuando el signo del potencial V es constante, es fácil saber el signo de las soluciones de (1.1). En esta sección se muestra una condición suficiente para la obtención de soluciones positivas de (1.1) cuando V cambia de signo. Este resultado es nuevo incluso para el caso semilineal, $p = 2$, el cual se trata en primer lugar, y está en la línea de **[7]** y **[21]**.

Se considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta w = V(x) & \text{en } \Omega \subset I\!\!R^N,\ N \geq 1, \\ w|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $x \in \Omega$ y $V(x)$ es una función dada en $L^q(\Omega)$ que cambia de signo en Ω ($q \geq 1$ si $N < 2$, $q > N/2$ en caso contrario).

Definición 1.3.1 *Diremos que V verifica la hipótesis* (**HP**) *si el problema (1.3) tiene solución positiva.*

Supóngase que Ω verifica la *condición clásica de bola interior*: para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe una bola $B \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial\Omega \cap \overline{B}$.

Supóngase además que $w > 0$ en Ω, es decir, si $G(x, \xi)$ es la *función de Green* de $-\Delta$ para Ω, con dato cero en el borde,

$$w(x) = \int_\Omega G(x,\xi)V(\xi)\, d\xi = \int_\Omega G(x,\xi)V^+(\xi)\, d\xi - \int_\Omega G(x,\xi)V^-(\xi) > 0.$$

Luego $w_1(x) > w_2(x)$, donde w_1, w_2 son las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = V^+(x) & \text{en } \Omega, \\ w_1|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w_2 & = & V^-(x) & \text{en } \Omega, \\ w_2|_{\partial\Omega} & = & 0. & \end{array}\right. \tag{1.5}$$

Sea $y(x)$ la función definida en $\bar{\Omega}$ por

$$y(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{w_1(x)}{w_2(x)} & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial_\nu w_1(x)}{\partial_\nu w_2(x)} & \text{si} \quad x \in \partial\Omega, \end{array}\right.$$

donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ y ∂_ν la derivada normal. Esta función está bien definida, es positiva y continua en $\overline{\Omega}$ por el *lema de Hopf*. Supóngase que $\min\limits_{x\in\bar{\Omega}} y(x) = 1 + m$ para algún $m > 0$. Esto implica $w_1 > (1 + m)w_2$. Sea M tal que $M = ||y||_\infty$.

Ahora, si se toma una función φ en Ω tal que $0 \le \varphi \le \delta \log(y(x))$, es decir, $e^{\varphi(x)} \le y^\delta(x)$, donde $\delta > 0$ se determinará posteriormente, se puede definir para $\lambda > 0$ la aplicación T_λ como sigue

$$\psi(x) = (T_\lambda\varphi)(x) = \lambda \int\limits_\Omega G(x, \xi)V(\xi)e^{\varphi(\xi)}\, d\xi.$$

Así

$$(T_\lambda\varphi)(x) \ge \lambda \int\limits_\Omega G(x, \xi)V^+(\xi)\, d\xi - \lambda \int\limits_\Omega G(x, \xi)V^-(\xi)y^\delta(\xi)\, d\xi \ge \lambda(w_1(x) - M^\delta w_2(x)),$$

por lo que se puede tomar δ suficientemente pequeño para obtener

$$(T_\lambda\varphi)(x) \ge \lambda(w_1(x) - M^\delta w_2(x)) > \lambda(w_1(x) - (1 + m)w_2(x)) > 0.$$

Por tanto, $T_\lambda\varphi$ es una aplicación positiva si δ es suficientemente pequeño. Fijando δ más pequeño si es necesario, T_λ aplica la bola de radio M^δ en $L^\infty(\Omega)$ en sí misma y es contractiva para λ suficientemente pequeño, por los resultados de la sección anterior. De esta manera se obtiene la existencia de una solución positiva del problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda V(x)e^u & \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array}\right. \tag{1.6}$$

mediante un argumento de punto fijo ($u = T_\lambda u$), como consecuencia del signo positivo de la solución de (1.3). Se ha probado así el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2 *Sean $p = 2$, w_1, w_2 definidas en (1.4) y (1.5) y supóngase que V verifica* (**HP**) *y además $w_1(x) = (1 + \rho(x))w_2(x)$, donde $\rho \in L^\infty(\overline{\Omega})$ y $\rho(x) \ge m > 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces el problema (1.6) tiene al menos una solución positiva para λ suficientemente pequeño.*

Ahora se considera p general. El resultado correspondiente es el siguiente:

Teorema 1.3.3 *Sea w la solución de*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p w & = & V^+(x) - (1 + \mu(x))V^-(x) & \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ w|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array}\right.$$

donde $V \in L^q(\Omega)$ cambia de signo en Ω ($q \geq 1$ si $p > N$, $q > N/p$ si $p \leq N$) y $\mu(x)$ verifica que existe una constante positiva m tal que $\mu(x) \geq m > 0$. Supóngase que $w > 0$ en Ω; entonces, si λ es suficientemente pequeño, la solución de (1.1) cuya existencia se prueba en el teorema 1.2.3 es positiva.

Demostración. Sea $\delta = \log(1+m)^{1/2}$ (por tanto, $e^{2\delta} = 1+m$ y $e^{-\delta} = (1+m)^{-1/2}$). El teorema 1.2.3 implica que existe una solución de (1.1) perteneciente a la bola $\mathcal{B}_\delta$ para λ suficientemente pequeño. Sea ψ esa solución. Entonces

$$-\Delta_p \psi = \lambda(V^+(x)e^\psi - V^-(x)e^\psi) \geq \lambda(V^+(x)e^{-\delta} - V^-(x)e^\delta) = \lambda e^{-\delta}(V^+(x) - V^-(x)e^{2\delta}).$$

Es decir

$$-\Delta_p \psi \geq \lambda(1+m)^{-1/2}(V^+(x) - (1+m)V^-(x)) \geq \lambda(1+m)^{-1/2}(-\Delta_p w).$$

El *principio de comparación débil* **[80]** permite concluir entonces que $\psi \geq C(\lambda, m, p)\, w > 0$ en Ω.

■

1.4 $V \geq 0$ y $1 < p < N$: solución minimal

En esta sección se demuestra la existencia de una solución al problema (1.1) para el caso supercrítico $1 < p < N$, $V \geq 0$ mediante argumentos de comparación. Los siguientes resultados son extensiones de algunos resultados de **[50]** al caso de coeficientes variables: sólo se demostrarán aquéllos cuya prueba necesite alguna modificación.

Lema 1.4.1 *Sea u_0 una supersolución regular de (1.1). Entonces, existe $\underline{u}$ solución minimal regular de (1.1), donde $0 \leq \underline{u} \leq u_0$.*

(Nótese que una vez conocida la existencia de una solución regular, ésta es positiva por el principio del máximo, lo que implica la existencia de solución minimal ya que $u_0 = 0$ es subsolución de (1.1)).

Corolario 1.4.2 *Si existe solución regular de (1.1) para $\lambda_0 > 0$, entonces existe solución regular para todo $\lambda \leq \lambda_0$.*

Teorema 1.4.3 *Si $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p > 1$, existe una constante λ_* tal que si $\lambda < \lambda_*$, el problema (1.1) tiene una solución positiva.*

Teorema 1.4.4 *Si $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una solución singular de*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_0 & = & \lambda_* V(x) e^{u_0} & \text{en } \Omega, \\ u_0|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array} \right. \tag{1.7}$$

donde $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p > 1$, entonces, para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$ el problema (1.1) tiene una solución positiva minimal regular $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Si u_0 es una solución singular, entonces $V(x)e^{u_0} \in L^1(\Omega)$ y se puede considerar $V(x)e^{u_0} \in W^{-1,p'}(\Omega)$ (véase la introducción de esta Memoria). La función

$$u_1 = (\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)} u_0$$

es una solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_1 & = & \lambda V(x) e^{u_0} & \text{en } \Omega, \\ u_1|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array} \right.$$

que verifica $V(x)^{(\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}} e^{u_1} \in L^{(\lambda_*/\lambda)^{1/(p-1)}}(\Omega)$, $0 < u_1 < u_0$, y $V(x)e^{u_1} \in W^{-1,p'}(\Omega)$; además

$$\int_\Omega V(x) u_1^s \, dx < \int_\Omega V(x) u_0^s \, dx < \int_\Omega V(x) e^{u_0} \, dx < \infty \qquad \forall s \in (1, \infty).$$

Si se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p u_2 & = & \lambda V(x) e^{u_1} & \text{en } \Omega, \\ u_2|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array} \right.$$

entonces $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$; usando el *principio de comparación débil*, se tiene $0 < u_2 \leq u_1 < u_0$ y

$$\int_\Omega V(x) u_2^s \, dx < \infty.$$

Por la convexidad de $f(t) = e^{tx_0}$ para $0 < t < 1$,

$$e^{tx_0} + (1-t) x_0 e^{tx_0} \leq e^{x_0}.$$

Entonces, si $t = (\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}$ y $x_0 = u_0$,

$$e^{u_1} + (1-t) u_0 e^{u_1} \leq e^{u_0}.$$

Como $u_2 \leq u_1 < u_0$,

$$\lambda e^{u_1} \leq \lambda e^{u_0} - \lambda(1-t) u_2 e^{u_1}. \tag{1.8}$$

Además,

$$-\Delta_p \left(\frac{p-1}{p} v^{p/(p-1)} \right) = -v \Delta_p v - |\nabla v|^p.$$

Reemplazando v por u_2 en la última ecuación, se llega a

$$-\Delta_p \left(\frac{p-1}{p} {u_2}^{p/(p-1)} \right) = -u_2 \Delta_p u_2 - |\nabla u_2|^p \leq \lambda u_2 V(x) e^{u_1}.$$

Ahora, por homogeneidad y (1.8)

$$\begin{array}{rcl} -\Delta_p \left((1-t)^{1/(p-1)} \dfrac{p-1}{p} {u_2}^{p/(p-1)} \right) & \leq & \lambda(1-t) u_2 V(x) e^{u_1} \leq \lambda V(x) e^{u_1} + \lambda(1-t) u_2 V(x) e^{u_1} \\ & \leq & \lambda V(x) e^{u_0} = -\Delta_p u_1. \end{array}$$

Suponiendo que $u_2^{p/(p-1)} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, aplicando el *principio de comparación débil*,

$$(1-t)^{1/(p-1)}\frac{p-1}{p}u_2^{p/(p-1)} \le u_1 \quad \text{y} \quad V(x)e^{(1-t)^{1/(p-1)}(p-1)u_2^{p/(p-1)}/p} \in L^1(\Omega).$$

Por tanto, si $V(x) \in L^q(\Omega)$, con $q > N/p > 1$, entonces $V(x)e^{u_2} \in L^s(\Omega)$, para $s > N/p$ (por la *desigualdad de Hölder*). Así, el *lema de De Giorgi-Stampacchia* **[83]** implica que $u_3 \in L^\infty(\Omega)$, donde u_3 es la tercera iteración. De esta manera, se ha obtenido una supersolución regular de (1.1). El lema 1.4.1 afirma que existe una solución positiva minimal regular de (1.1).

Falta probar que $u_2^{p/(p-1)} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se observa que

$$-\Delta_p\left(\frac{p-1}{p}u_2{}^{p/(p-1)}\right) = \lambda u_2 V(x)e^{u_1} - |\nabla u_2|^p \in L^1(\Omega), \tag{1.9}$$

ya que $V(x)e^{u_1} \in W^{-1,p'}(\Omega)$, y

$$\lambda\int_\Omega u_2 V(x)e^{u_1}\,dx = \int_\Omega |\nabla u_2|^p\,dx = ||\nabla u_2||_p^p < \infty.$$

Si se define w_k como

$$w_k(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{p-1}{p}u_2^{p/(p-1)} & \text{si} \quad \dfrac{p-1}{p}u_2^{p/(p-1)} \le k, \\ k & \text{si} \quad \dfrac{p-1}{p}u_2^{p/(p-1)} \ge k, \end{cases}$$

al multiplicar (1.9) por w_k, la *desigualdad de Hölder* implica

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w_k|^p\,dx &\le \lambda\int_\Omega w_k u_2 V(x)e^{u_1}\,dx \le \lambda\frac{p-1}{p}\int_\Omega u_2^{p/(p-1)+1}V(x)e^{u_1}\,dx \\
&= \lambda\frac{p-1}{p}\int_\Omega \left[V(x)^{1-(\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}}u_2^{p/(p-1)+1}\right]\left[V(x)^{(\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}}e^{u_1}\right]dx \\
&\le \lambda\frac{p-1}{p}\left(\int_\Omega V(x)u_2^s\,dx\right)^{1-(\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}}\left(\int_\Omega V(x)e^{u_0}\,dx\right)^{(\lambda/\lambda_*)^{1/(p-1)}} < \infty.
\end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\{w_k\}$ está uniformemente acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y por lo tanto el límite también, es decir, $u_2^{p/(p-1)} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Se usará el resultado siguiente

Lema 1.4.5 *Sea $\underline{u} = \underline{u}(\lambda)$ una solución regular minimal de (1.1). Si se define el conjunto $\mathcal{K}$ como*

$$\mathcal{K} = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid 0 \le v \le \underline{u}\},$$

entonces el funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \lambda\int_\Omega V(x)e^u\,dx$$

está bien definido en $\mathcal{K}$ y el minimizante

$$J(u) = \min_{v\in\mathcal{K}} J(v)$$

es la solución minimal $\underline{u}$. Además, $\underline{u}$ satisface la siguiente estimación

$$\lambda\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}}w^2\,dx \le (p-1)\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}|\nabla w|^2\,dx \qquad \forall w\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Basta ver que $\underline{u}\le u\in\mathcal{K}$. La solución minimal se obtiene como límite de la sucesión creciente u_n formada por las soluciones de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u_n &=& \lambda V(x)e^{u_{n-1}} & \text{en } \Omega,\\ u_n|_{\partial\Omega} &=& 0, & \end{array}\right.$$

con $u_0=0$. Por la definición de $\mathcal{K}$, $u\ge 0$ y $e^u\ge e^{u_0}$. Si u es el minimizante de J en $\mathcal{K}$, se tiene

$$\langle -\Delta_p u, v-u\rangle \ge \lambda\langle V(x)e^u, v-u\rangle \quad \forall v\in\mathcal{K}.$$

Tomando $v = u + (u-u_1)^-\in\mathcal{K}$,

$$\langle -\Delta_p u, (u-u_1)^-\rangle \ge \lambda\langle V(x)e^u, (u-u_1)^-\rangle.$$

Por otra parte, multiplicando la ecuación que verifica u_1 por $(u-u_1)^-\in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\langle -\Delta_p u_1, (u-u_1)^-\rangle = \lambda\langle V(x)e^{u_0}, (u-u_1)^-\rangle.$$

Así pues,

$$\begin{array}{rcl} 0\le\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u, (u-u_1)^-\rangle &=& \int_{\{u\le u_1\}}\langle |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(u-u_1)\rangle\,dx\\ &\le& \lambda\int_{\{u\le u_1\}} V(x)(e^{u_0}-e^u)(u_1-u)\,dx \le 0. \end{array}$$

Por lo que se concluye que $u_1\le u$. Repitiendo este argumento con u_n en lugar de u_1, se tiene $u_n\le u$, $n>0$. Pasando al límite, $\underline{u}\le u$ y entonces $\underline{u}\equiv u$.

Además, por el principio del máximo, $\underline{u}>0$ en Ω. Si $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varphi\ge 0$, entonces existe $\varepsilon_0>0$ tal que, para $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, se tiene $0\le\underline{u}-\varepsilon\varphi$ y $J(\underline{u})\le J(\underline{u}-\varepsilon\varphi)$, lo que implica

$$0\le J(\underline{u}-\varepsilon\varphi) - J(\underline{u}) = \frac{\varepsilon^2}{2}\langle J''(\underline{u})\varphi,\varphi\rangle + o(\varepsilon^2).$$

Es decir, $\langle J''(\underline{u})\varphi,\varphi\rangle\ge 0$, para $\varphi\in\mathcal{D}^+(\Omega)$. Por densidad, tomando cualquier $w\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $w\ge 0$,

$$(p-1)\int_\Omega |\nabla\underline{u}|^{p-2}|\nabla w|^2\,dx - \lambda\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}}w^2\,dx\ge 0,$$

que era lo que se quería demostrar. ∎

Teorema 1.4.6 *Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente tal que*

$$\lambda_n \to \lambda_* \equiv \sup\{\lambda \mid (1.1) \text{ tiene solución}\}.$$

Si $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p > 1$, y $\underline{u}_n = \underline{u}_n(\lambda_n)$ es la solución minimal correspondiente de (1.1), entonces $\underline{u}_n \to u_*$ fuertemente en $W_0^{1,p}(\Omega)$, $V(x)e^{\underline{u}_n} \to V(x)e^{u_*}$ en $L^{p^*/(p^*-1)}(\Omega)$, y u_* es una solución singular de (1.7).

Demostración. Si $\underline{u}_n$ es la solución minimal de (1.1) para $\lambda = \lambda_n$, se tiene, tomando $w = \underline{u}_n$ y usando el lema 1.4.5,

$$\lambda_n \int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n^2\,dx \le (p-1)\int_\Omega |\nabla \underline{u}_n|^p\,dx = (p-1)\lambda_n \int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n\,dx.$$

Considérense los conjuntos $\mathcal{E}_n = \{x \in \Omega \ / \ \underline{u}_n > 2(p-1)\}$. Entonces, en $\Omega \setminus \mathcal{E}_n$, $0 < \underline{u}_n < 2(p-1)$ y

$$\begin{aligned}\lambda_n \int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n^2\,dx &\le (p-1)\lambda_n \int_{\Omega\setminus\mathcal{E}_n} V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n\,dx + (p-1)\lambda_n\int_{\mathcal{E}_n} V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n\,dx\\ &\le 2(p-1)^2\lambda_n e^{2(p-1)}\int_\Omega V(x)\,dx + \frac{\lambda_n}{2}\int_{\mathcal{E}_n} V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n^2\,dx.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n^2\,dx \le 4(p-1)^2 e^{2(p-1)}\int_\Omega V(x)\,dx < C,$$

y se tiene

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}_n|^p\,dx = \lambda_n \int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n\,dx \le \lambda_n\left(\int_{\{\underline{u}_n\ge 1\}} V(x)e^{\underline{u}_n}\underline{u}_n^2\,dx + e\int_{\{\underline{u}_n<1\}} V(x)\,dx\right) \le C.$$

Entonces, si se toma una subsucesión $\{\underline{u}_{n_k}\}$ adecuada

a) $\underline{u}_{n_k} \rightharpoonup u_*$ débilmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

b) Además, $\{\underline{u}_n\}$ es monótona (recuérdese que λ_n es creciente); por consiguiente el límite u_* es único y la sucesión entera converge: $e^{\underline{u}_n} \to e^{u_*}$ en $L^1(\Omega)$ por convergencia monótona.

Para probar que u_* es una solución singular de (1.7), se consideran las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{u}_n|^{p-2}\langle\nabla \underline{u}_n, \nabla\varphi\rangle\,dx &= \lambda\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\varphi\,dx & \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),\\ \lambda\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\psi^2\,dx &\le (p-1)\int_\Omega |\nabla \underline{u}_n|^{p-2}|\nabla\psi|^2\,dx & \forall\psi \in W_0^{1,p}(\Omega).\end{aligned}$$

Si se toma $\varphi = \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha\underline{u}_n} - 1)$, $\psi = e^{\alpha\underline{u}_n} - 1$ en las desigualdades anteriores (α se determinará posteriormente) se llega a

$$\left(\frac{1}{(p-1)\alpha} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega V(x)e^{(2\alpha+1)\underline{u}_n}\,dx \le \frac{2}{(p-1)\alpha}\int_\Omega V(x)e^{(\alpha+1)\underline{u}_n}\,dx.$$

Tomando α tal que

$$\frac{1}{(p-1)\alpha} > \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad 2\alpha + 1 < \frac{p+3}{p-1},$$

y escribiendo $V(x)e^{(\alpha+1)\underline{u}_n} = (V(x)e^{(2\alpha+1)\underline{u}_n})^{1/2}(V(x)e^{\underline{u}_n})^{1/2}$, se tiene, usando la *desigualdad de Young*,

$$C(\alpha)\int_\Omega V(x)e^{(2\alpha+1)\underline{u}_n}\,dx \le \int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\,dx \le \int_\Omega V(x)e^{u_*}\,dx.$$

Si se supone a la vez que

$$2\alpha + 1 > \frac{p^*}{p^*-1} = (p^*)' = \frac{Np}{N(p-1)+p},$$

entonces se obtiene por la *desigualdad de Hölder* que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (V(x)e^{\underline{u}_n})^{(p^*)'}\,dx = \int_\Omega (V(x)^{1/(2\alpha+1)}e^{\underline{u}_n})^{(p^*)'}(V(x)^{2\alpha/(2\alpha+1)})^{(p^*)'}\,dx \\
&\le \left(\int_\Omega V(x)e^{(2\alpha+1)\underline{u}_n}\,dx\right)^{(p^*)'/(2\alpha+1)} \left(\int_\Omega V(x)^{2\alpha p^*/((2\alpha+1)(p^*-1)-p^*)}\,dx\right)^{1/((p^*-1)(2\alpha+1)/p^*)'}.
\end{aligned}$$

Como $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p > 1$, esta cantidad es finita si

$$\frac{2\alpha p^*}{(2\alpha+1)(p^*-1)-p^*} \le \frac{N}{p},$$

o sea,

$$\alpha \ge \frac{1}{2}\frac{1}{p-1}.$$

Como lo siguiente es siempre cierto

$$(p^*)' = \frac{Np}{N(p-1)+p} < \frac{Np}{N(p-1)} < \frac{3+p}{p-1}, \qquad \frac{1}{2(p-1)} < \frac{2}{p-1},$$

se cumplen todos los requisitos sobre el valor de α: existe siempre algún α verificándolos.

Así pues, se ha probado que $V(x)e^{\underline{u}_n} \in L^{(p^*)'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, y que $V(x)e^{\underline{u}_n}$ converge en $W^{-1,p'}(\Omega)$ por el *teorema de convergencia monótona*. La continuidad del operador

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$$

implica que la sucesión $\{V(x)e^{\underline{u}_n}\}$ converge fuertemente en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por tanto, si se toma $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle|\nabla u_*|^{p-2}\nabla u_*, \nabla\varphi\rangle\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \langle|\nabla \underline{u}_n|^{p-2}\nabla \underline{u}_n, \nabla\varphi\rangle\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega V(x)e^{\underline{u}_n}\varphi\,dx = \int_\Omega V(x)e^{u_*}\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

es decir, $u_* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución singular, ya que la ecuación correspondiente se verifica en $W^{-1,p'}(\Omega)$. ■

El siguiente resultado proporciona las condiciones en las que la solución minimal límite u_* es regular:

Teorema 1.4.7 *Si V, λ_* y u_* son como en el teorema 1.4.6 y la dimensión N satisface*

$$N < \frac{pq(3+p)}{4+q(p-1)} = \frac{p(3+p)}{4/q+p-1},$$

entonces $u_* \in L^\infty(\Omega)$ y es una solución regular para (1.7).

DEMOSTRACIÓN. Hay que demostrar que $V(x)e^{\underline{u}_n} \in L^s(\Omega)$ con $s > N/p$, ya que en ese caso el *lema de De Giorgi-Stampacchia* implica que $||\underline{u}_n||_\infty \le C$ uniformemente en λ, y así el límite u_* es regular. Si se aplica la *desigualdad de Hölder* con $N/p < r < 2\alpha+1$, $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (V(x)e^{\underline{u}_n})^s\,dx &= \int_\Omega (V(x)^{1/(2\alpha+1)}e^{\underline{u}_n})^s(V(x)^{2\alpha/(2\alpha+1)})^s\,dx \\ &\le \left(\int_\Omega V(x)e^{(2\alpha+1)\underline{u}_n}\,dx\right)^{s/(2\alpha+1)}\left(\int_\Omega V(x)^{2\alpha s/(2\alpha+1-s)}\,dx\right)^{(2\alpha+1-s)/(2\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Se está suponiendo que $V \in L^q(\Omega)$, $q > N/p$. Entonces, la cantidad anterior es finita si

$$\frac{2\alpha s}{2\alpha+1-s} < q,$$

ya que la primera integral es finita si $\alpha < 2/(p-1)$ (véase la prueba del teorema 1.4.6, i.e. $s > N/p$)

$$\frac{2\alpha N/p}{2\alpha+1-N/p} = \frac{2\alpha N}{(2\alpha+1)p-N} < q,$$

ó

$$\alpha > \frac{(N-p)q}{2(pq-N)}.$$

Pero también se está suponiendo que $\alpha < 2/(p-1)$, luego

$$\frac{(N-p)q}{2(pq-N)} < \frac{2}{p-1}, \quad \text{i.e.} \quad N < \frac{pq(3+p)}{4+q(p-1)}.$$

■

Nota 1.4.8 Si se toma $V \in L^\infty$, la última desigualdad se transforma en

$$N < p + \frac{4p}{p-1}.$$

Esta es la relación que aparece en **[50]**, donde $V \equiv 1$. ■

Los resultados previos muestran que, bajo las hipótesis de regularidad anteriores relativas a $V \ge 0$, existe al menos una solución regular positiva de (1.1), para $1 < p < N$ (caso supercrítico). Sin embargo, para los casos crítico y subcrítico ($p \ge N$), se puede realizar un argumento variacional con V cambiando de signo.

1.5 V cambiando de signo y $p \geq N$

En esta sección se supondrán las siguientes hipótesis:

(H1) $p \geq N$.

(H2) $V(x) \in L^q(\Omega)$, $q > 1$ para $p = N$, $q \geq 1$ para $p > N$; V puede cambiar de signo en Ω.

(H3) Existe una bola abierta $B \subset \Omega$ tal que $V(x) > 0$ para $x \in B$.

En general, con estas hipótesis no se pueden aplicar argumentos de comparación, pero la condición $p \geq N$ permite emplear métodos de puntos críticos. A lo largo de esta sección se demuestra el teorema:

Teorema 1.5.1 *Existe una constante $\lambda_0 > 0$ tal que si $0 < \lambda < \lambda_0$, el problema (1.1) tiene al menos dos soluciones regulares.*

La hipótesis (H3) implica que $V^+ \not\equiv 0$: este hecho juega un papel fundamental en la existencia de dos soluciones. Nótese que para $V < 0$ (i.e. $V^+ \equiv 0$) existe sólo una solución negativa. La prueba del teorema 1.5.1 emplea los argumentos usados en [**48**] para el caso de potencial constante:

El funcional de energía correspondiente al problema (1.1) es

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \lambda \int_{\Omega} V(x) e^u \, dx,$$

que, gracias a la versión de la *desigualdad de Trudinger* (véase [**52**]) que aparece en [**50**], satisface la estimación siguiente

$$J(u) \geq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx - \lambda ||V||_q C \exp \left\{ D \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{N/p} \right\}, \tag{1.10}$$

donde $C = (k_1|\Omega|)^{1/q'}$ y $D = k_2 (q')^{N-1} |\Omega|^{(p-N)/N}$ (k_1, k_2 son constantes que dependen de N).

Teorema 1.5.2 *El funcional J verifica la condición de Palais-Smale.*

Demostración. Sea $\{u_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión de Palais-Smale para J; i.e.

$$\begin{array}{rcl} J(u_j) & \to & C, \\ J'(u_j) & \to & 0 \quad \text{en } W^{-1,p'}(\Omega). \end{array}$$

Hay que demostrar que toda sucesión de Palais-Smale contiene una subsucesión que converge fuertemente en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $\varepsilon_j = J'(u_j)$ entonces $\varepsilon_j \to 0$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$; por tanto, se puede suponer que

$||\varepsilon_j||_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq 1$, y

$$\begin{aligned} C &= \lim_{j\to\infty}\left\{J(u_j) - \frac{1}{2p} < \varepsilon_j, u_j > + \frac{1}{2p} < \varepsilon_j, u_j >\right\} \\ &\geq \lim_{j\to\infty}\left\{\frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla u_j|^p\,dx + \lambda\int_\Omega V(x)e^{u_j}\left(\frac{u_j}{2p}-1\right)dx - \frac{1}{2p}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^p\,dx\right)^{1/p}\right\} \\ &\geq \lim_{j\to\infty}\left\{\frac{1}{2p}\int_\Omega |\nabla u_j|^p\,dx - \lambda||V||_q C_0|\Omega|^{1/q'} - \frac{1}{2p}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^p\,dx\right)^{1/p}\right\}, \end{aligned}$$

donde

$$-C_0 = \min_{x\in I\!R}\left\{e^x\left(\frac{x}{2p}-1\right)\right\} < 0,$$

ya que

$$g(x) = e^x\left(\frac{x}{2p}-1\right)$$

es una función continua definida en todo $I\!R$ que verifica $g(0) < 0$, $g(x) \to 0^-$ conforme $x \to -\infty$ y $g(x) \to \infty$ según $x \to \infty$. Así pues, g alcanza un valor mínimo $-C_0 < 0$.

Por tanto, la sucesión $\{u_j\}$ está acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$; entonces existe una subsucesión que converge débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y fuertemente en $L^s(\Omega)$, $1 < s < \infty$. Pero entonces $V(x)e^{u_j} \to V(x)e^u$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$, ya que para $p > N$, la sucesión $\{u_j\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$, mientras que para $p = N$, dada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $||\nabla\varphi||_p = 1$, el *teorema del valor medio* y *la desigualdad de Hölder* implican

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega V(x)(e^{u_j}-e^u)\varphi\,dx\right| \leq \int_\Omega |V(x)|e^u|u_j-u|e^{|u_j-u|}|\varphi|\,dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (|V(x)|e^u)^a\,dx\right)^{1/a}\left(\int_\Omega e^{b|u_j-u|}\,dx\right)^{1/b}\left(\int_\Omega |u_j-u|^c\,dx\right)^{1/c}\left(\int_\Omega |\varphi|^d\,dx\right)^{1/d}, \end{aligned}$$

con $1/a+1/b+1/c+1/d = 1$. Empleando la *desigualdad de Hölder* para el primer factor, la *desigualdad de Trudinger* para los factores primero y segundo, la convergencia de la sucesión $\{u_j\}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y L^s para el segundo y tercer factor, y la inclusión de Sobolev para el último factor, se demuestra que $V(x)e^{u_j} \to V(x)e^u$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$ (véanse los detalles en [**48**]).

Como por hipótesis $J'(u_j) \to 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$, entonces $-\Delta_p u_j = \lambda V(x)e^{u_j} \to \lambda V(x)e^u$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$. Por la continuidad del operador $-\Delta_p^{-1}$, se termina la prueba. ■

También es fácil demostrar las siguientes propiedades del funcional J para $0 < \lambda < \lambda_0$:

(a) Si $J(0) = -\lambda\int_\Omega V(x)\,dx \leq 0$, i.e. si $\int_\Omega V(x)\,dx \geq 0$, el funcional J verifica que, para λ suficientemente pequeño, existe $R_1 > 0$, $\rho \in I\!R$ tal que si $||\nabla u||_p = R_1$, entonces $J(u) > \rho > J(0)$: tomando $R_1 = 1$, $\rho = 1/(2p)$, $\lambda < (2p||V||_q Ce^D)^{-1}$, se tiene por (1.10)

$$J(u) \geq \frac{1}{p} - \lambda||V||_q Ce^D > \frac{1}{2p} = \rho > J(0).$$

(b) Si $\int_\Omega V(x)\,dx = -\alpha < 0$, entonces $J(0) = \lambda\alpha$. Si se toma $||\nabla u||_p = R_1$, se tiene

$$J(u) \geq \frac{R_1^p}{p} - \lambda ||V||_q C e^{DR_1^N} > \frac{\alpha}{p} > \lambda\alpha = J(0),$$

siempre que

$$\lambda < \min\left(\frac{R_1^p - \alpha}{p||V||_q C e^{DR_1^N}}, \frac{1}{p}\right).$$

(c) Existe $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, con $||\nabla w_0||_p = R_2 > R_1$ y $J(w_0) < J(0)$; para $w \in \mathcal{C}_0^\infty(B) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, $w \geq 0$, donde $B \subset \Omega$ es la bola en la que el potencial V es positivo, se tiene (donde $V < 0$, $w \equiv 0$)

$$\begin{aligned} J(tw) &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p\,dx - \lambda\int_\Omega V(x)e^{tw}\,dx \\ &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p\,dx - \lambda\int_\Omega V^+(x)e^{tw}\,dx + \lambda\int_\Omega V^-(x)\,dx \\ &\leq \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla w|^p\,dx - \lambda C_p t^{2p}\int_\Omega V^+(x)w^{2p}\,dx + \lambda\int_\Omega V^-(x)\,dx \to -\infty \quad \text{si } t\to\infty, \end{aligned}$$

ya que $e^{tw} > C_p(tw)^{2p}$ y las integrales $\int_\Omega V^-(x)\,dx$ y $\int_\Omega V^+(x)w^{2p}\,dx$ están acotadas.

La gráfica de J está entonces contenida en la región que queda por encima de la gráfica de

$$f(||\nabla u||_p) = \frac{1}{p}||\nabla u||_p^p - \lambda||V||_q C e^{D||\nabla u||_p^N}.$$

f tiene dos puntos críticos: un mínimo local cerca de 0 y un máximo local, i.e., las condiciones geométricas requeridas para la existencia de puntos críticos de J se cumplen. Por consiguiente, se puede usar el *lema del paso de la montaña* clásico (véase **[12]**); resulta el lema siguiente:

Lema 1.5.3 *Existe una constante* $\lambda_0 > 0$ *tal que si* $0 < \lambda < \lambda_0$, *el problema (1.1) admite una solución correspondiente a un punto crítico del funcional* J *con valor crítico*

$$c = \inf_{\varphi\in\mathcal{C}} \max_{t\in[0,1]} J(\varphi(t)),$$

donde

$$\mathcal{C} = \{\varphi \in C([0,1]; W_0^{1,p}(\Omega)) \,:\, \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = w_0\},$$

para algún $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $J(w_0) \leq J(0)$. *Además,* $c > J(0)$.

Para obtener el segundo punto crítico, se realiza un truncamiento del funcional. Considérese una función corte $\tau \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ tal que para los anteriormente definidos R_1 y R_2

$$\tau(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq R_1, \\ 0 & \text{si} \quad x \geq R_2, \end{cases}$$

y τ no creciente. Así, se obtiene el funcional truncado (véase **[48]**)

$$F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \lambda\int_\Omega V(x)\tau(||\nabla u||_p)e^u\,dx.$$

Nótese que

(a) J y F son iguales si $||\nabla u||_p \leq R_1$.

(b) Si $||\nabla u||_p \geq R_2$, entonces $F(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx$.

(c) Si $F(u) < J(0) = -\lambda\int_\Omega V(x)\,dx$, entonces $||\nabla u||_p < R_1$, ya que F es creciente para u con $||\nabla u||_p > R_1$.

Por tanto, J y F son iguales en un entorno de u y la condición de Palais-Smale para J implica la subsiguiente condición de Palais-Smale para F.

Lema 1.5.4 *Sea* $\{u_j\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{array}{rcl} F(u_j) & \to & C < J(0), \\ F'(u_j) & \to & 0 \quad \text{en } W^{-1,p'}(\Omega). \end{array}$$

Entonces existe una subsucesión que converge fuertemente a $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Además, se tiene

Lema 1.5.5

$$\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} F(u) < J(0) = -\lambda\int_\Omega V(x)\,dx.$$

Demostración. Sea w una función en $\mathcal{C}_0^\infty(B) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, $w \geq 0$, donde B es la bola abierta en la que $V > 0$. Si $||\nabla w||_p = 1$, y $0 < \rho < R_1$, entonces

$$\begin{array}{rcl} F(\rho w) & = & \dfrac{\rho^p}{p} - \lambda\displaystyle\int_\Omega V^+(x)e^{\rho w}\,dx + \lambda\int_\Omega V^-(x)\,dx \\ & \leq & \dfrac{\rho^p}{p} - \lambda\displaystyle\int_\Omega V^+(x)(1+\rho w)\,dx + \lambda\int_\Omega V^-(x)\,dx = \\ & = & \rho\left(\dfrac{\rho^{p-1}}{p} - \lambda\displaystyle\int_\Omega V^+(x)w\,dx\right) - \lambda\int_\Omega V^+(x)\,dx + \lambda\int_\Omega V^-(x)\,dx < J(0), \end{array}$$

siempre que el factor ρ sea suficientemente pequeño ($\int_\Omega V^+(x)w\,dx$ está acotada). ■

Es fácil obtener el siguiente resultado:

Lema 1.5.6 *Existe una constante positiva* $\lambda_0 > 0$ *tal que si* $0 < \lambda < \lambda_0$, *entonces el problema (1.1) tiene una solución correspondiente a un punto crítico del funcional* J, *con valor crítico* $c' < J(0)$.

Con los lemas 1.5.3 y 1.5.6 se concluye la prueba del Teorema 1.5.1.

1.6 Resultados de no existencia

En esta sección se demuestra un resultado de no existencia para el problema (1.1): si $V(x) \in L^q(\Omega)$, ($q \geq 1$ para $p > N$, $q > N/p$ para $p \leq N$), $V \geq 0$, y λ es suficientemente grande entonces el problema (1.1) no tiene solución. Al final de la prueba de este resultado se usa el aislamiento del primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso $V(x)$ en Ω y dato de borde cero (véanse **[13]**, **[65]** y el apéndice de este capítulo).

Teorema 1.6.1 *El problema (1.1) no tiene solución si*

$$\lambda > \max\left\{\lambda_1, \lambda_1\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\right\},$$

donde $V \in L^q(\Omega)$, ($q \geq 1$ para $p > N$, $q > N/p$ para $p \leq N$), $V \geq 0$ y λ_1 es el primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso $V(x)$ en Ω y dato de borde cero.

Demostración. Si λ_1 es el primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso $V(x)$ en Ω y dato de borde 0, tómese $\lambda_\varepsilon = \lambda_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ϕ_1 una autofunción positiva correspondiente a λ_1 con $||\phi_1||_\infty \leq 1$, y supóngase que el problema (1.1) tiene una solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y

$$\lambda > \max\left\{\lambda_1, \lambda_1\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\right\}.$$

Para ε pequeño, se tiene ($\lambda_\varepsilon < \lambda$):

$$\lambda_\varepsilon x^{p-1} \leq \lambda_\varepsilon \left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} e^x < \lambda e^x, \qquad \forall x \geq 0,$$

$$-\Delta_p \phi_1 = \lambda_1 V {\phi_1}^{p-1} < \lambda_\varepsilon V < \lambda V \leq \lambda V e^u = -\Delta_p u.$$

Usando el *principio de comparación débil* se obtiene $\phi_1 \leq u$. Sea v_1 la solución de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_1 = \lambda_\varepsilon V(x)\phi_1^{p-1} & \text{en } \Omega, \\ v_1|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Se sabe por resultados de regularidad (véanse **[39]** y **[86]**) que $v_1 \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$. Además

$$-\Delta_p v_1 = \lambda_\varepsilon V \phi_1^{p-1} < \lambda V e^{\phi_1} \leq \lambda V e^u = -\Delta_p u,$$

$$-\Delta_p \phi_1 \leq \lambda_\varepsilon V \phi_1^{p-1} = -\Delta_p v_1.$$

Aplicando de nuevo el *principio de comparación débil*, se tiene $\phi_1 \leq v_1 \leq u$. Considérense ahora los problemas ($v_0 = \phi_1$)

$$\begin{cases} -\Delta_p v_k = \lambda_\varepsilon V(x) v_{k-1}^{p-1} & \text{en } \Omega, \\ v_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Las soluciones de estos problemas forman una sucesión creciente $\{v_k\}$ tal que

$$\phi_1 \leq v_k \leq v_{k+1} \leq u.$$

Pasando al límite, se obtiene una solución $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \lambda_\varepsilon V(x) w^{p-1} \qquad \text{en } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases}$$

Pero esto es imposible para ε suficientemente pequeño, ya que el primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso en $L^q(\Omega)$ y dato de borde cero es aislado (véase teorema 1.9.7 en el apéndice de este capítulo). ∎

Este argumento también demuestra la no existencia de soluciones positivas de (1.1) para λ suficientemente grande cuando V cambia de signo en Ω:

Corolario 1.6.2 *Supóngase que $V \in L^q(\Omega)$, V cambia de signo en Ω y existe una bola $B \subset \Omega$ tal que $V(x) > 0$ para $x \in B$. Si*

$$\lambda > \max\left\{\lambda_1, \lambda_1\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\right\}$$

entonces (1.1) no tiene soluciones positivas.

Demostración. Sea w_1 una autofunción positiva correspondiente a λ_1 en B con $||w_1||_\infty \leq 1$. Tomando $\lambda_\varepsilon = \lambda_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y suponiendo que el problema (1.1) tiene una solución positiva u para

$$\lambda > \max\left\{\lambda_1, \lambda_1\left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1}\right\},$$

entonces, para ε pequeño, se tiene ($\lambda_\varepsilon < \lambda$):

$$\lambda_\varepsilon x^{p-1} < \lambda e^x, \qquad \forall x \geq 0,$$

$$-\Delta_p w_1 = \lambda_1 V {w_1}^{p-1} < \lambda_\varepsilon V < \lambda V \leq \lambda V e^u = -\Delta_p u \qquad \text{en } B,$$

$$w_1 = 0 \leq u \qquad \text{en } \partial B.$$

Usando el *principio de comparación débil* se obtiene $w_1 \leq u$. Usando el argumento de la prueba del teorema 1.6.1, se obtiene una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \lambda_\varepsilon V(x) w^{p-1} \qquad \text{en } B, \\ w|_{\partial B} &= 0. \end{cases}$$

Pero esto es imposible para ε suficientemente pequeño, ya que el primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso en $L^q(B)$ es aislado (véase teorema 1.9.7 en el apéndice de este capítulo). ∎

1.7 Análisis de soluciones radiales positivas en la bola unidad

En esta sección se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u &=& \lambda r^l e^u \quad \text{en } B_1 \subset I\!R^N,\ l \in I\!R,\ r = |x|, \\ u|_{\partial B_1} &=& 0, \end{array} \right. \tag{1.11}$$

donde B_1 denota la bola unidad centrada en el origen de $I\!R^N$ y $\lambda > 0$. En particular, se estudiará la existencia de soluciones singulares positivas, por lo que se considerará sólo el caso $1 < p < N$, debido a que, según la proposición 1.1.1, toda solución singular para $p \geq N$ es regular. En estas hipótesis, es fácil probar la no existencia de soluciones singulares para algunos valores de l:

Si se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p v &=& \lambda r^l \quad \text{en } B_1 \subset I\!R^N, \\ v|_{\partial B_1} &=& 0, \end{array} \right.$$

con $-N < l < -p$, $\lambda > 0$ y se buscan soluciones $v(r) = \beta r^\gamma$, se tiene que

$$\gamma = \frac{l+p}{p-1}, \quad \lambda = (-\beta\gamma)^{p-1}\left[(p-1)(\gamma-1) + N - 1\right], \quad \beta > 0,$$

y por tanto la solución v no está acotada para $-p < l < -N$. Para $l = -p$ se puede tomar

$$v(r) = \beta \log r,$$

obteniendo $\beta = -(\lambda/(N-p))^{1/(p-1)}$ y así v es también no acotada.

Si se supone ahora que u es una solución positiva singular de (1.11), es decir, $u \in W_0^{1,p}(B_1)$, $r^l e^u \in L^1(B_1)$, donde $-N < l < -p$, entonces

$$-\Delta_p u = \lambda r^l e^u \geq \lambda r^l = -\Delta_p v,$$

o sea, $u \geq v$. Pero esto lleva a una contradicción, ya que

$$r^l e^u \geq r^l e^v \notin L^1(B_1).$$

Por otra parte, si $l \leq -N$ entonces el potencial $V(r) = r^l$ no pertenece a $L^1(B_1)$. Luego se supondrá directamente que $l > -p$, independientemente de la dimensión. El análisis se hará estudiando el plano de fases que resulta del cambio de variables

$$\begin{array}{rcl} s &=& \log r, \\ v(s) &=& |u_s|^{p-2} u_s, \\ w(s) &=& -\lambda e^{u+(l+p)s}, \end{array}$$

donde u es una solución radial positiva de (1.11) (véase **[50]**), es decir, u verifica

$$r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + r^l e^u = 0, \qquad u(1) = 0.$$

En el plano (v, w) las soluciones radiales de (1.11) satisfacen el siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{ds} &= w - (N-p)v, \\ \dfrac{dw}{ds} &= (l + p + |v|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sign}(v))w. \end{cases} \tag{1.12}$$

Por definición de las nuevas variables, la región de interés para las soluciones radiales regulares positivas ($u'(0) = 0$) es $v < 0$, $w < 0$ (u' es negativa para $r > 0$, ya que $(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' \le 0$). En esta región se hallan dos puntos estacionarios: $P_1(0,0)$ y $P_2(-(l+p)^{p-1}, -(l+p)^{p-1}(N-p))$.

El punto P_1 es un punto hiperbólico inestable. El eje v es la variedad estable para este punto, y la variedad inestable es tangente a la recta $w = (l+N)v$ (véase el *teorema de la variedad estable* **[55]**, Sec. III.6). Respecto al punto P_2, es

(a) Un nodo estable si $N \ge p + 4(l+p)/(p-1)$.

(b) Un punto espiral estable si $N < p + 4(l+p)/(p-1)$.

(obsérvese que si $l = 0$, entonces el valor que marca la diferencia de comportamientos coincide con el que aparece en la nota 1.4.8).

Se puede ver también que una solución singular de (1.11) es

$$S(x) = \log\left(\frac{1}{|x|^{l+p}}\right),$$

con λ igual a $\tilde{\lambda} = (l+p)^{p-1}(N-p)$. Esta solución singular corresponde al punto crítico P_2 en el plano de fases, y verifica la interesante propiedad:

$$|x|^l e^{S(x)} = \frac{1}{|x|^p}$$

para todo $l > -p$.

Se necesitan algunos lemas previos, cuyas pruebas son similares a las de **[50]**, por lo que se omiten.

Lema 1.7.1 *Sea u una solución radial de (1.11) y sea (v, w) la trayectoria correspondiente del sistema autónomo (1.12). Entonces, u es una solución regular de (1.11) ($\lim_{s\to-\infty} u(s) = A < \infty$) si y sólo si $\lim_{s\to-\infty}(v(s), w(s)) = (0,0)$.*

Lema 1.7.2 *La única trayectoria del sistema autónomo (1.12) correspondiente a una solución de (1.11) tal que $\lim_{s\to-\infty} u(s) = \infty$ es el punto crítico P_2.*

Sea $\underline{u}(\lambda)$ la solución minimal de (1.11), $\lambda_* = \sup\{\lambda : (1.11) \text{ tiene solución}\}$. Entonces, se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.7.3 *(i) Si $N \geq p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\lambda_* = \tilde{\lambda}$, para cada $\lambda < \lambda_*$ se tiene una única solución regular, y $\lim_{\lambda \to \lambda_*} \underline{u}(\lambda) = u_*$ es una solución singular.*

(ii) Si $p < N < p + 4(l+p)/(p-1)$ entonces $\tilde{\lambda} < \lambda^*$, y para $\lambda = \tilde{\lambda}$, existen infinitas soluciones radiales regulares, cuyos valores en el origen tienden a infinito.

Además, en el caso (ii), $\lim_{\lambda \to \lambda^*} \underline{u}(\lambda) = u_* \in L^\infty$, y existe una constante positiva, $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $0 < |\lambda - \tilde{\lambda}| < \varepsilon_0$ entonces el problema correspondiente (1.11) tiene una familia finita de soluciones radiales.

Demostración. En el caso (i) se demuestra que la trayectoria que une P_1 con P_2, denotada por ψ, es una curva monótona contenida en la región $-(l+p)^{p-1} < v < 0$, $-(l+p)^{p-1}(N-p) < w < 0$. Así, existe un único punto de intersección para cada recta $w = -\lambda$, i.e., existe una única solución radial regular para cada $\lambda \in (0, (l+p)^{p-1}(N-p))$.

En primer lugar, es fácil ver que ψ está por debajo de la recta $w = (N-p)v$. Se necesita una cota inferior para ψ; para ello, se consideran dos casos diferentes.

Si $N \geq \max\{p + 4(l+p)/(p-1), 3p + 2l\}$, y R es la recta

$$w = \frac{N-p}{2} v - (l+p)^{p-1} \frac{N-p}{2},$$

se demostrará que $dw/dv < (N-p)/2$ a lo largo de R, siempre que $-(l+p)^{p-1} < v < 0$. De esta forma las trayectorias (v, w) del plano de fases deben cruzar R desde abajo; esto implica que ψ no puede cortar R, ya que arranca por encima.

Luego, basta probar que

$$\frac{dw}{ds} - \frac{N-p}{2}\frac{dv}{ds} > 0$$

cuando $(v, w) \in R$, $-(l+p)^{p-1} < v < 0$ (nótese que $dv/ds < 0$ en la región $-(l+p)^{p-1} < v < 0$, $-(l+p)^{p-1}(N-p) < w < (N-p)v$). Así

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds} - \frac{N-p}{2}\frac{dv}{ds} &= \frac{N-p}{2}((l+p)^{p-1} - |v|) \\ &\left(\frac{N-p}{2} + (l+p-|v|^{\frac{1}{p-1}}) - 2(l+p)^{p-1} \frac{l+p-|v|^{\frac{1}{p-1}}}{(l+p)^{p-1} - |v|} \right).\end{aligned}$$

El factor $((l+p)^{p-1} - |v|)$ es positivo; si se escribe $t = |v|^{1/(p-1)}/(l+p)$, y se supone $1 < p < 2$, la función $(1-t)/(1-t^{p-1})$ es creciente en $(0,1)$. Se obtiene (recuérdese que $N \geq p + 4(l+p)/(p-1)$).

$$\frac{N-p}{2} + (l+p)(1-t) - 2(l+p)\frac{1-t}{1-t^{p-1}} > \frac{N-p}{2} - \frac{2(l+p)}{p-1} > 0.$$

Si $p > 2$, entonces

$$\frac{N-p}{2} + (l+p)(1-t) - 2(l+p)\frac{1-t}{1-t^{p-1}} = \frac{1}{1-t^{p-1}} f(t),$$

donde $f(t)$ es

$$f(t) = (l+p)t^p - \left(\frac{N+p+2l}{2}\right)t^{p-1} + (l+p)t + \frac{N-3p-2l}{2}$$

para $t \in (0,1)$. Esta función verifica las siguientes propiedades:

(a) $f(0) = (N-3p+2l)/2 > 0$, $f'(0) = l+p > 0$.

(b) $f(1) = 0$ y $f'(1) \leq 0$ ya que $N \geq p + 4(l+p)/(p-1)$.

(c) f tiene dos puntos críticos, el primero entre 0 y 1, el segundo mayor o igual a 1.

Esto implica que

$$\frac{dw}{ds} - \frac{N-p}{2}\frac{dv}{ds} > 0$$

cuando $(u,v) \in R$, $-(l+p)^{p-1} < v < 0$, y por tanto la trayectoria ψ no puede cortar a R.

Cuando $p + 4(l+p)/(p-1) \leq N < 3p+2l$, se debe hacer un argumento diferente. Se considera ahora la curva

$$f(v) = -(l+p)^{(p-1)/2}(N-p)|v|^{1/2},$$

contenida en la región $-(l+p)^{p-1} < v < 0$. Entonces f verifica

(a) $f(0) = 0$, $f(-(l+p)^{p-1}) = -(l+p)^{p-1}(N-p)$ es decir, f conecta los dos puntos singulares del plano de fases.

(b) f es creciente y convexa en $(-(l+p)^{p-1}, 0)$.

(c) $dw/dv < f'(v)$ en $(v, f(v))$.

Se sigue que f es una cota inferior para la trayectoria ψ, lo que concluye el análisis para i).

En el caso *ii*) la recta $w = -\lambda$ cruza la variedad ψ infinitas veces. Reparametrizando s, cada punto de intersección s_j corresponde a una solución radial de (1.11) de forma que para $s=0$ se tiene un valor inicial s_j. El resto de la prueba es una consecuencia del análisis llevado a cabo en esta sección. ■

1.8 Observaciones sobre el problema de evolución asociado

El problema de evolución asociado al problema (1.11) es

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda|x|^l e^u, & t>0,\ x\in B_1,\\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0, & x \in B_1,\\ u(x,t) &= 0, & \text{en } \partial B_1 \times (0,\infty), \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y $l > -p$. El caso $p=2$, $l=0$ fue estudiado en **[75]**. Los resultados obtenidos en este caso son fácilmente adaptables para $l \neq 0$. En este caso se pueden emplear los resultados de **[45]** para concluir que las soluciones estacionarias no pueden estar ordenadas, es decir, todas cortan a la solución minimal para las dimensiones pequeñas. Para las dimensiones grandes, la solución singular es un atractor de todas las soluciones del problema de evolución con dato inicial por debajo de la solución singular. Otros resultados sobre el problema con $p = 2$ pueden verse en **[28]**. El estudio para $p \neq 2$ será objeto de futuras investigaciones.

1.9 Apéndice: aislamiento del primer autovalor de $-\Delta_p$

Sea Ω un dominio acotado con frontera lisa y supóngase $V(x) \geq 0$, $V(x) \in L^q(\Omega)$ ($q \geq 1$ si $p > N$, $q > N/p$ si $p \leq N$), con $|\{x \in \Omega : V(x) > 0\}| \neq 0$.

Considérese, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \not\equiv 0$ el problema ($1 < p < \infty$):

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda V(x)|u|^{p-2}u, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Definición 1.9.1 *Se dice que λ es un autovalor si (1.13) admite una solución. Tal solución es una autofunción correspondiente al autovalor λ.*

Ahora se define el primer autovalor del operador $-\Delta_p$ con peso V en Ω y dato de borde cero, λ_1, como

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx : w \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega V(x)|w|^p \, dx = 1 \right\}.$$

Este problema se ha estudiado en **[13]**, **[18]** y **[65]** con $V \in L^\infty$. Este apéndice se dedica a comprobar que el resultado es también válido en el caso $V \in L^q$, con q en las hipótesis anteriores, probando el siguiente resultado

Teorema 1.9.2 *El primer autovalor de $-\Delta_p$ con peso V en Ω y dato de borde cero es aislado y simple.*

La prueba de este teorema se divide en varios lemas, siguiendo los argumentos de **[65]**, por lo que se concentra la atención sólo en aquellos puntos que necesitan algún cambio.

Lema 1.9.3 *λ_1 es un autovalor, y toda autofunción u_1 correspondiente a λ_1 no cambia de signo en Ω: ó $u_1 > 0$ ó $u_1 < 0$.*

Lema 1.9.4 *Si w es una autofunción correspondiente al autovalor λ, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \lambda_1$, entonces w cambia de signo en Ω: $w^+ \not\equiv 0$, $w^- \not\equiv 0$ y*

$$|\Omega^-| \geq (\lambda \, ||V||_q \, C^p)^\sigma$$

donde $\Omega^- = \{x \in \Omega : w(x) < 0\}$, $\sigma = -2q'$ si $p \geq N$, $\sigma = -qN/(qp - N)$ si $1 < p < N$.

Demostración. Multiplicando la ecuación que verifica w por w^-, se tiene

$$||\nabla w^-||_p^p = \lambda \int_\Omega V(x)(w^-)^p \, dx \leq \lambda \, ||V||_q \, || \, (w^-)^p \, ||_\alpha \, |\Omega^-|^{1/\beta},$$

con $1/q + 1/\alpha + 1/\beta = 1$. Ahora se consideran dos casos

(i) $p \geq N$. Por la *desigualdad de Sobolev* $||\ (w^-)^p\ ||_\alpha = ||w^-||^p_{\alpha p} \leq C^p ||\nabla w^-||^p_p$ $(\alpha > 1)$. Así, si se toma $\alpha = \beta = 2q'$, entonces
$$|\Omega^-| \geq (\lambda\, ||V||_q\, C^p)^{-2q'}.$$

(ii) $1 < p < N$. Se toma $\alpha = N/(N-p)$, $\beta = qN/(qp-N)$ $(||(w^-)^p||_\alpha = ||w^-||^p_{p^*}$, donde $p^* = Np/(N-p))$. Por la *desigualdad de Sobolev*
$$||\nabla w^-||^p_p \leq \lambda\, ||V||_q\ ||\ w^-\ ||^p_{p^*}\ |\Omega^-|^{(qp-N)/(qN)} \leq \lambda\, ||V||_q\, C^p\, ||\nabla w^-||^p_p\, |\Omega^-|^{(qp-N)/(qN)}.$$

Por tanto
$$|\Omega^-| \geq (\lambda\, ||V||_q\, C^p)^{-qN/(qp-N)}.$$

■

Nota 1.9.5 Si $q' \to 1\, (q \to \infty)$, se obtiene la estimación de Anane (véase **[13]**, Prop. 2). ■

Nota 1.9.6 Como se prueba en **[65]**, estos resultados pueden extenderse también a cualquier dominio acotado, sin hipótesis de regularidad en su frontera. ■

En las hipótesis del lema 1.9.4 se obtiene el siguiente teorema, cuya prueba sigue la de **[13]**, importante de cara a las aplicaciones.

Teorema 1.9.7 *λ_1 es aislado; es decir, λ_1 es el único autovalor en $[0, a]$ para algún $a > \lambda_1$.*

Demostración. Sea $\lambda \geq 0$ un autovalor y sea v la correspondiente autofunción. Por la definición de λ_1 (es el ínfimo) se tiene $\lambda \geq \lambda_1$. Entonces, λ_1 es aislado por la izquierda.

Ahora se argumenta por contradicción. Supóngase que existe una sucesión de autovalores (λ_k), $\lambda_k \neq \lambda_1$ que convergen a λ_1. Sean u_k las correspondientes autofunciones con $||\nabla u_k||_p = 1$. Se puede así tomar una subsucesión, denotada de nuevo por u_k, que converge débilmente en $W^{1,p}_0$, fuertemente en $L^p(\Omega)$ y en casi todo punto en Ω a una función $u \in W^{1,p}_0$. Entonces, si $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$, se pueden hallar α y β adecuados de forma que, por la *desigualdad de Hölder*,
$$\begin{aligned} ||V(|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{||u||_{W^{1,p}_0(\Omega)=1}} \left| \int_\Omega V(|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u)\varphi \right| \\ &\leq ||V||_\alpha ||\,|u_k|^{p-2}u_k - |u|^{p-2}u||_\beta ||\varphi||_{p^*} \to 0. \end{aligned}$$

Como $u_k = -\Delta_p^{-1}(\lambda_k V |u_k|^{p-2}u_k)$, la subsucesión u_k converge fuertemente en $W^{1,p}_0$ por la continuidad del operador Δ_p^{-1}, y por consiguiente u es la autofunción correspondiente al primer autovalor λ_1 con norma igual a 1. Así pues, aplicando el *teorema de Egorov* (**[27]**, Teorema IV.28), u_k converge uniformemente a u en el exterior de un conjunto de medida arbitrariamente pequeña. Entonces, hay un trozo de Ω de medida arbitrariamente pequeña en cuyo exterior u_k es positiva para k suficientemente grande, obteniendo una contradicción con el lema 1.9.4. ■

Capítulo 2

Explosión para un problema elíptico crítico con crecimiento exponencial

2.1 Introducción

En el Capítulo 1 se estudiaron diversos tipos de problemas de Dirichlet en un dominio acotado $\Omega \subset I\!R^N$ involucrando crecimiento exponencial con dato cero en $\partial\Omega$. Este capítulo se dedica a la descripción de la *pérdida de compacidad* de sucesiones de soluciones de las ecuaciones

$$-\Delta_N u_k = V_k(x)e^{u_k} \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N,$$

bajo hipótesis convenientes.

Más precisamente, se consideran sucesiones de soluciones de los problemas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_N u_k & = & V_k(x)e^{u_k} \quad \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} & = & g_k, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular en $I\!R^N$, $N \geq 2$, y los potenciales V_k (en general positivos, aunque en ocasiones podrán cambiar de signo) son datos en $L^q(\Omega)$, $1 < q \leq \infty$. Sobre los datos de borde g_k se supone que son trazas de funciones de $W^{1,N}(\Omega)$. Hay que tener presente a lo largo de este capítulo que el concepto de solución del problema (2.1) que se empleará será, a no ser que se indique lo contrario, el de **solución singular** en el sentido siguiente.

Definición 2.1.1 *Se dice que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es* **solución singular** *de (2.1) si $V_k(x)e^{u_k} \in L^1(\Omega)$ y verifica la ecuación en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Como se indicaba en la Introducción de esta Memoria, *toda solución singular es una solución débil* y por tanto es aplicable en este contexto el *principio de comparación débil.*

En particular, se estudia el comportamiento de *la norma L^∞ de tales sucesiones de soluciones de (2.1) con respecto a estimaciones uniformes de las normas L^q de los potenciales V_k y de e^{u_k} en $L^{q'}$, $1/q + 1/q' = 1$,* como se precisa en el principal resultado de este capítulo y que se enuncia a continuación.

Teorema 2.1.2 *(Explosión) Sea u_k una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \qquad en\ \Omega$$

donde, para algún q, $1 < q \leq \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, se verifica:

$$\begin{array}{rcl} V_k & \geq & 0 \ en\ \Omega, \\ ||V_k||_q & \leq & C_1, \\ ||e^{u_k}||_{q'} & \leq & C_2. \end{array}$$

Entonces, existe una subsucesión u_{k_l} verificando una de las tres alternativas siguientes:

(i) u_{k_l} está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

(ii) $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

(iii) El conjunto de explosión $\mathcal{S}$ relativo a la subsucesión u_{k_l} es finito, no vacío y $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega \setminus \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S}$ se define como

$$\mathcal{S} = \{x \in \Omega : \text{ existe una sucesión } x_{k_l} \in \Omega \text{ tal que } x_{k_l} \to x \text{ y } u_{k_l}(x_{k_l}) \to \infty\}.$$

Además, en el caso (iii) la sucesión $V_{k_l} e^{u_{k_l}}$ converge en el sentido de las medidas a $\Sigma \alpha_i \delta_{a_i}$ donde $\mathcal{S} = \cup\{a_i\}$ y $\alpha_i \geq C_N(N/q')^{N-1}$, C_N denotando la medida de la esfera unidad en $I\!R^N$.

El caso $N = 2$ fue estudiado en **[30]**; este problema aparece por ejemplo, en geometría Riemanniana (véanse **[29]**, **[30]** y las referencias allí contenidas). Recientemente este tipo de argumentos de compacidad han sido utilizados para estudiar variacionalmente *problemas no locales* que aparecen en ciertas teorías *gauge* y que se reducen a dimensión dos (véase **[84]**).

En dimensión $N > 2$ el problema se complica debido a la no linealidad del operador diferencial $-\Delta_N$. En **[79]**, se considera el problema con segundo miembro igual a u^q, y se estudia el comportamiento cualitativo para $q \to \infty$.

El estudio de la pérdida de compacidad permite estimar valores de energía para los cuales se tienen condiciones de Palais-Smale locales. Éste es el interés fundamental de este tipo de problemas, de cara a poder estudiar las propiedades de compacidad en funcionales asociados a problemas no locales que, como es sabido, aparecen en muchos problemas provenientes de la Física Matemática. Por esta última razón el Teorema 2.1.2 se puede interpretar como un resultado de concentración-compacidad en el sentido de los resultados de P.L. Lions en **[67]** y **[68]**.

El capítulo está organizado como sigue. En primer lugar, se demuestran algunas estimaciones a priori. Debido a que se considerarán segundos miembros integrables, *algunas estimaciones fundamentales se harán en el contexto de las soluciones llamadas de entropía en el sentido definido en* **[20]**. Dichas estimaciones fueron obtenidas en **[2]**.

Por conveniencia del lector, al final del capítulo se encuentra un apéndice donde, siguiendo las ideas en **[20]**, se detallan las estimaciones necesarias para la construcción de las soluciones de entropía para problemas con segundo miembro en L^1 y dato de frontera no nulo.

Posteriormente, se presentan varios resultados relativos a la norma L^∞ de las soluciones y sucesiones de soluciones de (2.1), los cuales permiten demostrar el Teorema de Explosión en la última sección. Para estos resultados véase también **[5]**.

2.2 Estimaciones a priori para soluciones de entropía

Se considera el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_N u & = & f & \text{en } \Omega \subset I\!\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array} \right. \tag{2.2}$$

donde $N \geq 2$ y $f \in L^1(\Omega)$. El sentido de la solución en este problema es el siguiente. Sea la función de truncamiento

$$T_k(s) = \left\{ \begin{array}{lll} s & \text{si} & |s| \leq k, \\ k\dfrac{s}{|s|} & \text{si} & |s| > k. \end{array} \right.$$

Se dice que $u \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ si u es una función medible tal que, para cada $k > 0$, la función truncada $T_k(u) \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Obsérvese que el problema (2.2) con dato $T_k(f)$ se puede resolver empleando el método variacional clásico. La prueba de cómo pasar al límite en la sucesión $\{u_k\}$ de las soluciones puede verse en **[20]**, **[24]** y en el apéndice a este capítulo. La solución u así obtenida verifica la ecuación en sentido de distribuciones, $u \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ y además satisface la llamada *condición de entropía* que da la unicidad en dicha clase (véase **[20]** y el apéndice al final de este capítulo para el significado de tal condición y otros detalles).

En primer lugar, se demuestra la siguiente estimación a priori.

Teorema 2.2.1 *Sea u solución de entropía del problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_N u & = & f & \text{en } \Omega \subset I\!\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0, & \end{array} \right. \tag{2.3}$$

donde $N \geq 2$ y $f \in L^1(\Omega)$. Entonces,

$$\int_\Omega \exp\left[\frac{(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)|u(x)|}{||f||_1^{1/(N-1)}}\right] dx \leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|\Omega| \qquad \forall \delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)}). \tag{2.4}$$

La estimación (2.4) se obtuvo en **[30]** para el caso semilineal, i.e., $N = 2$. Para $N \geq 2$, ha sido demostrada en **[2]** de la forma que se detalla a continuación (véase también **[79]**).

Lema 2.2.2 *Si u es una solución de entropía del problema (2.3), entonces*

$$\frac{1}{a}\int_{\{k<|u|\leq k+a\}} |\nabla u|^N \, dx \leq ||f||_1$$

para todo $a > 0$.

(Este lema es una versión particular del corolario 3.4 de **[20]** para $-\Delta_N u$).

Demostración. Se sabe que $T_k(u) \in W_0^{1,N}(\Omega)$ y entonces

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^N \, dx = \int_{\{|u|\leq k\}} |\nabla u|^{N-2}\langle \nabla u, \nabla u\rangle \, dx \leq \int_\Omega T_k(u) f \, dx \leq k||f||_1 \quad \forall k > 0.$$

Si se toma $a > 0$ y $G_{k,a}(u) = T_{k+a}(u) - T_k(u)$, se observa que $G_{k,a}(u) \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $|G_{k,a}(u)| \leq a$ y

$$\nabla G_{k,a}(u) = \begin{cases} \nabla u & k < |u| \leq k+a, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así, tomando como función *test* $G_{k,a}(u)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \langle \nabla u, \nabla G_{k,a}(u) \rangle \, dx = \int_{\{k<|u|\leq k+a\}} |\nabla u|^N \, dx = \int_\Omega f G_{k,a}(u) \, dx \leq a||f||_1,$$

es decir,

$$\frac{1}{a} \int_{\{k<|u|\leq k+a\}} |\nabla u|^N \, dx \leq ||f||_1$$

para todo $a > 0$. ∎

Lema 2.2.3 *Si* $u \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ *y*

$$\frac{1}{a} \int_{\{k<|u|\leq k+a\}} |\nabla u|^N \, dx \leq M$$

para todo $a > 0$, *entonces*

$$\Phi_u(k) \leq \Phi_u(k_0) e^{-(k-k_0)/A_N},$$

donde Φ_u *es la función de distribución de* u, *definida por* $\Phi_u(k) = |\{x \in \Omega : |u(x)| > k\}|$, *y donde* $A_N = (M/C_N)^{1/(N-1)}/N$.

Demostración. Sean $k > 0$, $\varepsilon > 0$; si

$$H_{k,\varepsilon}(u) = \frac{1}{\varepsilon} G_{k,\varepsilon}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } |u| \leq k, \\ \dfrac{|u|-k}{\varepsilon} & \text{si } k < |u| \leq k+\varepsilon, \\ 1 & \text{si } |u| > k+\varepsilon, \end{cases}$$

se tiene

$$\Phi_u(k+\varepsilon) = |\{|u| > k+\varepsilon\}| = \int_{\{|u|>k+\varepsilon\}} dx \leq \int_\Omega |H_{k,\varepsilon}(u)|^s \, dx \tag{2.5}$$

para toda $s > 1$. Entonces, si $s = N/(N-1)$, $\Phi_u(k+\varepsilon) \leq \int_\Omega |H_{k,\varepsilon}(u)|^{N/(N-1)} \, dx$.

Por otra parte, ya que Ω es acotado, se tiene $H_{k,\varepsilon}(u) \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Luego, por la *desigualdad de Sobolev*

$$S_N ||H_{k,\varepsilon}(u)||_{N/(N-1)} \leq ||\nabla H_{k,\varepsilon}(u)||_1 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}} |\nabla u| \, dx, \tag{2.6}$$

donde $S_N = (N^{N-1} C_N)^{1/N}$ (véase **[52]**). Por la *desigualdad de Hölder*

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}} |\nabla u| \, dx \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}} |\nabla u|^N \, dx \right)^{1/N} \left(\frac{|\{k < |u| \leq k+\varepsilon\}|}{\varepsilon} \right)^{(N-1)/N}. \tag{2.7}$$

Entonces, combinando (2.5), (2.6) y (2.7), se llega a

$$\begin{aligned}(\Phi_u(k+\varepsilon))^{(N-1)/N} &\leq ||H_{k,\varepsilon}(u)||_{N/(N-1)} \leq \frac{1}{S_N}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}} |\nabla u|\, dx\right) \\ &\leq \frac{1}{S_N}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}} |\nabla u|^N\, dx\right)^{1/N}\left(\frac{|\{k<|u|\leq k+\varepsilon\}|}{\varepsilon}\right)^{(N-1)/N}.\end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\Phi_u(k+\varepsilon) \leq \left(\frac{M}{S_N^N}\right)^{1/(N-1)} \frac{\Phi_u(k)-\Phi_u(k+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{N}\left(\frac{M}{C_N}\right)^{1/(N-1)} \frac{\Phi_u(k)-\Phi_u(k+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene $\Phi_u(k) \leq -A_N \Phi'_u(k)$; en otras palabras, $\Phi_u(k) \leq \Phi_u(k_0)e^{-(k-k_0)/A_N}$. ∎

Corolario 2.2.4 $\Phi_u(k) \leq |\Omega| \exp\left[-N(C_N/||f||_1)^{1/(N-1)}k\right]$

Demostración. Por el lema 2.2.2, se puede tomar $M = ||f||_1$ en el lema 2.2.3. Basta entonces tomar $k_0 = 0$ ya que $\Phi_u(0) = |\Omega|$. ∎

Ahora, se puede probar el teorema 2.2.1

Demostración. (**Teorema 2.2.1**) Sea $C > 0$ una constante que será determinada más adelante. Aplicando el corolario 2.2.4,

$$\begin{aligned}\int_\Omega (e^{C|u|}-1)\, dx &= \int_\Omega \int_0^{|u|} Ce^{Ct}\, dtdx = \int_\Omega \int_0^\infty Ce^{Ct}\chi_{\{|u|>t\}}\, dtdx \\ &= C\int_0^\infty e^{Ct}\int_\Omega \chi_{\{|u|>t\}}\, dxdt = C\int_0^\infty e^{Ct}\Phi_u(t)\, dt \\ &\leq C\int_0^\infty e^{Ct}|\Omega| \exp\left[-N(C_N/||f||_1)^{1/(N-1)}t\right]\, dt.\end{aligned}$$

Es decir

$$\int_\Omega e^{C|u|}\, dx \leq |\Omega| + C|\Omega|\int_0^\infty \exp\left[(C-N(C_N/||f||_1)^{1/(N-1)})t\right]\, dt.$$

Entonces, si $C < N(C_N/||f||_1)^{1/(N-1)}$, la integral $\int_\Omega e^{C|u|}$ es finita. Por tanto, se puede tomar $C = (NC_N^{1/(N-1)} - \delta)/||f||_1^{1/(N-1)}$ para cada $\delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)})$; de esta manera

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\left[\frac{(NC_N^{1/(N-1)}-\delta)|u(x)|}{||f||_1^{1/(N-1)}}\right] dx &\leq |\Omega| + \frac{NC_N^{1/(N-1)}-\delta}{||f||_1^{1/(N-1)}}|\Omega|\int_0^\infty \exp\left[\frac{-\delta t}{||f||_1^{1/(N-1)}}\right] dt \\ &\leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|\Omega|.\end{aligned}$$

∎

Nota 2.2.5 En [**2**] el método de simetrización de Talenti [**85**] proporciona una prueba distinta de este teorema para soluciones de (2.3) en $W_0^{1,N}(\Omega)$ (véase también [**79**]). ■

Como consecuencia del teorema 2.2.1, se tiene el siguiente corolario

Corolario 2.2.6 *Sea u una solución de entropía del problema (2.3). Entonces,*

$$e^{\alpha|u|} \in L^1(\Omega) \qquad \forall \alpha > 0.$$

Demostración. Como $f \in L^1(\Omega)$, se puede escribir $f = f_1 + f_2$, con

$$||f_1||_\infty < C, \qquad ||f_2||_1 < \alpha^{1-N}.$$

Así pues, tomando $G_{k,a}(u)$ como en la demostración del lema 2.2.2

$$\int_{\{k<|u|\le k+a\}} |\nabla u|^N \, dx = \int_\Omega G_{k,a}(u) f_1 \, dx + \int_\Omega G_{k,a}(u) f_2 \, dx \le a \, (C|\Omega| + \alpha^{1-N}),$$

o sea,

$$\frac{1}{a} \int_{\{k<|u|\le k+a\}} |\nabla u|^N \, dx \le C|\Omega| + \alpha^{1-N}.$$

Haciendo $M = C|\Omega| + \alpha^{1-N}$ en la prueba del lema 2.2.3, se obtiene para $\varepsilon > 0$

$$\Phi_u(k+\varepsilon) \le \frac{1}{N} \left(\frac{C|\Omega| + \alpha^{1-N}}{C_N} \right)^{1/(N-1)} \frac{\Phi_u(k) - \Phi_u(k+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene

$$\Phi_u(k) \le -\frac{1}{N} \left(\frac{C|\Omega| + \alpha^{1-N}}{C_N} \right)^{1/(N-1)} \Phi_u'(k) \le \frac{-1}{\alpha N C_N^{1/(N-1)}} \Phi_u'(k).$$

Integrando la última desigualdad se obtiene $\Phi_u(k) \le \Phi_u(k_0) \exp(-\alpha N C_N^{1/(N-1)}(k-k_0))$. Si $k_0 = 0$,

$$\Phi_u(k) \le |\Omega| \exp(-\alpha N C_N^{1/(N-1)} k).$$

Por lo tanto, si se repite el cálculo desarrollado en la prueba del teorema 2.2.1 (nótese que $N C_N^{1/(N-1)} > 1$ para $N \ge 2$)

$$\int_\Omega (e^{\alpha|u|} - 1) \, dx = \alpha \int_0^\infty e^{\alpha t} \Phi_u(t) \, dt \le \alpha |\Omega| \int_0^\infty \exp(\alpha t - \alpha N C_N^{1/(N-1)} t) \, dt < \infty.$$

■

Nota 2.2.7 Como en **[30]**, $||e^{\alpha|u_k|}||_1$ no puede estimarse en términos de α y $||f_k||_1$. Se puede tomar una sucesión de funciones (f_k), $k>0$, con $||f_k||_1 \le 1$ y $f_k \to \delta_{x_0}$, $x_0 \in \Omega$, tal que las correspondientes soluciones u_k verifican $u_k \to u$ conforme $k \to \infty$, donde $u(x) \approx C_N^{-1/(N-1)} \log(1/|x-x_0|)$ (véase **[62]**). De esta manera, si $\alpha \ge NC_N^{1/(N-1)}$ entonces

$$\int_\Omega e^{\alpha|u|}\,dx = \infty.$$

■

A continuación se estudia el problema con dato Dirichlet no nulo,

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= f \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} &= g, \end{cases} \tag{2.8}$$

donde se supone que $g \neq 0$ es tal que el problema

$$\begin{cases} -\Delta_N \varphi &= 0 \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ \varphi|_{\partial\Omega} &= g, \end{cases}$$

tiene una solución $\varphi \in W^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entonces, se puede construir la solución de entropía de (2.8) de forma similar a la de (2.3) ya que la diferencia $u - \varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$; los detalles están incluídos en el apéndice de este capítulo.

El siguiente resultado es una extensión del teorema 2.2.1 para soluciones de entropía del problema (2.8) con condición de borde no homogénea. Esta estimación aparece en **[79]** para soluciones clásicas. La prueba que aquí se presenta es interesante porque en cierto sentido es más simple que la citada anteriormente, ya que, esencialmente, se trata de una adaptación de los resultados de **[2]**. Sea

$$d_N = \inf_{X \neq Y \in I\!R^N} \frac{\langle |X|^{N-2}X - |Y|^{N-2}Y,\, X-Y\rangle}{|X-Y|^N}. \tag{2.9}$$

Así pues d_N es un número positivo que depende de la dimensión y, por la proposición 4.6 de **[79]**, $d_N \ge 2(1/2)^{N-2}/N$. En particular, $d_2 = 1$.

Teorema 2.2.8 *Sea u una solución de entropía del problema (2.8) con $f \in L^1(\Omega)$. Entonces, para cada $\delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)})$,*

$$\int_\Omega \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta) \left(\frac{d_N}{||f||_1} \right)^{1/(N-1)} |u(x) - \varphi(x)| \right] dx \le \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta} |\Omega|.$$

Demostración. Por definición, se sabe que $u - \varphi$ pertenece a $\mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$, es decir, $T_k(u-\varphi) \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $k>0$. Si se toma esta función como función *test* se obtiene

$$\int_{\{|u-\varphi|\le k\}} \langle D_N(\nabla u, \nabla\varphi), \nabla(u-\varphi)\rangle\,dx = \int_\Omega T_k(u-\varphi) f\,dx \le k||f||_1,$$

donde $D_N(\nabla u, \nabla\varphi) = |\nabla u|^{N-2}\nabla u - |\nabla\varphi|^{N-2}\nabla\varphi$, es decir,

$$\int_{\{|u-\varphi|\leq k\}} |\nabla(u-\varphi)|^N\,dx \leq \frac{k||f||_1}{d_N}.$$

Sea $a > 0$; entonces, si se toma la diferencia $G_{k,a}(u-\varphi) = T_{k+a}(u-\varphi) - T_k(u-\varphi)$ como función *test*, se tiene (véase la prueba del lema 2.2.2)

$$\frac{1}{a}\int_{\{k<|u-\varphi|\leq k+a\}} |\nabla(u-\varphi)|^N\,dx \leq \frac{||f||_1}{d_N}.$$

Ahora, siguiendo los cálculos llevados a cabo en la prueba de los lemas 2.2.2 y 2.2.3, se llega a

$$\Phi_{u-\varphi}(k) = |\{x \in \Omega : |u(x) - \varphi(x)| > k\}| \leq |\Omega| \exp\left[-N\left(\frac{d_N C_N}{||f||_1}\right)^{1/(N-1)} k\right].$$

De esta manera, si se sigue la prueba del teorema 2.2.1, se concluye que

$$\int_\Omega \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)\left(\frac{d_N}{||f||_1}\right)^{1/(N-1)} |u(x) - \varphi(x)|\right] dx \leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|\Omega|$$

para cada $\delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)})$. ∎

Corolario 2.2.9 *Si u es como en el teorema 2.2.8, $e^{\alpha|u-\varphi|} \in L^1(\Omega)$, $\forall\alpha > 0$.*

Demostración. Basta seguir la prueba del corolario 2.2.6 y notar que $N(C_N d_N)^{1/(N-1)} > 1$ para $N \geq 2$. ∎

2.3 Resultados previos al teorema de explosión: acotación de soluciones

Para probar el resultado principal de este capítulo, el teorema de explosión, se necesitan algunos resultados previos, válidos para $N \geq 2$, en cuyas pruebas se emplean argumentos de comparación y el *lema de De Giorgi-Stampacchia* **[83]**, además de los resultados de la sección 2.2. Se recuerda que el concepto de solución empleado en esta sección es el de solución singular (véase la introducción de esta Memoria).

Corolario 2.3.1 *Si u es una solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= V(x)e^u \quad \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{cases}$$

con $Ve^u \in L^1(\Omega)$ y $V \in L^q(\Omega)$, $1 < q \leq \infty$, entonces $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demostración. El corolario 2.2.6 con $f = Ve^u$ implica que $e^u \in L^s(\Omega)$, $\forall s < \infty$. Si $q = \infty$, entonces $Ve^u \in L^s(\Omega)$, $\forall s < \infty$. Si $q < \infty$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $Ve^u \in L^{q-\delta}(\Omega)$:

$$\int_\Omega (Ve^u)^{q-\delta}\, dx \le \left(\int_\Omega V^q\, dx\right)^{(q-\delta)/q} \left(\int_\Omega e^{(q(q-\delta)/\delta)u}\, dx\right)^{\delta/q} < \infty.$$

En cualquier caso, se tiene que $Ve^u \in L^{1+\gamma}(\Omega)$, $\gamma > 0$. Por el *lema de De Giorgi-Stampacchia* **[83]**, $u \in L^\infty(\Omega)$. ∎

Nota 2.3.2 El resultado anterior es optimal en el sentido que si $q = 1$, no se puede asegurar que u esté acotada como prueban los ejemplos siguientes.

(A) Si $1 < \beta < N$, entonces la función

$$u(r) = -(N-\beta)\log\left(\log\frac{e}{r}\right), \qquad r = |x|,$$

verifica en la bola unidad B_1 en $I\!R^N$

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= V(r)e^u \quad \text{en } B_1, \\ u|_{\partial B_1} &= 0, \end{cases}$$

con

$$V(r) = -\frac{(N-1)(N-\beta)^{N-1}}{r^N(\log(e/r))^\beta}, \qquad e^u = (\log(e/r))^{-(N-\beta)}.$$

Puede comprobarse que $V \in L^1(B_1)$, y $e^u \in L^\infty(B_1)$, pero $u \notin L^\infty(B_1)$.

(B) Si se toma $\beta > N$, se tiene que $V \in L^1(B_1)$, $Ve^u \in L^1(B_1)$, pero $u^+ \notin L^\infty(B_1)$.

∎

Corolario 2.3.3 *Si $u \in W^{1,N}(\Omega)$ verifica*

$$\begin{cases} -\Delta_N u &\le V(x)e^u \quad \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &\le 0, \end{cases}$$

con $V \in L^q(\Omega)$ y $e^u \in L^{q'}(\Omega)$, $1 < q \le \infty$, entonces $u^+ \in L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Considérese el problema

$$\begin{cases} -\Delta_N w &= V(x)e^u \quad \text{en } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases}$$

Por el *principio de comparación débil*, $u \le w$. El corolario 2.2.6 implica que $e^w \in L^s(\Omega)$, $\forall s < \infty$. En particular, si $s = q' + \delta$, $\delta > 0$, entonces $e^{(q'+\delta)u} \in L^1(\Omega)$; por tanto $V(x)e^u \in L^{1+\gamma}(\Omega)$, $\gamma > 0$, y $w \in L^\infty(\Omega)$, lo que implica que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$. ∎

En el caso de que se tenga una sucesión de soluciones, se puede tener una cota uniforme para la norma L^∞ si el segundo miembro verifica una estimación conveniente.

Corolario 2.3.4 *Sea u_k, $k > 0$, una sucesión de soluciones del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_N u_k &= V_k(x)e^{u_k} \quad \text{en } \Omega, \\ u_k|_{\partial\Omega} &= 0, \end{cases}$$

con $||V_k||_q \leq C$, $1 < q \leq \infty$, y $\int_\Omega |V_k(x)|e^{u_k}\,dx \leq \varepsilon_0 < C_N(N/q')^{N-1}$. Entonces, $||u_k||_\infty \leq C$.

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $NC_N^{1/(N-1)} - \delta > (\varepsilon_0)^{1/(N-1)}(q' + \delta)$. Así, el teorema 2.2.1 implica que

$$C(\delta) \geq \int_\Omega \exp\left[\frac{(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)|u_k|}{||V_k e^{u_k}||_1^{1/(N-1)}}\right] dx \geq \int_\Omega \exp\left[\frac{(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)|u_k|}{\varepsilon_0^{1/(N-1)}}\right] dx > \int_\Omega e^{(q'+\delta)|u_k|} dx.$$

Entonces, e^{u_k} está uniformemente acotada en $L^{q'+\delta}(\Omega)$, y así $V_k e^{u_k}$ está uniformemente acotada en $L^{1+\gamma}(\Omega)$, para algún $\gamma > 0$. Por el *lema de De Giorgi-Stampacchia*, u_k está uniformemente acotada en $L^\infty(\Omega)$. ■

Nota 2.3.5 *La condición $\int_\Omega |V_k|e^{u_k}\,dx \leq \varepsilon_0 < C_N(N/q')^{N-1}$ es crítica.* Se puede hallar una sucesión de soluciones del problema anterior verificando $\int_\Omega |V_k|e^{u_k}\,dx = C_N(N/q')^{N-1}$, $||V_k||_q \leq C$, con $||u_k||_\infty \to \infty$. En efecto, sean f_k, $k > 0$, las funciones definidas en la bola unidad B_1 en $\mathbb{R}^N$ por

$$f_k(x) \equiv \begin{cases} N(N/q')^{N-1}k^N & \text{si } r = |x| < 1/k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Puede comprobarse que las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} -\Delta_N u_k &= f_k \quad \text{en } B_1, \\ u_k|_{\partial B_1} &= 0, \end{cases}$$

vienen dadas por

$$u_k(r) \equiv \begin{cases} \dfrac{N-1}{q'}(1 - (kr)^{N/(N-1)}) + \dfrac{N}{q'}\log k & \text{si } 0 \leq r < \dfrac{1}{k}, \\ -\dfrac{N}{q'}\log r & \text{si } \dfrac{1}{k} \leq r < 1. \end{cases}$$

Si se toma $V_k = f_k e^{-u_k}$, se puede demostrar que $||V_k||_q < \infty$, independientemente de k para $1 < q \leq \infty$, y $||V_k e^{u_k}||_1 = ||f_k||_1 = C_N(N/q')^{N-1}$, pero

$$||u_k||_\infty = u_k(0) = \frac{N\log k + N - 1}{q'} \to \infty \quad \text{si } k \to \infty.$$

■

Además los teoremas 2 y 6 en **[81]** aplicados a la ecuación $-\Delta_N u = f$ en la bola B_R (bola de radio R en $I\!R^N$) toman la forma siguiente.

Teorema 2.3.6 *Sea* $u \in W^{1,N}_{loc}(\Omega)$ *una solución de*

$$-\Delta_N u = f \qquad en \;\; \Omega,$$

donde $f \in L^{N/(N-\varepsilon)}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. *Sea* $B_{2R} \subset \Omega$. *Entonces*

$$||u||_{L^\infty(B_R)} \leq CR^{-1}(||u||_{L^N(B_{2R})} + KR),$$

$$||u^+||_{L^\infty(B_R)} \leq CR^{-1}(||u^+||_{L^N(B_{2R})} + KR),$$

donde $C = C(N, \varepsilon)$ *y* $K = (R^\varepsilon ||f||_{N/(N-\varepsilon)})^{1/(N-1)}$

Teorema 2.3.7 *(Desigualdad de Harnack) Sean* u *y* f *como en el teorema 2.3.6,* u *no negativa, y sea* $B_{3R} \subset \Omega$. *Entonces*

$$\max_{B_R} u \leq C(\min_{B_R} u + K),$$

donde $K = (R^\varepsilon ||f||_{N/(N-\varepsilon)})^{1/(N-1)}$.

A continuación, se demuestran varios resultados en los que no se prescribe el valor en el borde de Ω (se pueden interpretar como resultados de regularidad local, en los que el tamaño del segundo miembro determina en cada caso la acotación de las soluciones).

Lema 2.3.8 *Sea* u_k, $k > 0$, *una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k(x) e^{u_k} \qquad en \;\; \Omega,$$

donde $V_k \geq 0$, *tal que, para* $B_R \subset \Omega$ *y* $1 < q \leq \infty$,

$$\begin{array}{rcl} ||V_k||_{L^q(B_R)} & \leq & C_1, \\ ||u_k^+||_{L^N(B_R)} & \leq & C_2, \end{array}$$

y

$$\int_{B_R} V_k e^{u_k}\, dx \leq \varepsilon_1 < d_N C_N (N/q')^{N-1},$$

donde d_N *está definido en (2.9). Entonces,* $||u_k^+||_{L^\infty(B_{R/4})} \leq C$, $C = C(N, C_1, C_2, R, \varepsilon_1)$.

Demostración. Se toma el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_N \varphi_k & = & 0 \quad \text{en } B_R, \\ \varphi_k|_{\partial B_R} & = & u_k|_{\partial B_R}. \end{array} \right.$$

Entonces, el *principio de comparación débil* implica que $\varphi_k \leq u_k$, es decir, $\varphi_k^+ \leq u_k^+$. En particular $\varphi_k^+ \in L^N(B_R)$. Además, por el teorema 2.3.6 se obtiene que $||\varphi_k^+||_{L^\infty(B_{R/2})} \leq C$, $\forall k > 0$.

Por otra parte, el teorema 2.2.8 implica

$$\int_{B_R} \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)\left(\frac{d_N}{||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_R)}}\right)^{1/(N-1)} (u_k - \varphi_k)\right] dx \leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|B_R|.$$

Pero $u_k \geq \varphi_k$, lo que implica $u_k - \varphi_k \geq u_k^+ - \varphi_k^+$; si se integra en $B_{R/2}$, se tiene

$$\int_{B_{R/2}} \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)\left(\frac{d_N}{||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_R)}}\right)^{1/(N-1)} (u_k^+ - \varphi_k^+)\right] dx \leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|B_R|.$$

Además se sabe que φ_k^+ está uniformemente acotada en esta bola. Luego

$$\int_{B_{R/2}} \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)\left(\frac{d_N}{||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_R)}}\right)^{1/(N-1)} u_k^+\right] dx \leq C(\delta).$$

Ahora, si $(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)d_N^{1/(N-1)} > \varepsilon_1^{1/(N-1)}(q' + \delta)$, se llega a

$$\int_{B_{R/2}} \exp\left[(q' + \delta)u_k^+\right] dx \leq C(\delta),$$

lo que implica que $V_k e^{u_k^+} \in L^{1+\gamma}(B_{R/2})$, $\gamma > 0$. Si se considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta_N w_k &= V_k e^{u_k^+} \quad \text{en } B_{R/2}, \\ w_k|_{\partial B_{R/2}} &= u_k^+|_{\partial B_{R/2}}, \end{cases}$$

se puede aplicar el teorema 2.3.6 para obtener $||w_k||_{L^\infty(B_{R/4})} \leq C$. Ya que $u_k \leq w_k$ se tiene $u_k^+ \leq w_k$. Por tanto

$$||u_k^+||_{L^\infty(B_{R/4})} \leq C,$$

que era lo que se quería demostrar. ■

Lema 2.3.9 *Sea u_k, $k > 0$ una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k(x)e^{u_k} \qquad \text{en } \Omega,$$

donde $||V_k||_q \leq C_1$, $V_k \geq 0$ y $||e^{u_k}||_{q'} \leq C_2$, $1 < q \leq \infty$. Si

$$\int_{B_{R_0}(x_0)} V_k e^{u_k}\, dx < C_N(N/q')^{N-1}$$

(donde $B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$ es la bola de radio R centrada en x_0) entonces existe una bola $B_R(x_0)$, $R \leq R_0$, tal que $V_k e^{u_k} \in L^{1+\gamma}(B_R(x_0))$ uniformemente, $\gamma > 0$, y u_k^+ está uniformemente acotada en $L^\infty(\bar{B}_R(x_0))$.

Demostración. a) La hipótesis $||e^{u_k}||_{q'} \le C_2$ implica $||u_k^+||_{L^N(B_{R_0})} \le C_2$. Sea F el conjunto definido por

$$F = \{x \in \Omega : \int_{B_R(x)} V_k e^{u_k}\, dx \ge d_N C_N (N/q')^{N-1}, \forall B_R(x) \subset B_{R_0}(x_0)\},$$

donde d_N está definido en (2.9). Como

$$\int_{B_{R_0}(x_0)} V_k e^{u_k}\, dx < C_N (N/q')^{N-1},$$

el cardinal de F es finito; si no, se llega a contradicción con la acotación de $V_k e^{u_k}$ en $L^1(B_{R_0}(x_0))$.

Sea m el mínimo de las distancias de x_0 a cada $x \in F$ y tómese la bola $B_{m/2}(x_0)$. Para cada punto $\bar{x} \in \partial B_{m/2}(x_0)$, $\bar{x} \in \Omega \setminus F$, y existe una bola $B_r(\bar{x})$ tal que

$$\int_{B_r(\bar{x})} V_k e^{u_k}\, dx < d_N C_N (N/q')^{N-1}.$$

Por compacidad se puede elegir un radio uniforme $\bar{r}$ para todo $\bar{x} \in \partial B_{m/2}(x_0)$. Ahora el lema 2.3.8 implica que u_k^+ está uniformemente acotada en cada bola $B_{\bar{r}/4}(\bar{x})$ y de nuevo por compacidad, u_k^+ está uniformemente acotada en $\partial B_{m/2}(x_0)$.

b) Por la parte a) existe una bola $B_R(x_0)$ donde u_k^+ está uniformemente acotada en $L^\infty(\partial B_R(x_0))$, i.e. $||u_k^+||_{L^\infty(\partial B_R(x_0))} \le C$, $\forall k > 0$. Considérense los problemas

$$\begin{cases} -\Delta_N w_k &= V_k e^{u_k} \quad \text{en } B_R(x_0), \\ w_k|_{\partial B_R(x_0)} &= C. \end{cases}$$

El *principio de comparación débil* implica que $u_k \le w_k$ en $B_R(x_0)$. Sea $z_k = w_k - C$. Entonces $u_k \le z_k + C$ y

$$\begin{cases} -\Delta_N z_k &= V_k e^{u_k} \quad \text{en } B_R(x_0), \\ z_k|_{\partial B_R(x_0)} &= 0. \end{cases}$$

Así, para cada $\delta \in (0, N C_N^{1/(N-1)})$, por el teorema 2.2.1

$$\int_{B_R(x_0)} \exp\left[\frac{(N C_N^{1/(N-1)} - \delta) z_k}{||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_R(x_0))}^{1/(N-1)}}\right] dx \le \frac{N C_N^{1/(N-1)}}{\delta} |B_R(x_0)|.$$

Pero, por hipótesis, $||V_k e^{u_k}||_{L^1(B_R(x_0))} \le \varepsilon_0 < C_N (N/q')^{N-1}$, de modo que, siguiendo el cálculo llevado a cabo en la prueba del corolario 2.3.4 se tiene

$$C(\delta) \ge \int_{B_R(x_0)} \exp[(q'+\delta) z_k]\, dx \ge e^{-(q'+\delta)C} \int_{B_R(x_0)} \exp[(q'+\delta) u_k]\, dx.$$

Así, $V_k e^{u_k} \in L^{1+\gamma}(B_R(x_0))$ uniformemente, para $\gamma > 0$; o sea, z_k está uniformemente acotada en $B_R(x_0)$ y por tanto u_k^+ está uniformemente acotada en el cierre de esta misma bola. ■

2.4 Teorema de explosión

Esta sección se dedica a la demostración del resultado más importante del capítulo, el teorema de explosión. El comportamiento de explosión se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo. La sucesión

$$u_k(x) = \log \frac{F_N k^N}{(1+(k|x|)^{N/(N-1)})^N}, \qquad k > 0,$$

donde $x \in I\!R^N$ y $F_N = N(N^2/(N-1))^{N-1}$ verifica

$$\begin{array}{rcl} -\Delta_N u_k & = & e^{u_k} \text{ en } I\!R^N, \\ ||e^{u_k}||_{L^1(I\!R^N)} & < & \infty, \\ u_k(x) \to -\infty & & \text{si } k \to \infty \text{ para } x \neq 0 \text{ y} \\ u_k(0) \to +\infty & & \text{si } k \to \infty. \end{array}$$

Si $N = 2$, se obtiene la sucesión usada en **[30]**, a saber,

$$u_k(x) = \log \frac{8k^2}{(1+(k|x|)^2)^2}.$$

Para estudiar el comportamiento de explosión, se necesitarán las siguientes definiciones:

Definición 2.4.1 *Para una sucesión de funciones w_m definidas en Ω, el* **conjunto de explosión** $\mathcal{S}$ **relativo a** w_m *es el conjunto*

$$\mathcal{S} = \{x \in \Omega : \text{ existe una sucesión } x_m \in \Omega \text{ tal que } x_m \to x \text{ y } w_m(x_m) \to \infty\}.$$

Definición 2.4.2 *Sea μ una medida positiva acotada. Se dice que $x_0 \in \Omega$ es* **regular respecto a** μ *si existe $\psi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ en un entorno de x_0, tal que*

$$\int_\Omega \psi \, d\mu < C_N (N/q')^{N-1}.$$

Se denotará por $\Sigma = \{x \in \Omega : x$ no es regular$\}$.

Obsérvese que $x_0 \in \Sigma$ significa que $\int_{B_R(x_0)} d\mu \geq C_N (N/q')^{N-1}$ para todo $R > 0$.

Recordando que el concepto de solución que se empleará en esta sección será el de solución singular, y con estas definiciones, se tienen los siguientes resultados:

Lema 2.4.3 *Sea u_k, $k > 0$, una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \qquad \text{en } \Omega,$$

donde $||V_k||_q \leq C_1$, $V_k \geq 0$, y $||e^{u_k}||_{q'} \leq C_2$, $1 < q \leq \infty$. Si $V_k e^{u_k} \to \mu$, una medida positiva acotada, y $\Sigma = \{x \in \Omega : x$ no es regular$\}$. Entonces

$$\text{card } \Sigma \leq \frac{C_1 C_2}{C_N} \left(\frac{q'}{N}\right)^{N-1}.$$

Demostración. Por definición, $x \in \Sigma$ es equivalente a $\mu(\{x\}) \geq C_N(N/q')^{N-1}$. Como $\int_\Omega d\mu$ está acotada por C_1C_2, se obtiene el resultado. ■

Lema 2.4.4 *En las hipótesis del lema 2.4.3, $\mathcal{S} = \Sigma$.*

Demostración. *Etapa 1* ($\mathcal{S} \subset \Sigma$). Si x_0 es un punto regular, entonces, por el lema 2.3.9, se sabe que u_k^+ está uniformemente acotada en una bola centrada en x_0. En otras palabras, si $x_0 \notin \Sigma$, entonces $x_0 \notin \mathcal{S}$, i.e., $\mathcal{S} \subset \Sigma$.

Etapa 2 ($\Sigma \subset \mathcal{S}$). Si $x_0 \in \Sigma$, entonces se concluye que

$$\forall R > 0, \quad \lim_{k\to\infty} ||u_k^+||_{L^\infty(B_R(x_0))} = \infty.$$

Si no, se podrían hallar $R_0 > 0$ y una subsucesión u_{k_l} tales que

$$||u_{k_l}^+||_{L^\infty(B_{R_0}(x_0))} \leq C.$$

Pero esto implicaría

$$||e^{u_{k_l}}||_{L^\infty(B_{R_0}(x_0))} \leq C,$$

y así

$$\int_{B_R(x_0)} V_{k_l} e^{u_{k_l}} \leq CC_1 R^{N/q'} \qquad\qquad \forall R < R_0,$$

lo que lleva a una contradicción: para ψ adecuada ($\psi \in \mathcal{C}_0(B_{R_0}(x_0))$, $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi \equiv 1$ en un entorno suficientemente pequeño de x_0) se tiene

$$\int_\Omega \psi\, d\mu < C_N(N/q')^{N-1},$$

es decir, x_0 es un punto regular y por tanto $x_0 \notin \Sigma$.

Entonces, si $R > 0$ es lo suficientemente pequeño para asegurar que existe sólo un punto de Σ en $\bar{B}_R(x_0)$, se puede tomar la siguiente sucesión

$$u_k^+(x_k) = \max_{\bar{B}_R(x_0)} u_k^+ \to \infty,$$

y ha de ser $x_k \to x_0$. En efecto, en caso contrario, se podría extraer una subsucesión $x_{k_l} \to \bar{x} \neq x_0$ y $\bar{x} \notin \Sigma$ (por la elección de R). Así, $\bar{x}$ es un punto regular. Pero esto es imposible por el lema 2.3.9, ya que u_k^+ debe estar acotada cerca de un punto regular. Esta última contradicción implica que $x_0 \in \mathcal{S}$. ■

Lema 2.4.5 *En las hipótesis del lema 2.4.3, si $\mathcal{S} = \emptyset$ para la sucesión u_k, entonces se verifica la siguiente alternativa:*

o bien una subsucesión u_{k_l} está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$,

o bien $u_k \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

Demostración. Como $\mathcal{S} = \emptyset$, todos los puntos de Ω son regulares, luego se verifican las hipótesis del lema 2.3.9 y entonces existe una bola $B_R(x_0) \subset \Omega$ tal que $V_k e^{u_k} \in L^{1+\gamma}(B_R(x_0))$ uniformemente, con $\gamma > 0$ y u_k^+ está uniformemente acotada en $L^\infty(B_R(x_0))$, es decir, $u_k^+ \leq C^+$ en $B_R(x_0)$.

Ahora existen dos posibilidades: que la subsucesión $u_{k_l}^-$ esté también uniformemente acotada en $L^\infty(B_R(x_0))$, en cuyo caso se tiene la primera alternativa, o que u_k^- no esté uniformemente acotada en $L^\infty(B_R(x_0))$; tomando $w_k = C^+ - u_k$, donde C^+ es la cota hallada anteriormente para u_k^+ en $B_R(x_0)$, resulta que w_k es una sucesión no acotada en $L^\infty(B_R(x_0))$ de soluciones no negativas de la ecuación $-\Delta_N w_k = -V_k e^{u_k}$. Como $V_k e^{u_k} \in L^{1+\gamma}(B_R(x_0))$ uniformemente, con $\gamma > 0$, aplicando la desigualdad de Harnack (teorema 2.3.7) se tiene (tomando R menor si es preciso)

$$\max_{B_R} w_k \leq C(\min_{B_R} w_k + K).$$

Por tanto, al ser w_k no acotada, la desigualdad anterior implica que $w_k \to \infty$ uniformemente en B_R, es decir, que $u_k \to -\infty$ uniformemente en B_R. ■

Ahora, se demuestra el teorema de explosión

Teorema 2.4.6 *(Explosión) Sea u_k una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \quad \text{en } \Omega$$

donde, para algún q, $1 < q \leq \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, se verifica:

$$\begin{array}{rcl} V_k & \geq & 0 \text{ en } \Omega, \\ ||V_k||_q & \leq & C_1, \\ ||e^{u_k}||_{q'} & \leq & C_2. \end{array}$$

Entonces, existe una subsucesión u_{k_l} verificando una de las tres alternativas siguientes:

(i) u_{k_l} está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

(ii) $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

(iii) El conjunto de explosión $\mathcal{S}$ relativo a la subsucesión u_{k_l} es finito, no vacío y $u_{k_l} \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Además, en el caso (iii) la sucesión $V_{k_l} e^{u_{k_l}}$ converge en el sentido de las medidas a $\Sigma \alpha_i \delta_{a_i}$ donde $\mathcal{S} = \cup\{a_i\}$ y $\alpha_i \geq C_N (N/q')^{N-1}$, C_N denotando la medida de la esfera unidad en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. En primer lugar, debido a la acotación en $L^1(\Omega)$ de $V_k e^{u_k}$, se puede tomar una subsucesión, que se denotará por $V_k e^{u_k}$, que converge en el sentido de las medidas a μ, una medida acotada no negativa.

Como $\mathcal{S} = \Sigma$ (lema 2.4.4), y $\mathcal{S}$ es finito (lema 2.4.3), existen dos posibilidades:

(a) $\mathcal{S} = \emptyset$. En esta situación, cada punto de Ω es un punto regular. El lema 2.4.5 implica que se tienen las alternativas *(i)* o *(ii)*.

(b) $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Si se toma en la prueba del lema 2.4.5 la bola $B_R(x_0) \subset \Omega \setminus \mathcal{S}$, la *desigualdad de Harnack* (teorema 2.3.7) aplicada como en la prueba del lema 2.4.5 da de nuevo la siguiente alternativa:

(b1) una subsucesión u_l está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \mathcal{S})$,

(b2) $u_k \to -\infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

Se prueba a continuación que en estas hipótesis (b1) no puede ocurrir. En efecto, si se toman $x_1 \in \mathcal{S}$ y $R > 0$ suficientemente pequeño de forma que no exista otro punto de $\mathcal{S}$ en $\bar{B}_R(x_1)$, entonces u_l estaría acotada inferiormente en $\partial B_R(x_1)$ por una cierta constante $-C < 0$. Considérense los problemas

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_N w_l & = & V_l e^{u_l} & \text{en } B_R(x_1), \\ w_l|_{\partial B_R(x_1)} & = & -C. & \end{array} \right.$$

El *principio de comparación débil* implica que $w_l \leq u_l$ en $B_R(x_1)$, así que

$$\int_{B_R(x_1)} e^{q' w_l}\, dx \leq \int_{B_R(x_1)} e^{q' u_l}\, dx \leq C_2^{q'}.$$

Nótese que $w_l \to w$ en casi todo punto de $B_R(x_1)$, donde w es la solución del problema (véase **[24]**)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_N w & = & \nu & \text{en } B_R(x_1), \\ w|_{\partial B_R(x_1)} & = & -C. & \end{array} \right. \tag{2.10}$$

siendo ν el límite como medidas de las funciones $f_l = V_l e^{u_l}$. Como $\nu(\{x_1\}) \geq C_N (N/q')^{N-1}$,

$$\nu \geq C_N (N/q')^{N-1} \delta_{x_1} \text{ y } w(x) \geq \frac{N}{q'} \log \frac{1}{|x - x_1|} + O(1) \quad \text{para } x \to x_1,$$

ya que la solución del problema (2.10) cuando el segundo miembro es δ_{x_1} viene dada por

$$C_N^{-1/(N-1)} \log(1/|x - x_1|)$$

(véase **[62]**). Así

$$e^{q' w} \geq C|x - x_1|^{-N}, \quad \text{i.e.} \quad \int_{B_R(x_1)} e^{q' w}\, dx = \infty,$$

y se llega a contradicción, por lo que (b1) no puede ocurrir.

Luego se tiene (b2), que da la alternativa *(iii)* del teorema de explosión. ■

Como corolarios de este teorema, se tienen:

Corolario 2.4.7 *Sea u_k una sucesión de soluciones de*

$$-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k} \quad \textit{en } \Omega$$

donde $V_k \geq 0$ en Ω, $||V_k||_q \leq C_1$ y $||e^{u_k}||_{q'} \leq C_2$. Entonces

a) Si $u_k|_{\partial\Omega} = 0$, entonces u_k está uniformemente acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

b) Si $u_k \geq -M$ en Ω, o $||u_k||_1 \leq M$, $\forall k > 0$, entonces u_k está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Demostración. En estas hipótesis, las alternativas *(ii)* y *(iii)* en el teorema de explosión no pueden ocurrir: por tanto toda la sucesión u_k está acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$. ∎

Corolario 2.4.8 *Si u_k verifica $-\Delta_N u_k = V_k e^{u_k}$, $u_k \geq -M$ en Ω y $0 < a \leq V_k \leq b < \infty$, con a, b constantes positivas, entonces u_k está uniformemente acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$*

Demostración. Sea $\varphi_{1,k}$ la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\mathrm{div}\,(|\nabla u_k|^{N-2}\nabla\varphi_{1,k}) & = & \lambda_{1,k}\varphi_{1,k} \quad \text{en } \Omega, \\ \varphi_{1,k}|_{\partial\Omega} & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.11}$$

donde $\varphi_{1,k} \geq 0$ y

$$\lambda_{1,k} = \inf_{v \in W_0^{1,N}(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u_k|^{N-2}|\nabla v|^2\,dx}{\int\limits_\Omega v^2\,dx}.$$

Si se multiplican por $\varphi_{1,k}$ ambos lados de la ecuación que verifica u_k y se integra dos veces por partes, se tiene, $\forall k > 0$,

$$\begin{array}{rcl} \int\limits_\Omega V_k e^{u_k}\varphi_{1,k}\,dx & = & \int\limits_\Omega (-\Delta_N u_k)\varphi_{1,k}\,dx \\ & = & \int\limits_\Omega u_k(-\mathrm{div}\,(|\nabla u_k|^{N-2}\nabla\varphi_{1,k}))\,dx + \int_{\partial\Omega} u_k|\nabla u_k|^{N-2}\dfrac{\partial\varphi_{1,k}}{\partial\nu}\,d\sigma, \end{array}$$

donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$. Por el *lema de Hopf* la última integral es negativa, ya que se puede suponer que $u_k \geq 0$ (si no, se toma $v_k = u_k + M$ en su lugar, con lo que las hipótesis sobre V siguen siendo similares). Entonces

$$a\int\limits_\Omega e^{u_k}\varphi_{1,k}\,dx \leq \lambda_{1,k}\int\limits_\Omega u_k\varphi_{1,k}\,dx.$$

Por lo cual se tiene una cota superior para $\int\limits_\Omega e^{u_k}\varphi_{1,k}\,dx$, o sea, e^{u_k} está acotada en $L^1_{loc}(\Omega)$. Por el corolario 2.4.7b), u_k está uniformemente acotada en $L^\infty_{loc}(\Omega)$. ∎

Por último, se incluye el siguiente resultado para soluciones en todo $\mathbb{R}^N$ del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_N u & = & e^u \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^u\,dx & < & +\infty \end{array} \right. \tag{2.12}$$

cuya prueba sigue los argumentos que aparecen en **[36]** para $N = 2$.

Corolario 2.4.9 *Si u es una solución del problema (2.12), entonces*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^u\,dx \geq C_N\left(\frac{N^2}{N-1}\right)^{N-1}.$$

Demostración. Sea $\Omega_t = \{x : u(x) > t\}$ para $-\infty < t < +\infty$. Entonces

$$\int_{\Omega_t} e^u\, dx = -\int_{\Omega_t} \Delta_N u\, dx = -\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{N-1}\, ds.$$

Por la fórmula de co-área (véase **[53]**)

$$-\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|}.$$

Así pues, usando las desigualdades de Hölder, Schwarz e isoperimétrica, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{d}{dt}|\Omega_t|\right)^{N-1} \textstyle\int_{\Omega_t} e^u\, dx = \left(\int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|}\right)^{N-1} \left(\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|^{N-1}\, ds\right)\\
&\geq \left(\textstyle\int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|}\right)^{N-1} \left(\int_{\partial\Omega_t} |\nabla u|\, ds\right)^{N-1} |\partial\Omega_t|^{-(N-2)}\\
&\geq |\partial\Omega_t|^{2(N-1)}|\partial\Omega_t|^{-(N-2)} = |\partial\Omega_t|^N \geq C_N N^{N-1}|\Omega_t|^{N-1}.
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} e^u\, dx\right)^{N/(N-1)} = \frac{N}{N-1}\left(\int_{\Omega_t} e^u\, dx\right)^{1/(N-1)} (\exp t)\frac{d}{dt}|\Omega_t| \leq -\frac{N^2}{N-1} C_N^{1/(N-1)}|\Omega_t| \exp t.$$

Integrando de $-\infty$ a $+\infty$,

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^N} e^u\, dx\right)^{N/(N-1)} \leq -C_N^{1/(N-1)} \frac{N^2}{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} e^u\, dx,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^u\, dx \geq C_N \left(\frac{N^2}{N-1}\right)^{N-1}.$$

■

2.5 Apéndice: soluciones de entropía con condición de borde no homogénea

Se considera la función de truncamiento clásica

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si} \quad |s| \leq k, \\ k\dfrac{s}{|s|} & \text{si} \quad |s| > k. \end{cases}$$

Definición 2.5.1 *Se dice que $u \in \mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$ si u es una función medible tal que, para cada $k > 0$, la función truncada $T_k(u) \in W^{1,N}(\Omega)$. $\mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ denotará la compleción de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$.*

Siguiendo exactamente las ideas de **[20]**, se incluye en este apéndice por conveniencia del lector la construcción de soluciones de entropía para el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_N u &= f \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ u|_{\partial\Omega} &= g, \end{cases} \tag{2.13}$$

donde se supone que $f \in L^1$, Ω es un dominio acotado con frontera regular y el dato g verifica que el problema

$$\begin{cases} -\Delta_N \varphi &= 0 \quad \text{en } \Omega \subset I\!R^N, \\ \varphi|_{\partial\Omega} &= g, \end{cases}$$

tiene una solución $\varphi \in W^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado.

De esta manera, si $u \in \mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$ se sabe que la diferencia $u - \varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ (véanse **[20]** y **[15]** donde además se discuten algunos resultados de trazas).

Definición 2.5.2 *Se dice que* $u \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$ *es una* **solución de entropía** *del problema (2.13) si:*

1. $u - \varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$.
2. $\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \langle \nabla u, \nabla \psi \rangle = \int_\Omega f \psi dx$, *para toda* $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
3. *Se verifica*

$$\int_{\{|u-\varphi-\psi| \le k\}} \langle D_N(\nabla u, \nabla \varphi), \nabla(u - \varphi - \psi) \rangle \, dx \le \int_\Omega T_k(u - \varphi - \psi) f \, dx, \qquad k > 0, \tag{2.14}$$

para cada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *y donde* $D_N(\xi, \eta) = |\xi|^{N-2}\xi - |\eta|^{N-2}\eta$, *con* ξ, $\eta \in I\!R^N$.

La condición (2.14) es la condición de entropía, siguiendo la nomenclatura acuñada en **[20]**, *donde se demuestra que esta condición determina la clase donde se verifica la unicidad de solución.*

Las estimaciones que se usarán son las siguientes. Sean $f_k = T_k(f)$, $g_k = T_k(\varphi)|_{\partial\Omega}$, donde T_k es el truncamiento para $k > 0$. Sea φ_k la solución de

$$\begin{cases} -\Delta_N \varphi_k &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \varphi_k|_{\partial\Omega} &= g_k, \end{cases}$$

y sea u_k la solución del problema de Dirichlet (2.13) con segundo miembro f_k y dato en el borde g_k. Entonces, siguiendo la prueba del teorema 2.2.8, para $h > 0$,

$$\Phi_{u_k - \varphi_k}(h) \le |\Omega| \exp\left[-N \left(\frac{C_N d_N}{||f||_1} \right)^{1/(N-1)} h \right], \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{h} \int_{\{|u_k - \varphi_k| \le h\}} |\nabla(u_k - \varphi_k)|^N \, dx \le \frac{||f||_1}{d_N}, \qquad \forall h > 0, \tag{2.16}$$

y, $\forall \delta \in (0, NC_N^{1/(N-1)})$,

$$\int\limits_{\Omega} \exp\left[(NC_N^{1/(N-1)} - \delta)\left(\frac{d_N}{||f||_1}\right)^{1/(N-1)} |u_k(x) - \varphi_k(x)|\right] dx \leq \frac{NC_N^{1/(N-1)}}{\delta}|\Omega|. \tag{2.17}$$

Corolario 2.5.3 *En las hipótesis anteriores, $u_k - \varphi_k \in \mathcal{M}^s(\Omega)$, el espacio de Marcinkiewicz, $\forall s > 1$; es decir, existe $C_1 = C_1(s)$ tal que*

$$|\{|u_k - \varphi_k| > h\}| \leq C_1 h^{-s}.$$

La prueba del siguiente lema se debe a P. Benilan.

Lema 2.5.4 *En las hipótesis anteriores, se tiene, para cada $h > 0$,*

$$|\{|\nabla(u_k - \varphi_k)| > h\}| \leq C_2 h^{-(N-\varepsilon)},$$

donde $C_2 = C_2(N, \Omega, ||f||_1)$, $\varepsilon > 0$, es decir, $|\nabla(u_k - \varphi_k)| \in \mathcal{M}^{N-\varepsilon}(\Omega)$.

Demostración. Sea $w_k = u_k - \varphi_k$. Se sabe que (véase la prueba del lema 2.2.2)

$$\frac{1}{a}\int_{\{h<|w_k|\leq h+a\}} |\nabla w_k|^N \, dx \leq \frac{||f||_1}{d_N}, \qquad \forall a, h > 0.$$

Sean $l, m > 0$. Se define $\Psi_k(l, m) = |\{|w_k| > l, |\nabla w_k|^N > m\}|$. Para $a, h > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\Psi_k(h, m) - \Psi_k(h+a, m) &= |\{|w_k| > h,\, |\nabla w_k|^N > m\}| - |\{|w_k| > h+a,\, |\nabla w_k|^N > m\}| \\ &= |\{h < |w_k| \leq h+a, |\nabla w_k|^N > m\}|.\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^\infty (\Psi_k(h, s) - \Psi_k(h+a, s))\, ds = \int_{\{h<|w_k|\leq h+a\}} |\nabla w_k|^N \, dx \leq \frac{a||f||_1}{d_N}.$$

Como la función $\mu \longrightarrow \Psi_k(h, \mu)$, $\mu > 0$, es no creciente

$$\begin{aligned}\Psi_k(h, \mu) &\leq \frac{1}{\mu}\int_0^\mu \Psi_k(h, s)ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\mu \Psi_k(h+a, s)ds + \frac{1}{\mu}\int_0^\mu (\Psi_k(h, s) - \Psi_k(h+a, s))ds \\ &\leq \Psi_k(h+a, 0) + \frac{a||f||_1}{\mu d_N}.\end{aligned}$$

Si $h \to 0$,

$$\Psi_k(0, \mu) \leq |\{|w_k| > a\}| + \frac{a||f||_1}{\mu d_N}, \qquad \forall a, \mu > 0.$$

Haciendo ahora $\mu = \lambda^N$, se obtiene

$$\Psi_k(0, \lambda^N) = |\{|\nabla w_k| > \lambda\}| \leq |\{|w_k| > a\}| + \frac{a||f||_1}{d_N \lambda^N}, \qquad \forall a, \lambda > 0,$$

y teniendo en cuenta la estimación (2.15),

$$|\{|\nabla w_k| > \lambda\}| \le |\Omega| \exp\left[-N\left(\frac{C_N d_N}{||f||_1}\right)^{1/(N-1)} a\right] + \frac{a||f||_1}{d_N \lambda^N}, \quad \forall a, \lambda > 0.$$

Si $a = (||f||_1/(C_N d_N))^{1/(N-1)} \log \lambda$,

$$|\{|\nabla w_k| > \lambda\}| \le |\Omega|\lambda^{-N} + C_N \left(\frac{||f||_1}{C_N d_N}\right)^{N/(N-1)} \lambda^{-N} \log \lambda.$$

En particular,

$$|\{|\nabla w_k| > \lambda\}| \le C(N, \Omega, ||f||_1)\, \lambda^{-(N-\varepsilon)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

■

Estos resultados permiten demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.5.5 *Existe una única solución de entropía u de (2.13), con $u-\varphi \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$, $u-\varphi \in \mathcal{M}^s(\Omega)$, $s > 1$ y $|\nabla(u-\varphi)| \in \mathcal{M}^{N-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Se hará sintéticamente pues es una pequeña variación de los resultados en **[20]**. La prueba de unicidad se omite pues es la misma que la del caso homogéneo (véase **[20]**).

La existencia puede probarse tomando las soluciones u_k del problema truncado (sustitúyase f en el problema (2.13) por su truncamiento a nivel k, f_k) y pasando al límite cuando $k \to \infty$, como en el teorema 6.1 de **[20]**. Sólo se necesitan las estimaciones (2.15), (2.16), (2.17) y el lema 2.5.4.

Sea $u_k \in W^{1,N}(\Omega)$ la solución del problema truncado. Si $w_k = u_k - \varphi_k$ y $w = u - \varphi$, entonces

$$\frac{1}{a}\int_{\{h<|w_k|\le h+a\}} |\nabla w_k|^N\, dx \le ||f_k||_1 \le ||f||_1, \quad \text{y} \quad \int_{\{|w_k|\le h\}} |\nabla w_k|^N\, dx \le h \int_{\{|w_k|\le h\}} f_k\, dx \le h||f||_1.$$

La última desigualdad implica que $\nabla T_h(w_k)$ está acotado en $L^N(\Omega)$, $\forall h > 0$. Por otra parte, por el corolario 2.5.3 se sabe que $|\{|w_k| > h\}|$ está uniformemente acotada en k para todo $h > 0$. Entonces $w_k \to w$ cuando $k \to \infty$ en medida.

Además $\nabla w_k \to v$ en medida (y en casi todo punto, depués de pasar a una subsucesión adecuada), para una cierta función v, gracias a las desigualdades elípticas para el N-Laplaciano (véanse los detalles en **[20]**).

Como $\nabla T_h(w_k)$ está acotado en $L^N(\Omega)$, $\forall h > 0$, entonces converge débilmente a $\nabla T_h(w)$ en $L^1(\Omega)$. Por tanto $w \in \mathcal{T}^{1,1}(\Omega)$ y $\nabla w = v$ en casi todo punto.

Resumiendo, se ha demostrado

$$\begin{array}{rl} w_k \in W_0^{1,N}(\Omega) & w \in \mathcal{T}^{1,1}(\Omega), \\ w_k \to w & \text{en medida y en c.t.p.,} \\ \nabla w_k \to \nabla w & \text{en medida y en c.t.p. y} \\ \nabla T_h(w_k) & \text{está acotada en } L^N(\Omega) \text{ para } k \text{ fijo },\ \forall h > 0. \end{array}$$

Además, $w \in \mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$.

Por el lema 2.5.4, ∇w_k está acotado en $\mathcal{M}^{N-\varepsilon}(\Omega)$ y por tanto la convergencia de ∇w_k a ∇w en medida implica la convergencia $|\nabla w_k|^{N-2}\nabla w_k \to |\nabla w|^{N-2}\nabla w$ en medida. Entonces, $\nabla w \in \mathcal{M}^{N-\varepsilon}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in (1, N)$.

Para concluir la prueba, basta verificar que $w = u - v$ sea la solución de entropía de (2.13). Pero la convergencia en medida y la cota uniforme en L^q implican $|\nabla w|^{N-2}\nabla w \in L^1(\Omega)$ y

$$|\nabla w_k|^{N-2}\nabla w_k \to |\nabla w|^{N-2}\nabla w \text{ en } L^1(\Omega).$$

Por tanto

$$\begin{cases} -\Delta_N w_k \to -\Delta_N w & \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ f_k \to f & \text{en} \quad L^1(\Omega). \end{cases}$$

Finalmente, hay que comprobar la condición de entropía. Sea $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$. Tomando $T_h(w_k - \psi)$ se tiene

$$\int_\Omega \langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla T_h(w_k - \psi)\rangle \, dx = \int_\Omega T_h(w_k - \psi) f_k \, dx,$$

donde $D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k) = |\nabla u_k|^{N-2}\nabla u_k - |\nabla \varphi_k|^{N-2}\nabla \varphi_k$. El primer miembro se puede escribir como

$$\int_\Omega \langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla w_k\rangle T_h'(w_k - \psi) \, dx - \int_\Omega \langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla \psi\rangle T_h'(w_k - \psi) \, dx.$$

Como $w_k \to w$ y $\nabla w_k \to \nabla w$ en casi todo punto, la primera integral puede estimarse usando el *lema de Fatou*,

$$\int_\Omega \langle D_N(\nabla u, \nabla \varphi), \nabla w\rangle T_h'(w - \psi) \, dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla w_k\rangle T_h'(w_k - \psi) \, dx,$$

mientras que

$$\langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla \psi\rangle T_h'(w_k - \psi) \to \langle D_N(\nabla u, \nabla \varphi), \nabla \psi\rangle T_h'(w - \psi) \quad \text{en c.t.p. para } k \to \infty.$$

Como $D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k)$ converge fuertemente en $L^1_{loc}(\Omega)$, se puede suponer que está dominada en $L^1(\Omega)$, es decir,

$$\int_\Omega \langle D_N(\nabla u_k, \nabla \varphi_k), \nabla \psi\rangle T_h'(w_k - \psi) \, dx \to \int_\Omega \langle D_N(\nabla u, \nabla \varphi), \nabla \psi\rangle T_h'(w - \psi) \, dx,$$

y

$$\int_\Omega T_h(w_k - \psi) f_k \, dx \to \int_\Omega T_h(w - \psi) f \, dx.$$

Como conclusión, si $k \to \infty$, se obtiene la condición de entropía para u. ∎

Capítulo 3

Problemas elípticos supercríticos con crecimiento potencial

3.1 Introducción

Este capítulo se dedica al estudio del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p w &=& \lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1} & \text{en } B_1, \\ w &=& 0 & \text{en } \partial B_1, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde B_1 denota la bola unidad en $I\!R^N$ y $\lambda > 0$. Se estudiará el comportamiento global del caso radial *supercrítico*, es decir,

$$1 < q \leq p < N \qquad \text{y} \qquad \alpha > p^* = \frac{Np}{N-p},$$

que es el exponente crítico en la inclusión de Sobolev. Existe una extensa literatura para los casos crítico y subcrítico, tanto para problemas semilineales como quasilineales (véase **[31]** y también **[11]**, **[23]** y las referencias allí contenidas). Es interesante resaltar que, si $p = 2$ y $1 < q < 2$, entonces la no linealidad del segundo miembro es de tipo cóncavo-convexo (véase **[9]**).

El problema (3.1) en el caso $p = q = 2$, ha sido estudiado en **[32]** y **[69]**. Para un dominio general y $1 < q < p < \alpha$, se ha demostrado en **[23]** un resultado de existencia de una solución positiva. De hecho este resultado indica que existe una rama de soluciones positivas arrancando del origen. Ésta es una diferencia con el caso $p = q$, en el que una rama de soluciones positivas arranca desde $(\lambda_1, 0)$ (esta bifurcación resulta de extender el teorema de Rabinowitz a este contexto, véase **[38]**) donde λ_1 a lo largo de este capítulo denota el primer autovalor de $-\Delta_p$ en B_1 con dato cero en el borde. Este resultado se completa demostrando que existe $\Lambda > 0$ tal que si $\lambda > \Lambda$, (3.1) no tiene solución positiva. Además en **[11]** se demuestra que la rama de soluciones positivas que arranca del origen contiene todas las soluciones positivas del problema (3.1). Recientemente, para $1 < q < p = 2$ ha sido demostrada en **[33]** la existencia de infinitas soluciones con *energía negativa* y, posiblemente, cambiando de signo (obsérvese que no hay restricción en α).

En este capítulo se estudiará el comportamiento global de la única rama de soluciones radiales positivas de (3.1), es decir, el comportamiento de λ y w conforme $||w||_\infty \to \infty$ ($||\cdot||_s$ denotará en este capítulo la norma de $L^s(B_1)$, $1 \le s \le \infty$). Los conceptos de solución que se emplearán en este capítulo serán los de solución regular y singular (véase la introducción de esta Memoria).

Los resultados más importantes de este capítulo son los siguientes

Teorema 3.1.1 *Sea $\overline{\alpha}$ definida como sigue*

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} p + \dfrac{p^2}{N-2-p-2(\frac{N-1}{p-1})^{1/2}}, & N > p + \dfrac{4p}{p-1}, \\ \infty, & N \le p + \dfrac{4p}{p-1}. \end{cases}$$

Entonces

(a) Existe un valor $\lambda_* < \infty$ tal que (3.1) tiene una solución radial singular S.

(b) Si w_j denota una sucesión de soluciones radiales regulares de (3.1) correspondientes a λ_j, tales que $||w_j||_\infty \to \infty$ cuando $j \to \infty$, entonces $\lambda_j \to \lambda_*$.

(c) Si $\alpha < \overline{\alpha}$, entonces existe una sucesión de soluciones radiales regulares w_j de (3.1) tal que $\lambda_j = \lambda_*$ y $w_j(0) \to \infty$ cuando $j \to \infty$.

(d) Si $\alpha \ge \overline{\alpha}$, entonces, para toda sucesión w_j de soluciones radiales regulares de (3.1) con $w_j(0) \nearrow \infty$ cuando $j \to \infty$, se tiene $\lambda_j \to \lambda_*$ de forma monótona para $j \ge j_0$ suficientemente grande.

Los resultados (c) y (d) proporcionan el comportamiento cualitativo de la rama de bifurcación para norma L^∞ grande: para $\alpha < \overline{\alpha}$ se tiene un diagrama en forma de tirabuzón, mientras que para $\alpha \ge \overline{\alpha}$ se tiene una rama monótona. Además, se obtiene también un resultado sobre la convergencia de soluciones regulares de (3.1) a la solución singular S introducida en el teorema anterior:

Teorema 3.1.2 *Si w_j denota una sucesión de soluciones radiales regulares de (3.1) correspondientes a λ_j, tales que $||w_j||_\infty \to \infty$ cuando $j \to \infty$, y S es la solución radial singular del teorema 3.1.1 (a), entonces $w_j \to S$ cuando $j \to \infty$ uniformemente sobre conjuntos compactos que no contienen el origen; además, $w_j \to S$ en $L^\beta(B_1)$ y en $W_0^{1,p}(B_1)$ con $\beta < N(\alpha - p)/p$.*

(Obsérvese que, como $\alpha > p^*$, entonces se tiene convergencia en $L^\beta(B_1)$ con $\beta > p^*$, por lo que las propiedades de integrabilidad de S son mejores que las que da el *teorema de inclusión de Sobolev*).

La organización del capítulo es como sigue. La sección 3.2 contiene algunos resultados sobre la ordenación y no existencia de soluciones de (3.1). A continuación se estudia el problema radial en $\mathbb{R}^N$, demostrando (véase teorema 3.3.1) que cualquier solución $u = u(r)$ de la siguiente ecuación radial

$$r^{1-N}(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + u^{q-1} + u^{\alpha-1} = 0, \tag{3.2}$$

($'$ denota diferenciación respecto de r) verificando $u > 0$ cerca de 0 y $u \in \mathcal{C}^{1,\kappa}$ para $r > 0$ tiene un primer cero positivo. Ha de señalarse el papel fundamental que juega el término u^{q-1} en la prueba de este resultado. Por otra parte, un análisis elemental demuestra que si se suprime el término u^{q-1} en la ecuación (3.2), se tiene la solución explícita $\phi(r) = kr^{-\theta}$, donde

$$k^{\alpha-p} = \theta^{p-1}(N - \theta(\alpha - 1)) > 0, \qquad \theta = \frac{p}{\alpha - p}.$$

Así, si se piensa en el término u^{q-1} como una perturbación del término de mayor orden $u^{\alpha-1}$ para norma L^∞ grande, es natural conjeturar que si existe una solución singular $U = U(r)$ para (3.2) que es positiva cerca de 0 entonces debe tener el mismo comportamiento que ϕ cerca de $r = 0$ (de esta forma se obtendrá que la solución singular verifica $S \in W_0^{1,p}(B_1) \cap L^\beta(B_1)$ donde $\beta < N(\alpha - p)/p$).

Por esta razón se transforma la ecuación (3.2) mediante el cambio de variables

$$\begin{array}{rlrcl} t = \log r, & & y(t) & = & r^\theta u(r), \\ s(t) = r^\delta, & & z(t) & = & r^{(1+\theta)(p-1)}|u'(r)|^{p-2}u'(r), \end{array} \tag{3.3}$$

donde $\delta = p(\alpha - q)/(2(\alpha - p))$, obteniendo el siguiente sistema autónomo tridimensional

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} & = & \theta y + |z|^{1/(p-1)} \operatorname{sign}(z) = \theta y + |z|^{(2-p)/(p-1)} z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & (\theta(\alpha - 1) - N)z - y^{\alpha-1} - s^2 y^{q-1} \\ \dfrac{ds}{dt} & = & \delta s. \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Después de estudiar las propiedades de las soluciones del sistema (3.4) y sus conexiones con las soluciones de (3.2), se demuestran en la sección 3.4 varios resultados sobre el comportamiento asintótico de las soluciones regulares de (3.2), a partir de los cuales se obtienen los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 mediante una reparametrización. En la sección 3.5 se detallan los cambios de los valores de los parámetros cuando se toma el problema con potencial $|x|^l$, $l > -p$, mientras que en la sección 3.6 se aplican los resultados de la sección 3.2 al problema de evolución asociado a (3.1). Finalmente, se incluye un apéndice donde se analiza detalladamente la linealización de (3.4).

3.2 Resultados de ordenación y de no existencia de soluciones

En esta sección se probarán varios resultados relacionados con soluciones de (3.1). En primer lugar, hay que subrayar el hecho de que las soluciones de (3.1) muestran comportamientos diferentes para $q = p$ y $q < p$.

Lema 3.2.1 *(a) Si $q = p$ entonces existe una única rama no acotada conexa de soluciones positivas de (3.1) bifurcando de $(\lambda_1, 0)$, donde λ_1 es el primer autovalor de $-\Delta_p$ en B_1 con dato cero en el borde.*

(b) Si $q < p$ entonces existe una única rama no acotada de soluciones positivas de (3.1) que es conexa y bifurca de $(0, 0)$.

(c) Si $q < p$, $\alpha < Np/(N - p)$ y λ es suficientemente pequeño, entonces existen al menos dos soluciones positivas w_1, w_2 del problema análogo a (3.1) para estos valores de α, verificando $0 < w_1 < w_2$.

(d) Si $q = p$ entonces dos soluciones regulares distintas de (3.1) se cortan.

La prueba de (a) está incluída en **[38]**; las pruebas de (b) y (c) se hallan en **[11]**. La demostración de (d) es una consecuencia del resultado general contenido en el lema 3.2.3, que a su vez está basado en el siguiente resultado sobre autovalores demostrado en **[1]**.

Lema 3.2.2 *Sean $0 \leq \rho_1(x) \leq \rho_2(x)$ dos funciones en $L^s(\Omega)$ ($s \geq 1$ si $p > N$, $s > N/p$ si $p \leq N$ y $\rho_1 \not\equiv 0$) definidas en Ω, un dominio acotado con frontera lisa. Sea $\lambda_1(\rho_i)$ el primer autovalor correspondiente al problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_i &= \lambda \rho_i(x) \phi_i^{p-1}, \quad x \in \Omega, \ i = 1, 2, \\ \phi_i &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, ó $\lambda_1(\rho_1) > \lambda_1(\rho_2)$, ó $\lambda_1(\rho_1) = \lambda_1(\rho_2)$ y las correspondientes autofunciones ϕ_1, ϕ_2 se anulan en $K = \{x \in \Omega \ : \ \rho_2(x) > \rho_1(x)\}$.

Demostración. Es evidente que $\lambda_1(\rho_1) \geq \lambda_1(\rho_2)$. Si $\lambda_1(\rho_1) = \lambda_1(\rho_2)$, como $\phi_1, \phi_2 \geq 0$ y

$$\lambda_1(\rho_1) = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_1 u^p \, dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_1|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_1 \phi_1^p \, dx},$$

$$\lambda_1(\rho_2) = \inf \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_2 u^p \, dx} = \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_2|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_2 \phi_2^p \, dx} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_1|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_2 \phi_1^p \, dx},$$

se tiene $\int_\Omega (\rho_2 - \rho_1)\phi_1^p \, dx \leq 0$. Entonces, se concluye que $\phi_1 \equiv 0$ en K. Por tanto

$$\int_\Omega \rho_1 \phi_1^p \, dx = \int_\Omega \rho_2 \phi_1^p \, dx, \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{\int_\Omega |\nabla \phi_1|^p \, dx}{\int_\Omega \rho_2 \phi_1^p \, dx} = \lambda_1(\rho_2).$$

Así $\phi_2 = \mu \phi_1$ y $\phi_2 \equiv 0$ en K. ∎

A partir del lema 3.2.2 es fácil demostrar:

Lema 3.2.3 *Dada $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, sean w_1, w_2 soluciones acotadas de*

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= f(w, \lambda) \quad \text{en } \Omega, \\ w &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

tales que $0 < w_1 \leq w_2$, donde Ω es un dominio acotado con frontera lisa. Si f verifica

(i) la función $f(x, \lambda)/x^{p-1}$ es no decreciente, $x > 0$,

(ii) $\rho_i \equiv f(w_i, \lambda)/w_i^{p-1} \in L^s(\Omega)$ ($s \geq 1$ si $p > N$, $s > N/p$ si $p \leq N$), $i = 1, 2$,

entonces $w_1 \equiv w_2$.

Demostración. Si $w_1 \leq w_2$ entonces

$$-\Delta_p w_i = f(w_i, \lambda) = \frac{f(w_i, \lambda)}{w_i^{p-1}} w_i^{p-1} \equiv \rho_i(x) w_i^{p-1} \quad \text{en } \Omega, \quad i = 1, 2,$$

con $\rho_1(x) \leq \rho_2(x)$ por la hipótesis (i), por lo que w_1 y w_2 son autofunciones para el autovalor $\lambda_1(\rho_1) = \lambda_1(\rho_2) \equiv 1$ de $-\Delta_p$ en Ω con dato cero en en el borde y pesos ρ_1 y ρ_2, respectivamente. Por el lema 3.2.2, w_1 y w_2 se anulan en $\{\rho_1(x) < \rho_2(x)\}$. Por el *lema de Hopf*, $w_1, w_2 > 0$ en Ω; así, $\{\rho_1(x) < \rho_2(x)\} = \emptyset$, es decir, $w_1 \equiv w_2$. ∎

Corolario 3.2.4 *Dos soluciones regulares positivas de (3.1) siempre se cortan si $q = p$.*

Demostración. Basta observar que para $q = p$ la función $f(w, \lambda) = \lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1}$ verifica las hipótesis del lema 3.2.3 con $\Omega = B_1$. ∎

Este resultado tiene una aplicación al caso parabólico, que muestra los distintos comportamientos de las soluciones correspondientes para $q < p$ y $q = p$ (véase sección 3.6).

Seguidamente se prueba la no existencia de soluciones positivas de (3.1) para λ suficientemente grande (véase [**23**]).

Lema 3.2.5 *El problema (3.1) no tiene solución positiva si $\lambda > \Lambda$, donde Λ es una constante positiva.*

Demostración. Supóngase que existe $\lambda_j \to \infty$ tal que w_j es la correspondiente solución de (3.1) y λ_1 es el primer autovalor en B_1 de $-\Delta_p$ con dato cero en el borde y autofunción asociada $\phi_1 > 0$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, haciendo $\sigma = \lambda_1 + \varepsilon$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $g(x, \sigma, \lambda) = \lambda x^{q-1} + x^{\alpha-1} - \sigma x^{p-1} > 0$ para todo $\lambda > \lambda_0$ y todo $x > 0$. Si $\lambda_j > \lambda_0$, entonces $g(w_j, \sigma, \lambda_j) > 0$ y se sigue que w_j es una supersolución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p w & = & (\lambda_1 + \varepsilon) w^{p-1} & \text{en } B_1, \\ w & = & 0 & \text{en } \partial B_1. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Pero $t\phi_1 \leq w_j$ es una subsolución de (3.5) para $t > 0$ adecuado. Entonces, se tiene una solución positiva de (3.5) por el *método de iteración* (véase la demostración del teorema 1.4.4 en el Capítulo 1). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se llega a contradicción con el aislamiento de λ_1 (véase apéndice del Capítulo 1). ∎

3.3 Problema radial en $\mathbb{R}^N$: análisis del espacio de fases

Ahora se analizará el comportamiento de las soluciones de la ecuación radial (3.2). El primer resultado de esta sección, debido a Ni y a Serrin, muestra la existencia de un primer cero positivo para estas soluciones (véase [**73**]).

Teorema 3.3.1 *Existe un primer cero positivo para toda solución u de (3.2) con $u > 0$ en un entorno de 0 y $u \in \mathcal{C}^{1,\kappa}$ para $r > 0$.*

Demostración. Se utiliza un argumento de contradicción. Supóngase que u es positiva para $r > 0$ y que verifica la ecuación

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' + r^{N-1}(u^{q-1} + u^{\alpha-1}) = 0.$$

Como $u^{q-1} + u^{\alpha-1}$ es positiva para $r > 0$,

$$(r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' < 0 \quad \text{para } r > 0,$$

y $r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$ es una función decreciente. En particular, como $u \in \mathcal{C}^{1,\kappa}$ para $r > 0$, se tiene $u' < 0$ para $r > 0$, es decir, $u(s) > u(r)$ para $s < r$. Al integrar (3.2) de r_0 a r se obtiene

$$\begin{aligned} r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r) - r_0^{N-1}|u'(r_0)|^{p-2}u'(r_0) &= -\textstyle\int_{r_0}^{r} s^{N-1}(u^{\alpha-1}(s) + u^{q-1}(s))\,ds \\ &\leq -\textstyle\int_{r_0}^{r} s^{N-1}u^{q-1}(s)\,ds \\ &\leq -u^{q-1}(r)\textstyle\int_{r_0}^{r} s^{N-1}\,ds = -\dfrac{r^N - r_0^N}{N}u^{q-1}(r). \end{aligned}$$

Como $u'(r_0) \leq 0$,

$$\begin{aligned} u^{1-q}(r)|u'(r)|^{p-2}u'(r) &\leq u^{1-q}(r)r_0^{N-1}|u'(r_0)|^{p-2}u'(r_0)r^{1-N} - \frac{r^N - r_0^N}{N}r^{1-N} \\ &\leq -r\left(\frac{1}{N} - \frac{r_0^N}{Nr^N}\right), \end{aligned}$$

de donde, tomando $s_0 = 2r_0 \leq r$,

$$-u^{1-q}(r)|u'(r)|^{p-2}u'(r) \geq r\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N2^N}\right) = r\frac{1-2^{-N}}{N}.$$

Luego

$$u^{1-q}(r)|u'(r)|^{p-1} \geq Cr \quad \text{es decir } u^{(1-q)/(p-1)}(r)(-u'(r)) \geq C^{1/(p-1)}r^{1/(p-1)}.$$

Al integrar esta última desigualdad entre s_0 y r, se tiene

$$-\frac{p-1}{p-q}(u^{(p-q)/(p-1)}(r) - u^{(p-q)/(p-1)}(s_0)) \geq C^{1/(p-1)}\frac{p-1}{p}(r^{p/(p-1)} - s_0^{p/(p-1)})$$

para $1 < q < p$, es decir,

$$u^{(p-q)/(p-1)}(r) \leq C^{1/(p-1)}\frac{p-q}{p}(s_0^{p/(p-1)} - r^{p/(p-1)}) + u^{(p-q)/(p-1)}(s_0).$$

Como $u(r) > 0$ por hipótesis y el segundo miembro de la última desigualdad tiende a $-\infty$ cuando $r \to \infty$, se llega a contradicción para $1 < q < p$.

De la misma manera, para $q = p$ se obtiene la desigualdad

$$\log\frac{u(s_0)}{u(r)} \geq C^{1/(p-1)}(r^{p/(p-1)} - s_0^{p/(p-1)}),$$

o sea

$$u(r) \leq u(s_0)\exp(C^{1/(p-1)}(s_0^{p/(p-1)} - r^{p/(p-1)})). \tag{3.6}$$

Pero $u' < 0$ y $r^{N-1}|u'|^{p-2}u'$ es una función decreciente, por lo que $r^{N-1}|u'|^{p-2}u' \leq -C$ para r grande. Al integrar esta desigualdad de r a ∞ se obtiene

$$u(r) \geq C_1\, r^{-(N-p)/(p-1)},$$

lo que contradice el decaimiento de u hallado en (3.6). ■

Así pues, el teorema 3.3.1 implica que existe $\mu = \mu(u(0)) > 0$ tal que u es positiva en B_μ, donde B_μ denota la bola de radio μ centrada en el origen de $I\!R^N$.

Ahora, como se indicó en la introducción, se transforma la ecuación (3.2) mediante el cambio de variables

$$\begin{array}{llcl} t = \log r, & y(t) & = & r^\theta u(r), \\ s(t) = r^\delta, & z(t) & = & r^{(1+\theta)(p-1)}|u'(r)|^{p-2}u'(r), \end{array}$$

donde $\delta = p(\alpha - q)/(2(\alpha - p))$, obteniendo el siguiente sistema autónomo tridimensional

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{dy}{dt} & = & \theta y + |z|^{1/(p-1)}\,\mathrm{sign}(z) = \theta y + |z|^{(2-p)/(p-1)}\, z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & (\theta(\alpha - 1) - N)z - y^{\alpha-1} - s^2 y^{q-1} \\ \dfrac{ds}{dt} & = & \delta s. \end{array} \right.$$

El análisis de este sistema que sigue a continuación extiende al caso quasilineal los métodos usados en **[32]**. Aparecen nuevas dificultades debido a la no linealidad de las ecuaciones y a la diferente regularidad del segundo miembro.

Hay que señalar que si u es una solución regular de (3.2), o sea, si $u(0) = \gamma > 0$ y $u'(0) = 0$, entonces la correspondiente trayectoria solución del sistema autónomo (3.4) es una trayectoria unidimensional que parte del origen cuando $t = -\infty$ y corta al plano $y = 0$ cuando $t = \log \mu$, donde $\mu = \mu(\gamma)$ es el primer cero positivo de u (véase teorema 3.3.1). Además, se tienen las propiedades siguientes:

Lema 3.3.2 *Si u es una solución regular de (3.2)* ($u(0) = \gamma > 0$ *y* $u'(0) = 0$)*, entonces la correspondiente trayectoria solución de (3.4) verifica*

(a) la trayectoria permanece inicialmente en $y > 0 > z$.

(b) si $z(t_0) = 0$*, entonces* $y(t_0)\dfrac{dz}{dt}(t_0) < 0$.

(c) si $y(t_0)\,\mathrm{sign}(z(t_0)) > 0$*, entonces* $y(t_0)\dfrac{dy}{dt}(t_0) \geq 0$.

(d) si $y(t_0) = 0$*, entonces* $z(t_0)\dfrac{dy}{dt}(t_0) > 0$.

Demostración. (a) es consecuencia de los hechos $u > 0$ y $u' \leq 0$ en B_μ; (b), (c) y (d) se obtienen como sigue

$$\begin{array}{rcl} y\dfrac{dz}{dt} & = & y(-y^{\alpha-1} - s^2 y^{q-1}) = -y^\alpha - s^2 y^q < 0, \\ y\dfrac{dy}{dt} & = & \theta y^2 + |z|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{sign}(z) y \geq 0, \\ z\dfrac{dy}{dt} & = & |z|^{1/(p-1)}\,\mathrm{sign}(z) z > 0 \end{array}$$

de donde se concluye el resultado. ■

Por otra parte, los puntos singulares de (3.4) son el origen $(0,0,0)$ y $P_+ = (k, -(\theta k)^{p-1}, 0)$. Se puede escribir (3.4) cerca de P_+ con respecto a las nuevas variables

$$(\bar{y} = y - k,\ \bar{z} = z + (k\theta)^{p-1},\ s = s)$$

de la siguiente forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\bar{y}}{dt} & = & \theta\bar{y} + \dfrac{(k\theta)^{2-p}}{p-1}\bar{z} + F_1(\bar{z}) \\ \dfrac{d\bar{z}}{dt} & = & -(\alpha-1)k^{\alpha-2}\bar{y} + (\theta(p-1)+p-N)\bar{z} + F_2(\bar{y}, s) \\ \dfrac{ds}{dt} & = & \delta s, \end{array}\right. \tag{3.7}$$

donde $F_1(\bar{z}) = O(\bar{z}^2)$ y $F_2(\bar{y}, s) = O(\bar{y}^2) + s^2(k^{q-1} + (q-1)k^{q-2}\bar{y} + ...)$, con $F = (F_1, F_2) \in C^2$ en un entorno del origen. Sea $\overline{\alpha}$ el valor definido en la introducción; entonces, los autovalores de la parte lineal de (3.7) son

i) Si $\alpha < \overline{\alpha}$,

$$\frac{p(\theta+1)-N}{2} + i\omega, \quad \frac{p(\theta+1)-N}{2} - i\omega, \quad \delta,$$

donde $\omega = \frac{1}{2}(4p(N-(p-1)\theta-p)/(p-1) - (p(\theta-1)-N)^2)^{1/2}$.

ii) Si $\alpha \geq \overline{\alpha}$,

$$\frac{p(\theta+1)-N}{2} + \nu, \quad \frac{p(\theta+1)-N}{2} - \nu, \quad \delta,$$

donde $\nu = \frac{1}{2}(p(\theta+1)-N)^2 - 4p(N-(p-1)\theta-p)/(p-1))^{1/2}$.

Lema 3.3.3 *Las partes reales de los autovalores distintos de $\delta > 0$ son negativas.*

Demostración. Como $(p(\theta+1)-N)/2 < 0$ para cada $\alpha > Np/(N-p)$, basta demostrar que, para $\alpha \geq \overline{\alpha}$, $(p(\theta+1)-N)/2 + \nu < 0$ (lo que implica $(p(\theta+1)-N)/2 - \nu < 0$).

Si $\alpha = \overline{\alpha}$, se tiene $\nu = 0$; luego, por la observación anterior, $(p(\theta+1)-N)/2+\nu < 0$ para α próximo a $\overline{\alpha}$. Además $(p(\theta+1)-N)/2+\nu$ cambia de signo si existe $\alpha_0 > \overline{\alpha}$ tal que

$$\nu_0 = \frac{1}{2}((N-\theta\alpha_0)^2 - \frac{4p}{p-1}(N-\theta(\alpha_0-1)))^{1/2} = \frac{N-p(\theta+1)}{2},$$

lo que implica

$$\alpha_0 = p + \frac{p-1}{N-p}p.$$

Pero

$$\alpha_0 \geq \overline{\alpha} = p + \frac{p^2}{N-2-p-2(\frac{N-1}{p-1})^{1/2}} > p + \frac{p-1}{N-p}p,$$

y se llega a contradicción.

Entonces $(p(\theta+1)-N)/2+\nu<0$ para $\alpha\geq\overline{\alpha}$ (lo que implica $(p(\theta+1)-N)/2-\nu<0$ para $\alpha\geq\overline{\alpha}$). ■

Este último hecho juega un papel importante en la linealización de (3.7), la cual, por los resultados descritos en el apéndice, puede llevarse a cabo como sigue:

Lema 3.3.4 *Existe un cambio de coordenadas $T\in\mathcal{C}^1$, definido en un entorno Ω de $P_+=(k,-(\theta k)^{p-1},0)$,*

$$T:(\bar{y},\bar{z},s)\to(\hat{y},\hat{z},s),$$

verificando $T(0)=0$, $DT(0)=I$, que transforma (3.7) en

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{d\hat{y}}{dt} & = & \theta\hat{y}+\dfrac{(k\theta)^{2-p}}{p-1}\hat{z}\\ \dfrac{d\hat{z}}{dt} & = & -(\alpha-1)k^{\alpha-2}\hat{y}+(\theta(p-1)+p-N)\hat{z}\\ \dfrac{ds}{dt} & = & \delta s.\end{array}\right. \tag{3.8}$$

Además $T(\Omega\cap\{s=0\})\subset\{s=0\}$.

Este último resultado se usará en la siguiente sección. Por otra parte, como F es suficientemente regular, se puede aplicar el *teorema de la variedad estable* al punto singular P_+ (véase por ejemplo **[55]**, Sec. III.6):

Lema 3.3.5 *El punto singular P_+ tiene una variedad estable bidimensional y una variedad inestable unidimensional $M(t)$, verificando*

(i) $M(t)$ es una trayectoria solución de (3.4).

(ii) $M(t)$ es C^1 como función de t y es tangente a $(k,-(\theta k)^{p-1},e^{\delta t})$ para $t\to-\infty$.

(iii) Existe $\mu_\infty>0$ tal que $M(t)$ corta el plano $y=0$ en $t=\log\mu_\infty$.

Demostración. Ya que los autovalores de la parte lineal de (3.7) tienen partes reales distintas de cero, y sólo el autovalor igual a δ tiene parte real positiva, entonces P_+ es un punto de silla inestable (véase **[55]**, Sec. III.6, por esta razón llamado *de tipo 1*). Por tanto el *teorema de la variedad estable* implica que existe una variedad estable bidimensional y una variedad inestable unidimensional $M(t)$ que a su vez es una trayectoria solución de (3.4). Además, la variedad inestable se aproxima al punto singular P_+ para $t\to-\infty$, y es tangente a $(k,-(\theta k)^{p-1},e^{\delta t})$ cuando $t\to-\infty$. ■

Corolario 3.3.6 *Existe una solución singular U del problema (3.2) verificando $U(r)>0$ cerca de $r=0$ y $U(\mu_\infty)=0$.*

Demostración. Basta invertir el cambio de variables (3.3) para $M(t)$, obteniendo una solución singular U de (3.2) verificando $U(r) > 0$ para r cerca de 0 y

$$r^{\theta}U(r) \to k, \qquad r^{1+\theta}U'(r) \to -\theta k \qquad \text{para } r \to 0.$$

Como $U \in \mathcal{C}^{1,\kappa}$ para $r > 0$, entonces existe un primer cero positivo para U (véase prueba del teorema 3.3.1). Así, si μ_∞ denota ese cero de U, el cambio de variables (3.3) implica que $M(t)$ corta al plano $y = 0$ en $t = \log \mu_\infty$. ■

Por otra parte, P_+ pertenece al plano $s = 0$; así pues, se puede considerar el sistema bidimensional auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} & = & \theta y + |z|^{1/(p-1)} \operatorname{sign}(z), \\ \dfrac{dz}{dt} & = & (\theta(\alpha-1) - N)z - y^{\alpha-1}. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

De esta forma se puede ver (3.9) como (3.4) sin la perturbación del término de orden menor. Considérese el problema radial asociado a (3.9),

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r^{1-N}(r^{N-1}|W_\gamma'|^{p-2}W_\gamma')' + W_\gamma^{\alpha-1} & = & 0, \\ W_\gamma(0) = \gamma \quad W_\gamma'(0) & = & 0. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Sea $W_\gamma(r)$ la solución de (3.10); es bien sabido que es única (véase por ejemplo **[41]**). Por el cambio de variables (3.3), la solución $W_\gamma(r)$ se convierte en una trayectoria solución $(Y_\gamma(t), Z_\gamma(t))$ del sistema restringido (3.9). Además $W_\gamma(r) = \gamma W_1(r\gamma^{1/\theta})$. Así, si (Y_1, Z_1) es la correspondiente trayectoria solución para $\gamma = 1$, entonces (Y_γ, Z_γ) se obtiene mediante una reparametrización dependiente de γ y θ de la siguiente manera

$$(Y_\gamma(t), Z_\gamma(t)) = (Y_1(t + \log\gamma/\theta), Z_1(t + \log\gamma/\theta)). \tag{3.11}$$

Por lo que

$$Y_\gamma(t) = \gamma e^{\theta t} W_1(e^{t+\log\gamma/\theta}) = e^{\theta(t+\log\gamma/\theta)} W_1(e^{t+\log\gamma/\theta}) = Y_1(t + \log\gamma/\theta).$$

Un cálculo similar puede hacerse para $Z_\gamma(t)$.

Además, se necesitará el siguiente resultado obtenido en **[22]**, Teorema 5.1 (ii):

Lema 3.3.7 *$W_1(r) > 0$ para $r \geq 0$ y $r^\theta W_1(r) \to k$, $r^{1+\theta}W_1'(r) \to -\theta k$ para $r \to \infty$.*

En particular, este lema implica que una trayectoria solución de (3.9) correspondiente a una solución de (3.10) parte del origen cuando $t = -\infty$ y tiende a P_+ cuando $t \to \infty$.

Finalmente, mediante una sencilla reparametrización se obtiene que la solución $V_\gamma(r)$ del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r^{1-N}(r^{N-1}|V_\gamma'|^{p-2}V_\gamma')' + V_\gamma^{\alpha-1} + \gamma^{q-\alpha}V_\gamma^{q-1} & = & 0, \ \gamma > 0, \\ V_\gamma(0) = 1, \qquad\qquad V_\gamma'(0) & = & 0, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

puede escribirse como

$$V_\gamma(r) = \gamma^{-1}u(r\gamma^{-1/\theta}), \tag{3.13}$$

donde $u(r)$ es la solución de (3.2) con $u(0) = \gamma$ y $u'(0) = 0$. Por consiguiente, se puede probar el siguiente lema.

Lema 3.3.8 *Sea $V_\gamma(r)$ la solución del problema (3.12) y sea $W_1(r)$ la solución de (3.10) para $\gamma = 1$. Si γ es suficientemente grande, para todo $r > 0$ fijo,*

$$|(V_\gamma(r), V_\gamma'(r)) - (W_1(r), W_1'(r))| < C(r)\, \gamma^{q-\alpha}$$

Demostración. En primer lugar, por el *principio de comparación débil* se tiene que las funciones $V_\gamma(r)$ y $W_1(r)$ están acotadas superiormente por 1 en el intervalo donde son positivas. Fíjese $r_0 > 0$. Entonces, si γ es suficientemente grande, $V_\gamma(r) > 0$ en el intervalo $[0, r_0]$.

Se usarán las técnicas del apéndice de **[41]** para demostrar el resultado. En el resto de la prueba $V(r)$ y $W(r)$ denotarán $V_\gamma(r)$ y $W_1(r)$, respectivamente.

Sea $\Theta(\eta) = |\eta|^{p-2}\eta$, $\varphi(r) = \Theta(W'(r)) - \Theta(V'(r))$. Entonces, al integrar de 0 a $r < r_0$ la diferencia de las ecuaciones que verifican V y W, se obtiene

$$\varphi(r) = \int_0^r (V^{\alpha-1}(t) - W^{\alpha-1}(t) + \gamma^{q-\alpha} V^{q-1}(t)) \left(\frac{t}{r}\right)^{N-1} dt.$$

Usando que V está acotada, que $g(t) = t^{\alpha-1}$ es localmente Lispchitz y que $V(t)$ y $W(t)$ están lejos de cero en $[0, r]$, se obtiene

$$|\varphi(r)| \leq \frac{r}{N}(M \sup_{t\in[0,r]} |V(t) - W(t)| + \gamma^{q-\alpha}).$$

En particular, esto implica que $|\varphi(r)|/r$ está acotado en $(0, r_0)$. Como $V(0) = W(0) = 1$, entonces, para $p \leq 2$,

$$|V(t) - W(t)| \leq \int_0^t |V'(\tau) - W'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \frac{|\Theta(|W'(\tau)|) - \Theta(|V'(\tau)|)|}{|\Theta'(\xi)|}\, d\tau \leq \frac{1}{\rho}\int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau,$$

donde $\rho = \inf_{\xi\in(0,\xi_0)} \Theta'(\xi)$, y ξ_0 es una cota para $|W'|$ y $|V'|$ en el intervalo $[0, r]$ (Θ' es par y está lejos de cero en $[0, r]$ para $p \leq 2$). Así

$$|\varphi(r)| \leq \frac{r}{N}\left(\frac{M}{\rho}\int_0^r |\varphi(s)|\, ds + \gamma^{q-\alpha}\right), \qquad p \leq 2,$$

y por la *desigualdad de Gronwall*

$$|\varphi(r)| \leq C(r)\, \gamma^{q-\alpha}, \qquad p \leq 2.$$

Si $p > 2$, es necesario modificar el argumento anterior, ya que la derivada de Θ no está acotada lejos de cero en el intervalo $[0, r]$. En este caso, se usa que $\Theta'(\xi) > 0$ para $\xi \neq 0$ y $\Theta'(\xi) \geq \Theta(\xi)$ para $\xi \leq p - 1$, sustituyendo ρ por el ínfimo de $\Theta'(\bar{\xi})$, tomado sobre todos los valores intermedios $\bar{\xi}$ entre $|W'(\tau)|$ y $|V'(\tau)|$. Nótese que este ínfimo está lejos de cero porque r pertenece a un intervalo donde W' y V' son no nulas. Entonces, si se supone que $|W'(\tau)| \leq |V'(\tau)| \leq p - 1$ y $W(\tau) \geq \sigma^{-1/(\alpha-1)}$, para algún $\sigma > 0$, (ya que $W > 0$ por el lema 3.3.7) se tiene

$$\Theta(\bar{\xi}) > \Theta(|W'(\tau)|) = \int_0^\tau W^{\alpha-1}(x) \left(\frac{x}{\tau}\right)^{N-1} dx \geq \frac{\tau}{\sigma N}.$$

Esto implica que

$$\Theta'(\bar{\xi}) \geq \Theta(\bar{\xi}) \geq \frac{\tau}{\sigma N} \qquad\qquad \tau \in (0, r).$$

Por lo tanto, para $p > 2$,

$$|V(t) - W(t)| \leq \int_0^t |V'(\tau) - W'(\tau)|\, d\tau \leq \int_0^t \frac{|\Theta(|W'(\tau)|) - \Theta(|V'(\tau)|)|}{\inf \Theta'(\bar{\xi})} d\tau \leq \sigma N \int_0^t \frac{|\varphi(\tau)|}{\tau}\, d\tau.$$

Al insertar la última desigualdad en la cota anterior para $|\varphi(r)|$, resulta

$$\frac{|\varphi(r)|}{r} \leq \sigma M \int_0^r \frac{|\varphi(\tau)|}{\tau}\, d\tau + \gamma^{q-\alpha}.$$

Entonces la *desigualdad de Gronwall* implica que

$$\frac{|\varphi(r)|}{r} \leq C(r)\, \gamma^{q-\alpha}, \qquad\qquad p > 2.$$

De esta forma se ha demostrado que

$$\begin{array}{rlll} |V(r) - W(r)| \leq \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\int_0^r |\varphi(\tau)|\, d\tau \leq C(r)\, \gamma^{q-\alpha}, & p & \leq & 2, \\ |V(r) - W(r)| \leq \sigma N \int_0^r |\varphi(\tau)|/\tau\, d\tau \leq C(r)\, \gamma^{q-\alpha}, & p & > & 2. \end{array}$$

Además, teniendo en cuenta que V' y W' son negativas,

$$|\varphi(r)| = |\Theta(|W'(r)|) - \Theta(|V'(r)|)| = |\Theta'(\bar{\xi})||V'(r) - W'(r)|$$

y usando las cotas previas para $\Theta'(\bar{\xi})$, se obtiene

$$|V'(r) - W'(r)| \leq C(r)\, \gamma^{q-\alpha}.$$

Con esto finaliza la prueba del lema 3.3.8. ∎

3.4 Un teorema para soluciones regulares del problema radial

Esta sección se dedica a la demostración del siguiente teorema para soluciones regulares de (3.2):

Teorema 3.4.1 *Sea $u_\gamma(r)$ la solución de (3.2) con $u_\gamma(0) = \gamma > 0$ y $u'_\gamma(0) = 0$. Entonces, si $\mu = \mu(\gamma)$ es el primer cero positivo de $u_\gamma(r)$,*

$$\mu^\delta(\gamma) = \begin{cases} \mu_\infty^\delta + AK(\gamma)\cos(\omega/\theta \log\gamma + B)(1 + o(1)) + O(K(\gamma)^2), & \alpha < \overline{\alpha}, \\ \mu_\infty^\delta + CK(\gamma)\gamma^{\nu/\theta}(1 + o(1)) + O(K(\gamma)^2), & \alpha \geq \overline{\alpha}, \end{cases}$$

para $\gamma \to \infty$, donde $\delta = p(\alpha - q)/(2(\alpha - p))$, $K(\gamma) = \gamma^{(p(\theta+1)-N)/2)}$, A, B y C son constantes, y ω y ν son como en la sección 3.3.

Para demostrar este teorema, sea $\omega_+(t)$ la curva $(Y_\gamma(t), Z_\gamma(t), 0)$ donde las dos primeras coordenadas se definen en (3.11). Entonces, si se toma $(e, f, 0) \in \omega_+(t)$ cercano a P_+, existe t_1 tal que

$$(e, f, 0) = (Y_1(t_1), Z_1(t_1), 0).$$

Se define

$$t_\gamma = t_1 - \theta^{-1} \log \gamma.$$

Además, si $(y_\gamma(t), z_\gamma(t), s_\gamma(t))$ es la trayectoria solución de (3.4) correspondiente a u_γ, se define Γ_0 como sigue

$$\Gamma_0 = \{(y_\gamma(t_\gamma),\, z_\gamma(t_\gamma), s_\gamma(t_\gamma)) \,:\, \gamma > 0\}.$$

Lema 3.4.2 Γ_0 *es una variedad unidimensional de* $I\!R^3$*. Además, si* γ *es suficientemente grande,*

$$|(y_\gamma(t_\gamma) - e, z_\gamma(t_\gamma) - f)| < 2C(\exp(t_1))\, \gamma^{q-\alpha}, \quad s_\gamma(t_\gamma) = \exp(\delta t_1)\, \gamma^{(q-\alpha)/2}.$$

Es decir, $\Gamma_0 \to (e, f, 0)$ *cuando* $\gamma \to \infty$*.*

Demostración. Por (3.13), $V_\gamma(r) = \gamma^{-1} u(r\gamma^{-1/\theta})$; entonces el lema 3.3.8 implica que, para γ suficientemente grande y $r > 0$ fijo,

$$r^\theta\, |\gamma^{-1} u(r\gamma^{-1/\theta}) - W_1(r)| < r^\theta C(r)\, \gamma^{q-\alpha}.$$

Si $r = \exp(t_1)$, entonces $r^\theta \gamma^{-1} = \exp(\theta t_\gamma)$. Así,

$$r^\theta \gamma^{-1} u(r\gamma^{-1/\theta}) = \exp(\theta t_\gamma)\, u(\exp(t_\gamma)) = y_\gamma(t_\gamma) \quad \text{y} \quad r^\theta W_1(r) = e.$$

Por lo tanto $|y_\gamma(t_\gamma) - e| < C(\exp(t_1))\, \gamma^{q-\alpha}$. Un cálculo similar da el resultado para z. Finalmente,

$$s_\gamma(t_\gamma) = \exp(\delta t_\gamma) = \exp(\delta t_1)\, \exp(-\delta/\theta \log \gamma) = \exp(\delta t_1)\, \gamma^{-\delta/\theta} = \exp(\delta t_1)\, \gamma^{(q-\alpha)/2}.$$

∎

Considérese $Q = M(t) \cap \{y = 0\}$, que existe por el lema 3.3.5 (iv). Sea Σ el plano $\{y = 0\}$ y defínase la aplicación $\Phi : \Gamma_0 \longrightarrow \Sigma$ como sigue:

Sea $\zeta \in \Gamma_0$ y sea $\xi(t)$ la trayectoria solución de (3.4) que corta a Γ_0 en ζ. Entonces

$$\Phi(\zeta) = \xi(t) \cap \Sigma.$$

Considérese ahora Ω, el entorno de P_+ introducido en el lema 3.3.4. Sea $\Sigma_\eta = \Omega \cap \{s = \eta\}$ para $\eta > 0$ suficientemente pequeño tal que $\Sigma_\eta \neq \emptyset$. Φ se descompone ahora en dos aplicaciones:

a) $\Phi_0 : \Gamma_0 \to \Sigma_\eta$, donde $\Phi_0(\zeta) = \xi(t) \cap \Sigma_\eta$.

b) $\Phi_\eta : \Sigma_\eta \to \Sigma$, el flujo de soluciones de (3.4) con dato inicial en Σ_η.

Como Φ_0 actúa en un entorno de P_+ y, como consecuencia del lema 3.4.2, existe un γ_0 tal que el subconjunto correspondiente de Γ_0 definido al tomar $\gamma > \gamma_0$ está incluido en Ω (tómese $(e, f, 0)$ más próximo a P_+ si es necesario). Tomando el cambio de variables T y linealizando (3.7) por el lema 3.3.4, sea $\hat{\Sigma}_\eta$ la intersección de la imagen de Ω por T con $\{s = \eta\}$; de esta manera, $(0, 0, \eta) \in \hat{\Sigma}_\eta$, y sea $\hat{\Phi}_0$ el conjugado de Φ_0 con respecto al difeomorfismo local T, es decir, $\hat{\Phi}_0 = T \circ \Phi_0 \circ T^{-1}$, $\hat{\Phi}_0 : \hat{\Gamma}_0 \longrightarrow \hat{\Sigma}_\eta$ definido por

$$\hat{\Phi}_0(\hat{\zeta}) = \hat{\xi}(t) \cap \hat{\Sigma}_\eta,$$

donde $\hat{\zeta} \in \hat{\Gamma}_0 = T(\Gamma_0)$, y $\hat{\xi}(t)$ es la trayectoria del sistema lineal (3.8) conteniendo $\hat{\zeta}$.

Lema 3.4.3 *Sea $\hat{\zeta} \equiv (\zeta_{\hat{y}}, \zeta_{\hat{z}}, s)$, con $s < \eta$. Si $\tau = -\delta^{-1} \log(s/\eta)$, entonces*

$$\hat{\Phi}_0(\hat{\zeta}) = \begin{cases} (\exp\left(\frac{p(\theta+1)-N}{2}\tau\right) [\zeta_{\hat{y}} \cos \omega\tau - \zeta_{\hat{z}} \sin \omega\tau,\ \zeta_{\hat{y}} \sin \omega\tau + \zeta_{\hat{z}} \cos \omega\tau], \eta), & \alpha < \overline{\alpha}, \\ (\exp\left(\frac{p(\theta+1)-N}{2}\tau\right) [\zeta_{\hat{y}} \exp(\nu\tau), \zeta_{\hat{z}} \exp(-\nu\tau)], \eta), & \alpha \geq \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Demostración. Este resultado se obtiene resolviendo el sistema lineal (3.8), teniendo en cuenta el comportamiento de los autovalores según sea $\alpha < \overline{\alpha}$, $\alpha \geq \overline{\alpha}$. ■

Lema 3.4.4 *Sea $(\hat{e}, \hat{f}, 0) = T(e-k, f+(k\theta)^{p-1}, 0)$. Sea $\xi_\gamma(t) = (y_\gamma(t), z_\gamma(t), s_\gamma(t))$ la trayectoria solución de (3.4) correspondiente a u_γ definida en el teorema 3.4.1. Entonces $\hat{\zeta}_\gamma = T(\xi_\gamma) \cap \hat{\Gamma}_0$ viene dada por*

$$\hat{\zeta}_\gamma = (\hat{e}, \hat{f}, \exp(\delta t_1)\, \gamma^{(q-\alpha)/2}) + O(||m|| \gamma^{(q-\alpha)/2}) + O(\gamma^{q-\alpha}),$$

donde la norma $||m||$ puede tomarse arbitrariamente pequeña al escoger $(\hat{e}, \hat{f})$ suficientemente cercano a $(0, 0)$ (m es una matriz de error).

Demostración. T es C^1 en un entorno del origen y $DT(0) = I$. Entonces

$$\xi_\gamma \cap \Gamma_0 \equiv \zeta_\gamma = (e - k, f + (k\theta)^{p-1}, 0) + h_\gamma, \text{ con } h_\gamma = (O(\gamma^{q-\alpha}), O(\gamma^{q-\alpha}), \exp(\delta t_1)\, \gamma^{(q-\alpha)/2})$$

por el lema 3.4.2. La continuidad de DT implica que $DT(e-k, f+(k\theta)^{p-1}, 0) = I+m$, para m pequeña, si $(e - k, f + (k\theta)^{p-1}, 0)$ está próximo a $(0, 0, 0)$. Por lo tanto, el *teorema del valor medio* implica que $\hat{\zeta}_\gamma = T\zeta_\gamma$ se puede escribir como

$$\hat{\zeta}_\gamma = (\hat{e}, \hat{f}, \exp(\delta t_1)\gamma^{(q-\alpha)/2}) + O(||m||\gamma^{(q-\alpha)/2}) + O(\gamma^{q-\alpha}).$$

■

Combinando las conclusiones de los lemas 3.4.3 y 3.4.4, se puede hallar una expresión explícita para la intersección de $\hat{\Sigma}_\eta$ y la imagen de ξ_γ por T.

Lema 3.4.5 *Sea ξ_γ definida como en el lema 3.4.4. Entonces $\hat{\sigma}_\gamma = T(\xi_\gamma) \cap \hat{\Sigma}_\eta$ viene dada por $\hat{\sigma}_\gamma = \hat{\chi}_\gamma + (0, 0, \eta)$, donde*

$$\hat{\chi}_\gamma = \begin{cases} (A_1 K(\gamma)[\cos(A_2 + \omega \log(D\gamma^{1/\theta})), \sin(A_2 + \omega \log(D\gamma^{1/\theta}))](1 + O(||m||)), 0), & \alpha < \overline{\alpha}, \\ (A_1 K(\gamma)[\gamma^{\nu/\theta}, \gamma^{-\nu/\theta}](1 + O(||m||)), 0), & \alpha \geq \overline{\alpha}, \end{cases}$$

para $\gamma \to \infty$, donde $K(\gamma) = \gamma^{(p(\theta+1)-N)/2}$ y A_1, A_2 y D son constantes.

DEMOSTRACIÓN. El lema 3.4.4 implica que τ (definido en el lema 3.4.3) es igual a $\log(D\gamma^{1/\theta}(1+O(||m||)))$ para $\gamma \to \infty$. Entonces

$$\exp(\frac{p(\theta+1)-N}{2}\tau) = A_1\gamma^{(p(\theta+1)-N)/2)}(1+O(||m||)) = A_1K(\gamma)(1+O(||m||)).$$

El lema 3.4.4 también implica que las coordenadas $\hat{y}$, $\hat{z}$ de $\hat{\zeta}_\gamma$ son iguales a $\hat{e}+O(\gamma^{(q-\alpha)/2})$ y $\hat{f}+O(\gamma^{(q-\alpha)/2})$, respectivamente. Así pues, cuando $\gamma \to \infty$,

$$\hat{\chi}_\gamma = \begin{cases} (A_1K(\gamma)[\cos(A_2+\omega\log(D\gamma^{1/\theta})), \sin(A_2+\omega\log(D\gamma^{1/\theta}))](1+O(||m||)), 0), & \alpha < \overline{\alpha}, \\ (A_1K(\gamma)[\gamma^{\nu/\theta}, \gamma^{-\nu/\theta}](1+O(||m||)), 0), & \alpha \geq \overline{\alpha}. \end{cases}$$

Luego, cuando $\gamma \to \infty$, $\hat{\sigma}_\gamma$ describe una espiral logarítmica en $\hat{\Sigma}_\eta$ centrada en $(0,0,\eta)$ para $\alpha < \overline{\alpha}$; si $\alpha \geq \overline{\alpha}$, como los exponentes de γ en las coordenadas $\hat{y}$, $\hat{z}$ de $\hat{\chi}_\gamma$ son negativos (véase lema 3.3.3) $\hat{\sigma}_\gamma$ describe una curva que se aproxima a $(0,0,\eta)$. ■

Figura 3.1: Espacio de fases

Las estimaciones anteriores deben leerse en términos de Φ_0 y Φ. Ésta es la intención de los siguientes resultados.

Lema 3.4.6 *Sea σ_γ tal que $T(\sigma_\gamma) = \hat{\sigma}_\gamma$. Entonces $\sigma_\gamma = T^{-1}(0,0,\varepsilon) + \chi_\gamma$, $\chi_\gamma = \hat{\chi}_\gamma(1 + O(||m||))$.*

Demostración. Como T es un difeomorfismo, la linealización de la inversa de T cerca de $(0,0,\eta)$, para η suficientemente pequeño, se aproxima a la identidad y $||T^{-1} - I|| = O(||m||)$. ■

Lema 3.4.7 *La imagen de Γ_0 por Φ es una espiral logarítmica en Σ centrada en Q para $\alpha < \overline{\alpha}$. Si $\alpha \geq \overline{\alpha}$, entonces la imagen es una curva en Σ aproximándose a Q cuando $\gamma \to \infty$.*

Demostración. Como $\Phi_\eta : \Sigma_\eta \to \Sigma$ es el flujo de soluciones de (3.4) con dato inicial en Σ_η y el flujo de $Q_\eta = M(t) \cap \Sigma_\eta$ a lo largo de $M(t)$ a $Q = M(t) \cap \{y = 0\}$ es no singular, se concluye que Φ_η es un difeomorfismo. Por lo tanto Φ_η transforma la espiral o la curva en $\hat{\Sigma}_\eta$ (véase lema 3.4.5) en una espiral o una curva en Σ. ■

Con todos estos lemas es fácil probar el teorema 3.4.1:

Demostración. (**Teorema 3.4.1**) Al linealizar cerca de Q_η, la imagen de $Q_\eta + \chi_\gamma$ viene dada por

$$\Phi_\eta(Q_\eta + \chi_\gamma) = Q + D\Phi_\eta \chi_\gamma + O(||\chi_\gamma||^2) = Q + D\Phi_\eta \hat{\chi}_\gamma(1 + O(||m||) + O(K(\gamma))), \tag{3.14}$$

ya que $\Phi_\eta(Q_\eta) = Q$.

Como $Q = (0, \mu_\infty^{1+\theta} U'(\mu_\infty), \mu_\infty^\delta)$, la expresión obtenida para $\hat{\chi}_\gamma$ en el lema 3.4.5 da el valor de $\mu^\delta(\gamma)$ definido en el teorema 3.4.1, donde U es la solución singular de (3.2) correspondiente a la variedad inestable $M(t)$. Esto finaliza la prueba del teorema 3.4.1. ■

Nota 3.4.8 Fijado un intervalo compacto contenido en $t \geq \delta^{-1} \log \eta$ y llamando Φ_η^t al flujo en el tiempo t de soluciones de (3.4) con dato inicial en Σ_η, se tiene la estimación (3.14) para Φ_η^t. ■

Corolario 3.4.9 *Sea $u_\gamma(r)$ la solución de (3.2) con $u_\gamma(0) = \gamma > 0$, $u'_\gamma(0) = 0$, y sea $U(r)$ la solución singular de (3.2) hallada en el corolario 3.3.6. Entonces*

(i) Fijado $r_0 > 0$ y dado $\varepsilon > 0$, existen constantes positivas γ_0, ρ tales que

$$|u_\gamma(r) - U(r)| < \varepsilon, \quad |u'_\gamma(r) - U'(r)| < \varepsilon, \quad \forall \gamma > \gamma_0, \quad r \in [r_0, \mu_\infty + \rho].$$

(ii) Para $r_0 > 0$ suficientemente pequeño, existe C_1, una constante positiva, tal que

$$|u_\gamma(r) - U(r)| \leq C_1 r^{-\theta}, \quad |u'_\gamma(r) - U'(r)| \leq C_1 r^{-1-\theta}, \quad r \in (0, r_0).$$

Demostración. (i) Se sabe que existe $\mu = \mu(\gamma)$ tal que $u_\gamma(\mu) = 0$, y que existe μ_∞ tal que $U(\mu_\infty) = 0$. Si γ es suficientemente grande, el teorema 3.4.1 implica que $|\mu - \mu_\infty| < \rho$, con $\rho > 0$. Si $\mu \leq \mu_\infty$, entonces u_γ y U son no negativas en el intervalo $[r_0, \mu]$; sin embargo, si $\mu > \mu_\infty$, entonces γ debe escogerse suficientemente grande para mantener U cercano a 0 en el intervalo $[\mu_\infty, \mu]$, donde U es no positiva.

Fíjese ahora $\sigma > \eta$ y tómese Φ_η^t el flujo de soluciones (3.4) en el tiempo $t = \delta^{-1}\log\sigma$ ($s = \sigma$) con dato inicial en Σ_η. Por la nota 3.4.8, se puede usar una estimación similar a (3.14) para tener, para γ suficientemente grande,

$$|\Phi_\eta^t(Q_\eta + \chi_\gamma) - \Phi_\eta^t(Q_\eta)| < C_t|\hat{\chi}_\gamma|.$$

Si se permite a t variar en el intervalo $[\delta^{-1}\log\eta, \log(\mu_\infty + \rho)]$ (s variando en $(\eta, (\mu_\infty + \rho)^\delta)$), entonces, por el *teorema de continuidad respecto a los datos* (véanse **[58]** y **[78]**) se tiene

$$|\Phi_\eta^t(Q_\eta + \chi_\gamma) - \Phi_\eta^t(Q_\eta)| < C|\hat{\chi}_\gamma|$$

para todo t en ese intervalo, donde C es independiente de t. En particular, si las trayectorias solución correspondientes a u_γ y U se denotan por

$$(y_\gamma(t), z_\gamma(t), s_\gamma(t)) \quad \text{y} \quad (y_\infty(t), z_\infty(t), s_\infty(t)),$$

respectivamente, entonces

$$|(y_\gamma(t), z_\gamma(t)) - (y_\infty(t), z_\infty(t))| < C|\hat{\chi}_\gamma|$$

para $t \in [\delta^{-1}\log\eta, \log(\mu_\infty + \rho)]$; o sea

$$|u_\gamma(r) - U(r)| < r^{-\theta}C|\hat{\chi}_\gamma| < \varepsilon, \qquad |u'_\gamma(r) - U'(r)| < r^{-1-\theta}C|\hat{\chi}_\gamma| < \varepsilon$$

para $r \in [r_0, \mu_\infty + \rho]$ y γ suficientemente grande, ya que $|\hat{\chi}_\gamma| \to 0$ conforme $\gamma \to \infty$.

(ii) Con la misma notación que en (i), se sabe que

$$y_\infty(t) \to k \quad y_\gamma(t) \to 0 \quad \text{cuando } t \to -\infty.$$

Así,

$$y_\infty(t) - y_\gamma(t) \to k \quad \text{para } t \to -\infty,$$

lo que significa que

$$r^\theta(U(r) - u_\gamma(r)) \to k \quad \text{cuando } r \to 0.$$

O sea, existe $r_0 > 0$ tal que

$$|U(r) - u_\gamma(r)| \le C_1 r^{-\theta}, \quad r \in (0, r_0).$$

Para U' y u'_γ, el resultado se sigue de un cálculo similar. ∎

Prueba de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2

Se demuestran ahora los teoremas 3.1.1 y 3.1.2 como corolarios del teorema 3.4.1 y del corolario 3.4.9.

Demostración. (**Teorema 3.1.1**) Sea $v(r) = u_\gamma(\mu r)$, donde u_γ es la solución regular de (3.2) con $u_\gamma(0) = \gamma$, $u'_\gamma(0) = 0$ y $u_\gamma(\mu) = 0$. Entonces v es una solución radial regular positiva del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \mu^p(v^{q-1} + v^{\alpha-1}) & \text{en } B_1, \\ v = 0 & \text{en } \partial B_1, \end{cases}$$

con $v(0) = \gamma$ y $v'(0) = 0$. Si $w = \mu^\theta v$, entonces se tiene que w es una solución radial regular positiva de

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \mu^{\theta(\alpha-q)} w^{q-1} + w^{\alpha-1} \quad \text{en } B_1, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial B_1, \end{cases}$$

con $w(0) = \mu^\theta \gamma = \overline{\gamma}$. Si $\lambda = \mu^{\theta(\alpha-q)}$ (ha de notarse que, si $q = p$, entonces $\lambda = \mu^p$), entonces w es una solución radial regular positiva del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1} \quad \text{en } B_1, \\ w &= 0 \quad \text{en } \partial B_1. \end{cases}$$

De esta manera se ve que el comportamiento de λ es cualitativamente el mismo que el de μ. En otras palabras, si $\lambda_* = \mu_\infty^{\theta(\alpha-q)}$, entonces se puede escribir el teorema 3.4.1 en términos de λ y obtener así:

a) $S(r) = \mu_\infty^\theta U(\mu_\infty r)$ es una solución no acotada de (3.1) con $\lambda = \lambda_*$, donde U es la solución de (3.2) correspondiente a la variedad inestable $M(t)$. Además, para $r \to 0$,

$$r^\theta S(r) = (\mu_\infty r)^\theta U(\mu_\infty r) \to k, \qquad r^{1+\theta} S'(r) = (\mu_\infty r)^{1+\theta} U'(\mu_\infty r) \to -(k\theta)^{p-1},$$

lo que implica que $S \in W_0^{1,p}(B_1) \cap L^\beta(B_1)$, con $\beta < N(\alpha - p)/p$. Como $\alpha > Np/(N-p)$, entonces $\alpha - 1 < N(\alpha - p)/p$, por lo que S es una solución singular de (3.1).

b) La conclusión del teorema 3.4.1 muestra que $\mu(\gamma) \to \mu_\infty$ para $\gamma \to \infty$; es decir, para una sucesión de soluciones w_j de (3.1) correspondiente a λ_j con $||w_j||_\infty \to \infty$ se tiene $\lambda_j \to \lambda_*$.

c) Si $\alpha < \overline{\alpha}$, entonces existe una sucesión de soluciones w_j de (3.1) tal que $w_j(0) = \overline{\gamma}_j \to \infty$ según $j \to \infty$ y $\lambda_j = \lambda_*$, ya que en este caso μ oscila en torno a μ_∞ cuando $\gamma_j \to \infty$.

d) Si $\alpha \geq \overline{\alpha}$ entonces, para toda sucesión de soluciones w_j de (3.1) con $w_j(0) = \overline{\gamma}_j \to \infty$ para $j \to \infty$, se tiene $\lambda_j \to \lambda_*$ de forma monótona para $j \geq j_0$ suficientemente grande, ya que en este caso $\mu \to \mu_\infty$ de forma monótona para $j \geq j_0$ según $\gamma_j \to \infty$. ■

Demostración. (**Teorema 3.1.2**) Ahora, se reescriben los resultados del Corolario 3.4.9 en términos de w_j y S, donde w_j es una sucesión de soluciones radiales positivas de (3.1) con $w_j(0) = \bar{\gamma}_j \to \infty$ conforme $j \to \infty$, y μ_j es el primer cero positivo de u_j, solución de (3.2) con $u_j(0) = \gamma_j > 0$, $u_j'(0) = 0$, $\bar{\gamma}_j = \mu_j^\theta \gamma_j$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} |w_j(r) - S(r)| &= |\mu^\theta u_j(\mu_j r) - \mu_\infty^\theta U(\mu_\infty r)| \\ &\leq \mu_j^\theta |u_j(\mu_j r) - U(\mu_j r)| + |\mu_j^\theta U(\mu_j r) - \mu_\infty^\theta U(\mu_\infty r)|. \end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, el corolario 3.4.9 (i), la regularidad de U lejos del origen y el hecho de que $\mu_j \to \mu_\infty$ cuando $j \to \infty$, implican, para j suficientemente grande,

$$|w_j(r) - S(r)| < \varepsilon, \quad r \in [r_0, 1].$$

Para w_j' y S' se puede obtener un resultado similar; o sea, $w_j(r) \to S(r)$ y $w_j'(r) \to S'(r)$ uniformemente en conjuntos compactos que no contienen el origen para $j \to \infty$.

Respecto a la convergencia en L^β, $\beta < N(\alpha - p)/p$, y en $W_0^{1,p}$, hay que notar que

$$\begin{array}{rcl} r^\theta |w_j(r) - S(r)| & = & |(\mu_j r)^\theta u_j(\mu_j r) - (\mu_\infty r)^\theta U(\mu_\infty r)| \\ & \leq & (\mu_j r)^\theta |u_j(\mu_j r) - U(\mu_j r)| + |(\mu_j r)^\theta U(\mu_j r) - (\mu_\infty r)^\theta U(\mu_\infty r)|. \end{array}$$

Si $r \in (0, r_0)$, para r_0 pequeño y j suficientemente grande, entonces el corolario 3.4.9 (ii) y el hecho de que $\mu_j \to \mu_\infty$ para $j \to \infty$ implican

$$|w_j(r) - S(r)| \leq C_1 r^{-\theta} \quad r \in (0, r_0).$$

Para w_j' y S' un cálculo similar demuestra que

$$|w_j'(r) - S'(r)| \leq C_1 r^{-1-\theta} \quad r \in (0, r_0).$$

De esta manera, se tiene

$$\begin{array}{rcl} \int_{B_1} |w_j(x) - S(x)|^\beta \, dx & \leq & C \left(\int_0^{r_0} |w_j(r) - S(r)|^\beta r^{N-1} \, dr + \int_{r_0}^1 |w_j(r) - S(r)|^\beta r^{N-1} \, dr \right), \\ \int_{B_1} |w_j'(x) - S'(x)|^p \, dx & \leq & C \left(\int_0^{r_0} |w_j'(r) - S'(r)|^p r^{N-1} \, dr + \int_{r_0}^1 |w_j'(r) - S'(r)|^p r^{N-1} \, dr \right). \end{array}$$

Como $w_j \to S$, $w_j' \to S'$ uniformemente en conjuntos compactos que no contienen el origen, el segundo sumando del segundo miembro de las desigualdades anteriores está acotado. Respecto al primer término:

$$\begin{array}{rclcl} \int_0^{r_0} |w_j(r) - S(r)|^\beta \, r^{N-1} dr & \leq & C_1 \int_0^{r_0} r^{N-1-\theta\beta} \, dr & = & C_1 \dfrac{r_0^{N-\theta\beta}}{N - \theta\beta}, \\ \int_0^{r_0} |w_j'(r) - S'(r)|^p \, r^{N-1} dr & \leq & C_1 \int_0^{r_0} r^{N-1-(1+\theta)p} \, dr & = & C_1 \dfrac{r_0^{N-\theta\alpha}}{N - \theta\alpha}. \end{array}$$

Como se puede tomar β tal que $\theta\alpha < \theta\beta < N$, ya que $\beta < N(\alpha - p)/p = N/\theta$, entonces $w_j \to S$ en $L^\beta(B_1)$ y en $W_0^{1,p}(B_1)$. ■

3.5 Resultados para el problema con potencial $|x|^l$, $l > -p$

Los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo son igualmente válidos para el problema con potencial $|x|^l$, $l > -p$, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p w & = & |x|^l (\lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1}) & \text{en } B_1, \\ w & = & 0 & \text{en } \partial B_1, \end{array} \right.$$

con las siguientes modificaciones de los valores de los parámetros:

$$\overline{\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} p + \dfrac{p(l+p)}{N - p - 2\frac{l+p}{p} - \frac{2}{p}((l+p)(l+p\frac{N-1}{p-1}))^{1/2}}, & N > p + 4\dfrac{l+p}{p-1}, \\ \infty, & N \leq p + 4\dfrac{l+p}{p-1}, \end{array} \right.$$

$$k^{\alpha-p} = \theta^{p-1}(N - \theta(\alpha - 1)) > 0, \qquad \theta = \frac{l+p}{\alpha - p}.$$

Por lo tanto, el sistema autónomo (3.4) queda

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} & = & \theta y + |z|^{1/(p-1)}\operatorname{sign}(z) \\ \dfrac{dz}{dt} & = & \left(\dfrac{l(p-1)+p(\alpha-1)}{\alpha-p} - N\right) z - y^{\alpha-1} - s^2 y^{q-1} \\ \dfrac{ds}{dt} & = & \delta s \end{array}\right. \tag{3.15}$$

donde $\delta = (l+p)(\alpha-q)/(2(\alpha-p))$. Por último, los puntos singulares de este sistema tienen la misma expresión, y los autovalores correspondientes a la parte lineal quedan como se indica a continuación:

i) Si $\alpha < \overline{\alpha}$ entonces

$$\frac{p(\theta+1)-N}{2} + i\omega, \quad \frac{p(\theta+1)-N}{2} - i\omega, \quad \delta,$$

donde $\omega = \frac{1}{2}(4(l+p)(N-(p-1)\theta-p)/(p-1) - (p(\theta-1)-N)^2)^{1/2}$.

ii) Si $\alpha \geq \overline{\alpha}$, entonces

$$\frac{p(\theta+1)-N}{2} + \nu, \quad \frac{p(\theta+1)-N}{2} - \nu, \quad \delta,$$

donde $\nu = \frac{1}{2}((p(\theta+1)-N)^2 - 4(l+p)(N-(p-1)\theta-p)/(p-1))^{1/2}$.

3.6 Observaciones sobre el problema de evolución asociado

Si se considera el problema de evolución

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u & = & \lambda u^{q-1} + u^{\alpha-1}, & t>0,\ x \in B_1, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \geq 0, & x \in B_1, \\ u(x,t) & = & 0, & \text{en } \partial B_1 \times (0,\infty), \end{array}\right.$$

con $\lambda > 0$ tal que existe al menos una solución positiva del problema estacionario (3.1), se observa que la solución trivial es estable para $q = p$ e inestable para $q < p < 2$, en el sentido que se precisa a continuación:

Para $q = p$ se ha demostrado en el lema 3.2.1d) que no puede haber soluciones regulares positivas ordenadas. También para $q = p$ se tiene que βw es una supersolución de (3.1), donde $0 < \beta < 1$ y w es una solución regular positiva del problema (3.1), ya que ($\alpha > p$)

$$-\Delta_p(\beta w) = -\beta^{p-1}\Delta_p w = \beta^{p-1}(\lambda w^{q-1} + w^{\alpha-1}) > \lambda(\beta w)^{q-1} + (\beta w)^{\alpha-1}.$$

Por tanto, si se toma el dato inicial del problema de evolución u_0 suficientemente pequeño, por debajo de βw, entonces la solución del problema de evolución tiende cuando $t \to \infty$ a una solución estacionaria que está ordenada con w; por lo tanto, esa solución estacionaria no puede ser otra que la trivial.

En cambio, si se toma $q < \min(2,p)$, entonces el lema 4.6.4 del capítulo 4 implica que existe una solución positiva del problema de evolución anterior con dato inicial cero, la cual es a su vez subsolución del problema de evolución con dato inicial no negativo, por pequeño que éste sea. Esto implica que las soluciones de este último problema no pueden tender a cero. Esto también es cierto para $q = p < 2$ y $\lambda > \lambda_1$.

3.7 Apéndice: linealización del sistema autónomo

En este apéndice se analiza el problema de la linealización del sistema (3.7) cerca del punto singular P_+. Con este fin, se usarán algunos resultados de Hartman **[57]**, **[58]** y Belitskii **[19]**.

Sean N, p, q, α fijos, $\xi = (\bar{y}, \bar{z}, s)$. Entonces (3.7) puede escribirse de la siguiente manera

$$\frac{d\xi}{dt} = E\xi + F(\xi), \tag{3.16}$$

donde

$$E = \begin{pmatrix} \theta & \dfrac{(k\theta)^{2-p}}{p-1} & 0 \\ -(\alpha-1)k^{\alpha-2} & \theta(\alpha-1)-N & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$$

y $F(\xi) = (F_1(\bar{z}), F_2(\bar{y}, s), 0)$. Por los resultados de la sección 3.3, ningún autovalor de E tiene una parte real que se anule, y $F \in C^2$ y por tanto $F(\xi) = o(|\xi|)$ cuando $\xi \to 0$.

La linealización del sistema autónomo consiste en encontrar un cambio de variables C^1 cerca de $\xi = 0$ que transforme (3.16) en el sistema lineal

$$\frac{d\zeta}{dt} = E\zeta$$

cerca de $\zeta = 0$. Si $\xi = x(t, \xi_0)$ es la solución de (3.7) determinada por la condición inicial $x(0, \xi_0) = \xi_0$, entonces

$$T^t : \xi^t = x(t, \xi)$$

es un grupo de transformaciones de un entorno de $x = 0$ en un entorno de $\xi^t = 0$, verificando

$$x(t, \xi) = e^{Et}\xi + F(t, \xi)$$

con $F(t, \xi) \in C^2$, $F(t, \xi) = o(|\xi|)$ cuando $\xi \to 0$. El problema de la linealización de (3.16) es equivalente (véase **[57]**) al problema de la linealización de

$$\xi^1 = e^E\xi + X(\xi)$$

con $X(\xi) \in C^2$, $X(\xi) = o(|\xi|)$ cuando $\xi \to 0$. Así, se puede aplicar el siguiente resultado:

Teorema 3.7.1 *(Tma. 12.1, p. 257 en* **[58]***) En las hipótesis anteriores, si los autovalores $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de E satisfacen*

$$\beta_j \neq \sum m_i \beta_i \quad \textit{para } j = 1, 2, 3, \quad \textit{donde} \quad \sum m_i = 2, \tag{3.17}$$

para todas las ternas de enteros no negativos m_1, m_2, m_3, entonces existe T, un cambio de variables C^2 en un entorno de $\xi = 0$, tal que $T(0) = 0$, $DT(0) = I$ y, en las nuevas coordenadas,

$$\zeta^1 = e^E\zeta, \quad \textit{donde } \zeta = T\xi.$$

Puede comprobarse que la condición (3.17) se satisface siempre por los autovalores correspondientes al caso $\alpha < \overline{\alpha}$. Respecto al caso $\alpha \geq \overline{\alpha}$, hay dos excepciones:

$$\delta = 2\nu \quad \text{y} \quad \frac{N - p(\theta + 1)}{2} = 3\nu.$$

La primera puede solventarse redefiniendo δ ya que ν (y los autovalores de E diferentes de δ) depende de N, p, α, que están fijos, y no de δ; por ejemplo, tómese

$$\delta = \frac{p}{2 + \varepsilon} \frac{\alpha - q}{\alpha - p}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{3.18}$$

Nota 3.7.2 Teniendo en cuenta la independencia de los dos primeros autovalores de δ, la transformación anterior significa una reparametrización *sólo* de la variable dependiente. De esta forma se puede incluso mejorar la regularidad de F, ya que la potencia de s en la segunda coordenada de F es igual a $2 + \varepsilon$. ▪

La segunda excepción implica que los autovalores de E son de la forma:

$$-4\nu, \quad -2\nu, \quad \delta.$$

Como $\nu > 0$ y $\delta > 0$, entonces se tiene

$$e^{-4\nu} < e^{-2\nu} < 1, \quad e^{\delta} > 1.$$

En este caso, se aplica el siguiente resultado:

Teorema 3.7.3 *(Tma. 2 en* **[19]***) En las hipótesis anteriores, si los autovalores $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de E satisfacen*

$$e^{\beta_k} \neq e^{\beta_i} e^{\beta_j}, \quad e^{\beta_i} \leq 1 \leq e^{\beta_j}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.19}$$

entonces existe T, un cambio de variables C^1 en un entorno de $\xi = 0$, tal que $T(0) = 0$, $DT(0) = I$ y, en las nuevas coordenadas,

$$\zeta^1 = e^E \zeta, \qquad \textit{donde } \zeta = T\xi.$$

Puede verificarse que la condición (3.19) se satisface por los autovalores correspondientes a $\alpha \geq \overline{\alpha}$ a no ser que

$$\delta = 2\nu,$$

en este caso se redefine δ como en (3.18), y se linealiza (3.7).

Capítulo 4

Problemas parabólicos críticos

4.1 Introducción

En este capítulo se estudia el comportamiento de las soluciones no negativas del problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - \Delta_p u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, \quad x \in I\!\!R^N,\, t > 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x) \geq 0, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

donde $1 < p < N$ y $\lambda > 0$. El concepto de solución se precisará en cada caso.

En el caso $p = 2$ este problema aparece de manera natural al linealizar una solución estacionaria no acotada de algunos modelos de reacción-difusión (véanse **[28]**, **[51]**, **[60]**, **[69]** y **[75]**). El problema concreto (4.1) fue estudiado en el caso lineal $p = 2$ por Baras y Goldstein en **[17]**. El problema general ha sido estudiado en **[49]** en el caso de dato de borde cero en un dominio acotado conteniendo el origen. Este problema es crítico en el sentido que el potencial $|x|^{-p} \in \cap L^q_{loc}(I\!\!R^N)$ para cada $q < N/p$, pero $|x|^{-p} \notin L^{N/p}(I\!\!R^N)$ (véase la introducción de esta Memoria).

En este capítulo se analiza el comportamiento del problema de Cauchy en todo $I\!\!R^N$; tanto la existencia como las propiedades de las soluciones del problema (4.1) dependen de los valores de p y λ. En particular, se estudian las propiedades de extinción en tiempo finito de las soluciones en dominios acotados y en $I\!\!R^N$ para p y λ convenientemente pequeños; véanse **[40]** y **[59]** para el caso homogéneo ($\lambda = 0$).

La organización del capítulo es la siguiente: en primer lugar, en la próxima sección se estudia la existencia y regularidad de una solución autosemejante en el caso $1 < p < 2$.

La sección 4.3 se dedica a presentar algunos resultados de **[20]**, **[24]** y **[25]**, en la que se incluye una *desigualdad de Hardy* (véanse los detalles en **[49]**).

En la sección 4.4 se aplican los métodos presentados en las secciones 4.2 y 4.3 para estudiar la existencia de soluciones de (4.1). Como en **[49]**, se ve que la dependencia de la *desigualdad de Hardy* es muy importante si $p \geq 2$, mientras que para $1 < p < 2$ el comportamiento es bastante diferente. La existencia en todos los casos se obtiene como el límite de soluciones aproximadas en dominios acotados.

En la sección 4.5 se obtienen algunos resultados sobre la existencia y no existencia de tiempo finito de extinción si $1 < p < 2$ y λ es suficientemente pequeño, usando la *desigualdad de Hardy*: para un dominio acotado el tiempo finito de extinción depende del tamaño del dominio si $2N/(N+2) \leq p < 2$, pero, si $1 < p < 2N/(N+2)$, el tiempo de extinción depende exclusivamente de alguna norma conveniente del dato inicial, independientemente del dominio. Este comportamiento permite concuir la extinción en tiempo finito para el problema de Cauchy (4.1). Nótese la diferencia entre el problema de Cauchy en todo $I\!R^N$ y en un dominio acotado. Además, para λ suficientemente grande y $1 < p < 2$ se tiene la no existencia de un tiempo de extinción finito, independientemente del dominio. Es decir, la extinción es una propiedad que depende sutilmente del equilibrio entre la "difusión rápida" que da el hecho $1 < p < 2$ y la reacción del segundo miembro a través de λ. En esta sección se analizan también los valores intermedios de λ.

Finalmente la sección 4.6 contiene algunas notas sobre el comportamiento (existencia, unicidad y extinción en tiempo finito) de las soluciones correspondientes a potenciales y no linealidades más generales. Se considerará principalmente $1 < p < 2$ y no linealidades de tipo *potencia asintóticamente*. Como en la introducción de esta Memoria, se dirá que f es **subdifusiva** (respectivamente **superdifusiva**) cuando $u \to a$, donde $a = 0$ ó $a = \infty$, si se verifica:

$$\lim_{u \to a} \frac{f(u)}{u^{q-1}} = c_1 \quad \text{para algún } q, \quad 1 < q < p \text{ (respectivamente } p < q).$$

4.2 Una solución autosemejante al problema de Cauchy para $p < 2$

Antes de introducir los resultados de existencia para el problema de Cauchy general (4.1), se considera el problema de Cauchy con $u_0 \equiv 0$ para $p < 2$. Hay que señalar la existencia de una solución autosemejante positiva de este problema para algunos valores de λ, obteniendo un ejemplo de no unicidad ya que la solución trivial es también una solución de este problema (véase **[49]**). Más precisamente, se buscan soluciones autosemejantes al problema de Cauchy en todo $I\!R^N$, es decir, soluciones de la forma $S(r,t) = t^\alpha f(t^\beta r)$, donde $r = |x|$; así:

$$S_t = \alpha t^{\alpha-1} f + \beta t^{\alpha+\beta-1} r f', \; S_r = t^{\alpha+\beta} f', \; S_{rr} = t^{\alpha+2\beta} f''.$$

Por lo que, necesariamente:

A) los exponentes de semejanza satisfacen $(\alpha - 1) = \alpha(p-1) + \beta p$,

B) la correspondiente ecuación diferencial ordinaria en la variable $\xi = t^\beta r$ es

$$\alpha f + \beta \xi f' = (p-1)|f'|^{p-2} f'' + \frac{N-1}{\xi} |f'|^{p-2} f' + \frac{\lambda}{\xi^p} |f|^{p-2}.f$$

Si se buscan soluciones de la forma $A|\xi|^\gamma$, $A > 0$, se tiene:

$$1) \quad \gamma = \frac{-p}{2-p}\,, \qquad 2) \quad |A|^{p-2} = \frac{\alpha + \beta\gamma}{(p-1)|\gamma|^p + (N-p)|\gamma|^{p-2}\gamma + \lambda}.$$

Se ha demostrado en **[49]** que 2) tiene sentido si $\lambda > \lambda_{N,p} = ((N-p)/p)^p$, la inversa de la constante óptima en la *desigualdad de Hardy* (véase siguiente sección). En particular, esta solución autosemejante toma la forma

$$S(x,t) = A(\lambda)\left(\frac{t}{|x|^p}\right)^{1/(2-p)},$$

donde $x \in I\!R^N$ y

$$A(\lambda) = \left(\left(\frac{p}{2-p}\right)^{p-1}(p - N(2-p)) + \lambda(2-p)\right)^{1/(2-p)}.$$

Si se supone $\lambda > 0$, la expresión anterior indica que los valores de λ correspondientes a la existencia de solución autosemejante vienen dados por

$$\lambda > \mu_{N,p} = \left(\frac{p}{2-p}\right)^{p-1}\left(N - \frac{p}{2-p}\right).$$

Introduciendo el parámetro $s = N(2-p)/p$, $(2 - p < s < N$, ya que $1 < p < N)$, entonces

$$\mu_{N,p} = \left(\frac{p}{2-p}\right)^{p}(s-1), \qquad \lambda_{N,p} = \left(\frac{p+s-2}{2-p}\right)^{p}.$$

Estos dos valores críticos se relacionan como sigue

$$\frac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}} = (s-1)\left(\frac{p}{p+s-2}\right)^{p}.$$

Es importante tener en cuenta los hechos siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
\mu_{N,p} < 0 & \text{para} & s < 1, & \text{es decir,} & 2 > & p > 2N/(N+1), \\
\mu_{N,p} = 0 & \text{para} & s = 1, & \text{es decir,} & & p = 2N/(N+1), \\
\mu_{N,p} > 0 & \text{para} & 1 < s < N, & \text{es decir,} & 1 < & p < 2N/(N+1) \text{ y} \\
\mu_{N,p} = \lambda_{N,p} & \text{para} & s = 2, & \text{es decir,} & & p = 2N/(N+2).
\end{array}$$

De hecho, si se representan $\mu_{N,p}$ y $\lambda_{N,p}$ como funciones de s y p (véanse figuras 4.1 y 4.2), se puede ver que $\mu_{N,p}$ es tangente a $\lambda_{N,p}$ en $s = 2$ ó $p = 2N/(N+2)$.

La regularidad de S depende sólo del valor de s y es como sigue (véase **[49]**, Sec. 6.2), donde $1 \leq q < s$:

$$\begin{array}{lll}
S \in W^{1,p}_{loc}(I\!R^N) \cap L^q_{loc}(I\!R^N), & 2 < s < N, & \text{es decir, } 1 < p < \dfrac{2N}{N+2}, \\
S \in L^q_{loc}(I\!R^N), & 1 < s \leq 2, & \text{es decir, } \dfrac{2N}{N+2} \leq p < \dfrac{2N}{N+1}.
\end{array}$$

Nota 4.2.1
i) Nótese que si $1 < p < 2N/(N+2)$ el exponente crítico de Sobolev es menor que 2, luego las propiedades de integrabilidad local de S son mejores que las que da el *teorema de inclusión de Sobolev.*
ii) Formalmente esta solución autosemejante también existe en el rango $2 - p < s \leq 1$, $(2N/(N+1) \leq p < 2)$. En particular, S no pertenece a L^1 localmente; S es una solución de la ecuación lejos del origen en el sentido de distribuciones y en casi todo punto, con una masa infinita concentrada en $(0,0)$ como dato inicial. Si $2N/(N+1) < p < 2$, entonces $\mu_{N,p} < 0$, o sea, se tiene que λ pertenece al intervalo no vacío $(\mu_{N,p}, 0]$ y para tal λ el término $\lambda|x|^{-p}u^{p-1}$ es un término de absorción. ∎

Figura 4.1: $\mu_{N,p}$ y $\lambda_{N,p}$ como funciones de s.

Figura 4.2: $\mu_{N,p}$ y $\lambda_{N,p}$ como funciones de p.

Para terminar esta sección, nótese que un desplazamiento positivo en el tiempo de S, denotado por $\overline{S}(x,t) = S(x, t+t_0)$, $t_0 > 0$, puede emplearse como supersolución del problema general de Cauchy (4.1), siempre que se pueda tomar el desplazamiento en el tiempo de modo que $u_0 \leq \overline{S}$.

4.3 Los problemas truncados y resultados de compacidad

Esta sección contiene los resultados auxiliares necesarios en las siguientes secciones. La siguiente *desigualdad de Hardy* se usará de forma sistemática (una prueba de este resultado se halla en **[49]**; véase también **[56]** para $N = 1$).

Lema 4.3.1 *(Desigualdad de Hardy) Si* $1 < p < N$ *y* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, entonces*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \leq \lambda_{N,p}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx, \qquad\qquad \lambda_{N,p} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p,$$

donde $\lambda_{N,p}^{-1}$ *es óptima.*

Considérense ahora los problemas para $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $n > 0$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{nt} - \Delta_p u_n &=& \lambda W_n(x) u_n^{p-1}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_n(x,0) &=& T_n(u_0(x)), & \\ u_n(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{4.2}$$

donde $W_n(x) = T_n(|x|^{-p})$, T_n es el truncamiento a altura n ($T_n(\zeta) = \min(n,\zeta)$ para $\zeta \geq 0$), $u_0(x) \geq 0$ y Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$. Estos problemas se llaman *problemas truncados* ya que se obtienen a partir del siguiente problema de Dirichlet con dato de borde cero en Ω (*problema original*)

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u &=& \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &=& u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{4.3}$$

aplicando el truncamiento T_n tanto al potencial $|x|^{-p}$ como al dato inicial. Ha de notarse que

$$W_n(x) \leq |x|^{-p} \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{uniformemente, para } 1 \leq r < N/p.$$

Los elementos de la sucesión u_n se usarán como aproximaciones para obtener la solución u de (4.3) definida como el límite de u_n en cualquier dominio acotado fijo Ω. Con este fin, se necesitan algunos resultados de compacidad que permitan pasar al límite en esa sucesión. Uno de estos resultados de compacidad se demuestra en **[25]** en un contexto más general; la prueba de este resultado se adapta al caso que aquí se trata como sigue:

Fíjense $T > 0$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un dominio acotado, y sea $Q = \Omega \times (0,T)$. En primer lugar, se demostrará el siguiente lema:

Lema 4.3.2 *Si u_n, $n > 0$, es una sucesión uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, con $1 < p < N$, entonces*

a) $W_n u_n^{p-1}$ está uniformemente acotada en $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.

b) $W_n u_n^{p-1} \in L^q(Q)$ uniformemente para $1 \leq q < (p^*)' = (1-(N-p)/(Np))^{-1}$.

Demostración. Sea $g_n = W_n u_n^{p-1}$.

a) Tómese $\psi \in L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, $\psi \geq 0$; usando las *desigualdades de Hölder* y *Hardy*:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega g_n \psi \, dxdt \leq \int_0^T \int_\Omega \frac{u_n^{p-1}}{|x|^p} \psi \, dxdt = \int_0^T \int_\Omega \frac{u_n^{p-1}}{|x|^{p-1}} \frac{\psi}{|x|} \, dxdt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{u_n^p}{|x|^p} \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega \frac{\psi^p}{|x|^p} \, dx \right)^{1/p} dt \\
&\leq \lambda_{N,p}^{-1} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dxdt \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla \psi|^p \, dxdt \right)^{1/p} \\
&\leq C \lambda_{N,p}^{-1} ||\psi||_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))},
\end{aligned}$$

ya que u_n está uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, por hipótesis; esto significa que g_n está uniformemente acotada como operador en el espacio $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$.

b) Si u_n está uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, entonces $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ en casi todo $t \in (0,T)$. Por el *teorema de Rellich-Kondrachov* (véase por ejemplo **[27]**), $u_n \in L^r(\Omega)$ en casi todo $t \in (0,T)$ para $1 \leq r < Np/(N-p)$. Por otra parte, para $q \geq 1$, la *desigualdad de Hölder* implica que

$$\int_0^T \int_\Omega g_n^q \, dxdt \leq \int_0^T \left(\int_\Omega u_n^{q(p-1)\alpha} \, dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_\Omega |x|^{-pq\alpha/(\alpha-1)} \, dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} dt,$$

donde $\alpha > 1$ ha de elegirse de forma que $q(p-1)\alpha < Np/(N-p)$ y $q\alpha/(\alpha-1) < N/p$, es decir,

$$\frac{N}{N-qp} < \alpha < \frac{N}{N-p} \frac{p}{q(p-1)}.$$

Como

$$\frac{N}{N-qp} = \frac{N}{N-p} \frac{N-p}{N-qp},$$

se puede siempre hallar α si se cumple lo siguiente

$$\frac{N-p}{N-qp} < \frac{p}{q(p-1)}, \qquad \text{es decir,} \qquad q < \frac{Np}{Np-(N-p)} = (p^*)'.$$

En este caso, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega g_n^q \, dxdt &\leq \int_0^T \left(\int_\Omega u_n^{q(p-1)\alpha} \, dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_\Omega |x|^{-pq\alpha/(\alpha-1)} \, dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} dt \\
&\leq C(\Omega,N,p,q) \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx \right)^{q(p-1)/p} \left(\int_\Omega |x|^{-pq\alpha/(\alpha-1)} \, dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} dt.
\end{aligned}$$

Como Ω es un dominio acotado y u_n está uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, entonces las dos integrales anteriores son finitas. Así, para $1 \le q < (p^*)'$, $g_n = W_n u_n^{p-1} \in L^q(Q)$ uniformemente.

■

Considérese ahora u_n la sucesión de soluciones del problema (4.2) y g_n como en el lema previo. Si se supone que u_n está uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, por el lema 4.3.2 se tiene $g_n \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ y g_n está acotada en el espacio de las medidas de Radon en Q, $\mathcal{M}(Q)$, ya que $g_n \in L^1(Q)$ uniformemente. Además, en estas hipótesis, existe u tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ conforme $n \to \infty$ para una subsucesión. De esta manera se pueden aplicar los resultados de Boccardo y Murat en **[25]** a (4.2), obteniendo que $\nabla u_n \to \nabla u$ fuertemente en $(L^q(\Omega))^N$, para $q < p$, y así se tiene una solución en sentido de distribuciones de (4.3). Más precisamente, el resultado de Boccardo y Murat en nuestro caso es como sigue.

Lema 4.3.3 *Si las soluciones u_n de (4.2) están uniformemente acotadas en $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ entonces existe una solución $u \in L^\infty_{loc}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$ del problema original (4.3) en Ω que satisface la ecuación en el sentido de las distribuciones.*

Demostración. Basta usar la prueba del teorema 4.3 de **[25]** adaptada al problema (4.2). ■

Además, en las hipótesis anteriores, el lema 4.3.2 implica que existe una función $g \in L^1(Q)$ tal que $g_n \rightharpoonup g$ débilmente en $L^1(Q)$ (para una subsucesión) si $n \to \infty$. De esta manera se puede aplicar el teorema 4.1 de **[25]** (véase apédice a este capítulo) para las soluciones de (4.2), obteniendo para $l > 0$ fijo que

$$\nabla T_l(u_n) \to \nabla T_l(u) \quad \text{fuertemente en } (L^p_{loc}(Q))^N.$$

Esta clase de argumentos se usará en la siguiente sección para demostrar la existencia de solución al problema de Cauchy para $\lambda < \lambda_{N,p}$ mediante la *desigualdad de Hardy*.

Sin embargo, si $\lambda \ge \lambda_{N,p}$, es necesario seguir una estrategia diferente para demostrar la existencia de una solución, más débil, del problema de Cauchy (4.1) (véase **[49]** para el caso de un dominio acotado). Para resolver el problema de Cauchy para $1 < p < 2$ y $\lambda \ge \lambda_{N,p}$, supóngase que existe una sucesión v_n $(n > 0)$ de soluciones de los siguientes problemas

$$\left\{\begin{array}{rcll} v_{nt} - \Delta_p v_n &=& \lambda W_n(x)\tilde{v}_{n-1}^{p-1}, & x \in \Omega_n,\ t > 0,\\ v_n(x,0) &=& u_0(x), & x \in \Omega_n,\\ v_n(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega_n,\ t > 0,\end{array}\right.$$

donde $\tilde{v}_{n-1}^{p-1}$ es la extensión por 0 de v_{n-1} a Ω_n, una sucesión anidada creciente de dominios acotados, u_0 es una función acotada, y supóngase que v_n está uniformemente acotada superiormente por $\overline{S}$, un desplazamiento adecuado en el tiempo de la solución autosemejante S del problema de Cauchy correspondiente a este valor de λ, tal que $u_0 \le \overline{S}$, es decir,

$$v_n \le \overline{S} \quad \forall n \ge 0.$$

En este caso se demuestra en la siguiente sección que es posible pasar al límite y obtener una solución al problema de Cauchy para $\lambda \ge \lambda_{N,p}$ y $1 < p < 2N/(N+1)$ (nótese que este valor crítico, $p_1 = 2N/(N+1)$, corresponde al extremo superior del rango en el cual la solución autosemejante S es localmente integrable). Hay que subrayar que el paso al límite para $1 < p < 2N/(N+2)$ se efectúa mediante la aplicación del lema 4.3.3, tras mostrar la acotación de la sucesión de las soluciones aproximadas v_n en el espacio $L^p(0,T;W^{1,p}(B_R))$ usando una función corte, donde B_R es la bola de radio R centrada en el origen en $I\!R^N$.

Sin embargo, el paso al límite para $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$ es mucho más delicado, y necesita los siguientes lemas demostrados en **[49]**, basados en las ideas de **[20]**, **[24]** y **[25]**:

Lema 4.3.4 *Si $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$ y v_n es una sucesión de funciones positivas definidas en Ω, un dominio acotado, verificando que $v_n \leq \overline{S}$ y*

$$\frac{1}{k}\int_0^T \int_{\{v_n<k\}} |\nabla v_n|^p \, dxdt \leq M,$$

entonces se tiene la siguiente estimación en el espacio de Marcinkiewitz $\mathcal{M}^{p_2}$:

$$|\{(x,t) \in Q \, : \, |\nabla v_n(x,t)| > h\}| \leq C(p,N,T)h^{-p_2},$$

donde $Q = \Omega \times [0,T]$, $1 \leq q < s$ y $p_2 = pq/(q+1)$.

Lema 4.3.5 *En las hipótesis del Lema 4.3.4, se tiene*
a) $\nabla v_n \to \nabla v$ en casi todo punto y en medida.
b) $|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \to |\nabla v|^{p-2}\nabla v$ en L^1.

4.4 Resultados de existencia para el problema de Cauchy

En esta sección se demuestran los resultados de existencia para el problema de Cauchy (4.1). Las demostraciones están basadas en los resultados de compacidad contenidos en la sección previa. Hay que destacar el diferente comportamiento de acuerdo con los valores de λ: si $p \geq 2$ el papel de λ es muy importante, mientras que el papel de la *desigualdad de Hardy* es menos importante cuando $p \to 1$. Para ser precisos, se divide esta sección en varias subsecciones.

4.4.1 Resultados de existencia para $\lambda < \lambda_{N,p}$, $1 < p < N$

Considérese el problema de Cauchy (4.1) donde $1 < p < N$ y $0 < \lambda < \lambda_{N,p}$. Se va a construir una solución de (4.1) como límite de soluciones de problemas aproximados en dominios acotados, donde solución en este caso significa una función

$$u \in L^\infty(0,\infty; L^2_{loc}(I\!R^N)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}_{loc}(I\!R^N)) \quad \forall T > 0,$$

que verifica la ecuación en (4.1) en el sentido de las distribuciones.

Además, para empezar se supone que existe una bola B en $I\!R^N$ centrada en el origen tal que $u_0 \in \mathcal{C}_0(\overline{B})$, $u_0 \geq 0$ en B.

Teorema 4.4.1 *Si $1 < p < N$, $0 < \lambda < \lambda_{N,p}$ y $u_0 \in \mathcal{C}_0(\overline{B})$, $u_0 \geq 0$ en B, entonces existe una solución global a (4.1), u, que se obtiene como el límite de las soluciones u_k de los siguientes problemas:*

$$\begin{cases} u_{kt} - \Delta_p u_k &= \lambda \dfrac{u_k^{p-1}}{|x|^p}, & x \in B_k,\ t > 0, \\ u_k(x,0) &= u_0(x), & x \in B_k, \\ u_k(x,t) &= 0, & x \in \partial B_k,\ t > 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

donde B_k es la bola de radio k en $\mathbb{R}^N$ centrada en el origen.

Demostración. En estas hipótesis, fíjense $T > 0$ y $R > 0$ suficientemente grandes tales que $B \subset B_R$, y sea $Q_R = B_R \times (0,T)$. Se conocen los siguientes hechos:

a) Por el teorema 4.1 de **[49]**, existe una solución global $u_k \geq 0$ para (4.4), verificando

$$u_k \in L^\infty(0,\infty; L^2(B_k)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(B_k)) \quad \forall T > 0,$$

y

$$u_{kt} \in L^2((\varepsilon,\infty) \times B_k) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

b) Si se multiplica la ecuación (4.4) por u_k y se integra por partes en $B_k \supset B_R$ para k suficientemente grande, se tiene, por la *desigualdad de Hardy*,

$$\int_{B_k} u_k^2(x,T)\,dx + \gamma \int_0^T \int_{B_k} |\nabla u_k(x,t)|^p\,dxdt \leq \int_{B_k} u_0^2(x)\,dx \qquad \gamma > 0.$$

Esto implica que la sucesión u_k está uniformemente acotada en $L^p(0,T;W^{1,p}(B_R))$, y, por el lema 4.3.3, se tiene la existencia de $u \in L^\infty_{loc}(0,T;L^2(B_R)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(B_R))$ tal que

$$u_t - \Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p}$$

en $\mathcal{D}'(Q_R)$, con $u(x,0) = u_0(x)$. Además, como $u_k \to u$ fuertemente en $L^p_{loc}(Q_R)$, $\nabla u_k \to \nabla u$ fuertemente en $L^q(Q_R)$, $1 \leq q < p$, y $\nabla T_l u_k \to \nabla T_l u$ fuertemente en $L^p_{loc}(Q_R)$ (véase sección 4.3), entonces se obtiene $u_k \to u$ fuertemente en $W^{1,q}_{loc}(Q_R)$, $1 \leq q < p$ y $T_l u_k \to T_l u$ fuertemente en $W^{1,p}_{loc}(Q_R)$. ∎

Nota 4.4.2 Si se toma $u_0 \in L^r(B)$, con $r \geq 2$, el resultado también es cierto, ya que B es un dominio acotado. Esto permite tomar $u_0 \in L^s(B)$, donde $s \geq 2$ (o sea, $1 < p \leq 2N/(N+2)$). Además, este resultado es también válido para $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$; la prueba se obtiene de forma similar mediante el truncamiento de u_0 en cada B_k. ∎

4.4.2 Resultados de existencia para $\lambda > 0$, $1 < p < 2N/(N+1)$

En esta subsección se demuestra la existencia de solución para el problema de Cauchy (4.1) con $\lambda > \mu_{N,p}$ y $1 < p < 2N/(N+1)$. La prueba consiste en un proceso de iteración similar a los empleados en **[49]** (véase **[44]** también) usando como supersolución la solución autosemejante S correspondiente a λ desplazada adecuadamente en el tiempo; de hecho este proceso puede llevarse a cabo también para $\lambda \leq \mu_{N,p}$, tomando como supersolución una solución autosemejante correspondiente a algún $\Lambda > \mu_{N,p}$. Sea B una bola en $\mathbb{R}^N$; se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.4.3 *Si $1 < p < 2N/(N+1)$, $\lambda > 0$ y $u_0 \in \mathcal{C}_0(\overline{B})$, $u_0 \geq 0$ en B, entonces existe una solución u de (4.1) en sentido de distribuciones, que se obtiene como límite de la sucesión dada por las iteraciones $(n > 0)$*

$$\begin{cases} v_{nt} - \Delta_p v_n &= \lambda W_n(x)\tilde{v}_{n-1}^{p-1}, & x \in B_{n+1},\ t > 0, \\ v_n(x,0) &= u_0(x), & x \in B_{n+1}, \\ v_n(x,t) &= 0, & x \in \partial B_{n+1},\ t > 0, \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} v_{0t} - \Delta_p v_0 &= 0, & x \in B_1,\ t > 0, \\ v_0(x,0) &= u_0(x), & x \in B_1, \\ v_0(x,t) &= 0, & x \in \partial B_1,\ t > 0, \end{cases}$$

donde $\tilde{v}_{n-1} = v_{n-1}$ en B_n, $\tilde{v}_{n-1} = 0$ en $I\!R^N \setminus B_n$, y B_n es la bola de radio n centrada en el origen de $I\!R^N$. De hecho, si $1 < p < 2N/(N+2)$ entonces $u \in L^\infty(0,\infty; L^2_{loc}(I\!R^N)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}_{loc}(I\!R^N))$.

Demostración. Como $\lambda > 0$, existe una supersolución autosemejante del problema de Cauchy con dato inicial cero, S. Sea $\overline{S}$ un desplazamiento en el tiempo de S de forma que $u_0 \leq \overline{S}$ (u_0 está acotado). Entonces, se tiene en B_1

$$\begin{array}{rcll} v_{0t} - \Delta_p v_0 = 0 & \leq & \lambda \dfrac{\overline{S}^{p-1}}{|x|^p} \leq \overline{S}_t - \Delta_p \overline{S}, & x \in B_1,\ t > 0, \\ v_0(x,0) = u_0(x) & \leq & \overline{S}(x,0), & x \in B_1, \\ v_0(x,t) = 0 & \leq & \overline{S}(x,t), & x \in \partial B_1,\ t > 0. \end{array}$$

Por lo que se concluye que $\tilde{v}_0 \leq \overline{S}$, y por recurrencia es fácil probar que $\tilde{v}_n \leq \overline{S}$, $\forall n > 0$.

Fíjense $T > 0$ y $R > 0$ suficientemente grandes tales que $B \subset B_{R+1}$ y tómese una función corte

$$\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{R+1}), \quad \varphi \equiv 1 \text{ en } B_R, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ y } |\nabla\varphi| \leq C \text{ en } A_R = B_{R+1} \setminus B_R$$

(nótese que φ no depende de t). Sea $Q_R = B_R \times (0,T)$ y tómese $n > R+1$ tal que $B_{R+1} \subset B_n$.

Considérese $1 < p < 2N/(N+2)$; ya que $v_n \in W_0^{1,p}(B_{n+1})$ y $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{R+1})$, entonces $v_n\varphi^p \in W_0^{1,p}(B_{R+1})$. Si se multiplica por $v_n\varphi^p$ la ecuación satisfecha por v_n y se integra, se obtiene

$$\int_{B_{R+1}} v_{nt} v_n \varphi^p + \int_{B_{R+1}} \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla(v_n\varphi^p)\rangle = \lambda \int_{B_{R+1}} W_n \tilde{v}_{n-1}^{p-1} v_n \varphi^p.$$

Como $\tilde{v}_{n-1} \leq \overline{S}$ y $v_n \leq \overline{S}$ en B_{n+1}, e integrando en el intervalo $[0,T]$, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} v_n^2(x,T)\varphi^p + \int_0^T \int_{B_{R+1}} |\nabla v_n|^p \varphi^p + p\int_0^T \int_{A_R} v_n \varphi^{p-1} \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla\varphi\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 \varphi^p + \lambda \int_0^T \int_{B_{R+1}} W_n \overline{S}^p. \end{aligned}$$

Usando las *desigualdades de Young* y *Hölder*,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\textstyle\int_{B_{R+1}} v_n^2(x,T)\varphi^p + \int_0^T \int_{B_R} |\nabla v_n|^p \varphi^p + \int_0^T \int_{A_R} |\nabla v_n|^p \varphi^p \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 \varphi^p - p\int_0^T \int_{A_R} v_n \varphi^{p-1} \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla\varphi\rangle + \lambda \int_0^T \int_{B_{R+1}} W_n \overline{S}^p \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 + p\int_0^T \int_{A_R} (|\nabla v_n|\varphi)^{p-1} v_n |\nabla\varphi| + \lambda \int_0^T \int_{B_{R+1}} W_n \overline{S}^p \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 + \int_0^T \int_{A_R} (|\nabla v_n|\varphi)^p + C_1(p) \int_0^T \int_{A_R} v_n^p \\
&\textstyle +\lambda \int_0^T \left(\int_{B_{R+1}} W_n^{2/(2-p)}\right)^{(2-p)/2} \left(\int_{B_{R+1}} \overline{S}^2\right)^{p/2}.
\end{aligned}
$$

Ya que se pueden simplificar los términos que involucran $\varphi^p|\nabla v_n|^p$ en A_R, se obtiene, usando de nuevo la *desigualdad de Young* y que $v_n \leq \overline{S}$ en B_{n+1} y $W_n \leq |x|^{-p}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{B_R} v_n^2(x,T) \quad &+ \quad \textstyle\int_0^T \int_{B_R} |\nabla v_n|^p \\
\leq \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 + C_1(p)\int_0^T \int_{A_R} \overline{S}^p \quad &+ \quad \lambda\left(\frac{2-p}{2}\int_0^T \int_{B_{R+1}} |x|^{-2p/(2-p)} + \frac{p}{2}\int_0^T \int_{B_{R+1}} \overline{S}^2\right).
\end{aligned}
$$

Si se define

$$
\beta(T) = \int_{B_{R+1}} u_0^2 + C_1(p)\int_0^T \int_{A_R} \overline{S}^p + \lambda(2-p)\int_0^T \int_{B_{R+1}} |x|^{-2p/(2-p)} + \lambda p \int_0^T \int_{B_{R+1}} \overline{S}^2,
$$

entonces $\beta(T)$ está uniformemente acotada, porque $1 < p < 2N/(N+2)$ y $\overline{S} \in L^q_{loc}(I\!R^N)$ con $q > 2$. Así pues, se tiene

$$
\int_{B_R} v_n^2(x,T) \leq \beta(T) \leq c(\lambda, p, T, R, N, ||u_0||_2).
$$

Esto da una cota uniforme para la norma de v_n en $L^2(B_R)$; por otra parte, como

$$
\int_0^T \int_{B_R} |\nabla v_n|^p \leq \beta(T) \leq c(\lambda, p, T, R, N, ||u_0||_2),
$$

se tiene que la sucesión v_n está uniformemente acotada en el espacio $L^p(0,T;W^{1,p}(B_R))$. De esta forma se puede pasar al límite por el lema 4.3.3 obteniendo una solución global positiva u de (4.1) en $\mathcal{D}'(Q_R)$ con $\lambda > 0$ y $1 < p < 2N/(N+2)$.

Ahora, sea $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$; en este rango, la regularidad de $\overline{S}$ (véase sección 4.2) implica que la sucesión v_n converge en L^q a algún $v \leq \overline{S}$, para $1 \leq q < s \leq 2$; así, no se puede seguir el argumento anterior para demostrar el resultado de existencia. Se introducen los conjuntos

$$
C_{R+1,k} = B_{R+1} \cap \{v_n\varphi^p \geq k\} \quad \overline{C}_{R,k} = B_R \cap \{v_n\varphi^p < k\} \quad A_{R,k} = \overline{C}_{R+1,k} \setminus \overline{C}_{R,k}.
$$

Si se multiplica por $T_k(v_n\varphi^p)$ la ecuación satisfecha por v_n y se integra en B_{R+1}, se obtiene

$$\int_{B_{R+1}} v_{nt}T_k(v_n\varphi^p) + \int_{B_{R+1}} \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla(T_k(v_n\varphi^p))\rangle = \lambda \int_{B_{R+1}} W_n \tilde{v}_{n-1}^{p-1} T_k(v_n\varphi^p),$$

es decir (recuérdese que φ no depende de t)

$$\frac{1}{2}\int_{\overline{C}_{R+1,k}} (v_n^2)_t\varphi^p + k\int_{C_{R+1,k}} v_{nt} + \int_{\overline{C}_{R+1,k}} \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla(v_n\varphi^p)\rangle = \lambda \int_{B_{R+1}} W_n \tilde{v}_{n-1}^{p-1} T_k(v_n\varphi^p).$$

Integrando en $[0,T]$, se tiene (nótese que $\tilde{v}_{n-1} \le \overline{S}$ y $0 \le \varphi \le 1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\overline{C}_{R+1,k}} v_n^2(x,T)\varphi^p \quad &+ \quad \textstyle\int_0^T \int_{\overline{C}_{R+1,k}} \varphi^p|\nabla v_n|^p + p\int_0^T \int_{A_{R,k}} \varphi^{p-1} v_n \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n, \nabla\varphi\rangle \\ &\le \quad \frac{1}{2}\int_{\overline{C}_{R+1,k}} u_0^2\varphi^p + k\int_{C_{R+1,k}} u_0 + \lambda k\int_0^T \int_{B_{R+1}} W_n \overline{S}^{p-1}.\end{aligned}$$

Esta última integral está acotada siempre que $2N/(N+2) \le p < 2N/(N+1)$ y u_0 sea acotada. Por otra parte, nótese que, si $v_n < k$ en B_R, entonces $v_n\varphi^p < k$. En otras palabras

$$B_R \cap \{v_n\varphi^p < k\} \supset B_R \cap \{v_n < k\}.$$

Así, usando la *desigualdad de Young* de forma similar al caso $1 < p < 2N/(N+2)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \quad & \textstyle\int_{B_R\cap\{v_n<k\}} v_n^2(x,T) + \int_0^T \int_{B_R\cap\{v_n<k\}} |\nabla v_n|^p + \int_0^T \int_{A_{R,k}} \varphi^p|\nabla v_n|^p \\ & \le \frac{1}{2}\int_{\overline{C}_{R+1,k}} u_0^2\varphi^p + \lambda k C(R) + p\int_0^T \int_{A_{R,k}} (\varphi|\nabla v_n|)^{p-1}(v_n|\nabla\varphi|) \\ & \le \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 + \lambda k C(R) + \int_0^T \int_{A_{R,k}} (|\nabla v_n|\varphi)^p + C_1(p)\int_0^T \int_{A_{R,k}} v_n^p.\end{aligned}$$

Por tanto, se pueden simplificar los términos que involucran $(|\nabla v_n|\varphi)^p$ en $A_{R,k}$ y, como $v_n \le \overline{S}$ en B_{n+1}, se obtiene

$$\frac{1}{2}\int_{B_R\cap\{v_n<k\}} v_n^2(x,T) + \int_0^T \int_{B_R\cap\{v_n<k\}} |\nabla v_n|^p \le \frac{1}{2}\int_{B_{R+1}} u_0^2 + \lambda k C(R) + C_1(p)\int_0^T \int_{A_{R,k}} \overline{S}^p.$$

Aunque $\overline{S} \in L^q_{loc}$ para $1 \le q < s$ en el rango $2N/(N+2) \le p < 2N/(N+1)$, ha de notarse que la última integral es finita, porque se integra sobre $A_{R,k}$, que no contiene al origen. Entonces,

$$\frac{1}{k}\int_0^T \int_{B_R\cap\{v_n<k\}} |\nabla v_n|^p \, dxdt \le M,$$

donde M no depende de n; esta desigualdad permite emplear los lemas 4.3.4 y 4.3.5, obteniendo la existencia de una solución u de (4.1) en Q_R con $\lambda > 0$ y $2N/(N+2) \le p < 2N/(N+1)$ en sentido de distribuciones. Además $u \in L^\infty_{loc}((0,\infty), L^q(I\!R^N))$ y $|\nabla u| \in \mathcal{M}^{p_2}$, donde $\mathcal{M}^{p_2}$ es el espacio de Marcinkiewitz y $p_2 = pq/(q+1)$ con $1 \le q < s = N(2-p)/p$. ∎

Nota 4.4.4 Este resultado es válido para $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. La prueba se obtiene de forma similar mediante el truncamiento de u_0 en cada B_n. ▪

Nota 4.4.5 Mediante métodos análogos se puede hallar una solución de (4.1) en sentido de distribuciones en el exterior de $\{0\} \times (0,T)$ para el rango $2N/(N+1) \leq p < 2$. ▪

4.4.3 Soluciones acotadas de los problemas truncados si $1 < p < 2$

Se puede demostrar la existencia de solución débil acotada u_n en $Q = \Omega \times (0,T)$ para (4.2) para $1 < p < 2$.

Lema 4.4.6 *Sea $1 < p < 2$. Para cada n, existe una solución débil u_n para el problema truncado (4.2). Estas soluciones verifican $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ...$; además*

$$u_n \in L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

para $T > 0$ fijo.

Demostración. Existe una supersolución del problema truncado (4.2), a saber

$$\phi_n(t) = (\lambda n(2-p)(t+T_0))^{1/(2-p)}, \qquad \text{donde } T_0 \geq (\lambda n^{p-1}(2-p))^{-1}.$$

Hay que destacar que esta supersolución es independiente del potencial, sólo depende del nivel de truncamiento. Para los problemas siguientes con $k > 0$ y n fijo ($n \geq 1$)

$$\begin{cases} (v_{n,k})_t - \Delta_p v_{n,k} &= \lambda W_n(x) \tilde{v}_{n,k-1}^{p-1}, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_{n,k}(x,0) &= T_n(u_0(x)), \qquad x \in \Omega, \\ v_{n,k}(x,t) &= 0 \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

con $v_{n,0} = \phi_n$, existe una solución débil $v_{n,k}$ (véanse **[40]** y **[66]**). Como $v_{n,0} = \phi_n \leq v_{n+1,0} = \phi_{n+1}$ y ya que tanto el potencial como el dato inicial en esos problemas están acotados, por el principio de comparación débil y un argumento de recurrencia se obtiene que $v_{n,k} \leq v_{n+1,k}$, $k > 0$, pues de partida

$$\lambda W_n(x) \phi_n^{p-1}(t) \leq \lambda W_{n+1}(x) \phi_{n+1}^{p-1}(t) \quad \text{ en } Q.$$

Como consecuencia, tomando los respectivos límites en cada iteración, se concluye que $u_n \leq u_{n+1}$. Por otra parte, estas soluciones débiles u_n de los problemas truncados (4.2) están acotadas en Q, para $T > 0$ fijo, debido a que la supersolución ϕ_n está acotada para $T > 0$ fijo. ▪

4.5 Extinción en tiempo finito

4.5.1 Resultados de extinción

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$. Si $||\cdot||_q$ denota la norma en el espacio $L^q(\Omega)$, se tienen los siguientes resultados:

Teorema 4.5.1 *Si u es una solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) \in L^2(\Omega), \quad u_0 \geq 0, & \\ u(x,t) &= 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

donde $2N/(N+2) \leq p < 2$ y $0 < \lambda < \lambda_{N,p}$, entonces existe un tiempo finito $T^\star$ dependiente de $N, p, \lambda, |\Omega|$ y $||u_0||_2$ tal que

$$u(\cdot, t) \equiv 0 \qquad \forall t \geq T^\star.$$

Además $0 < T^\star \leq \gamma_1 ||u_0||_2^{2-p} |\Omega|^{\frac{p}{2}+\frac{p}{N}-1}$, donde γ_1 es una constante positiva que depende sólo de N, p, λ.

Demostración. Nótese que $2N/(N+2) \leq p < 2$ implica $s = N(2-p)/p \leq 2$ y $p^* > 2$. La parte a) de la prueba del teorema 4.4.1 muestra la existencia de una solución u a este problema. Si se multiplica la ecuación por u y se integra en Ω, se tiene por *la desigualdad de Hardy*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_2^2 + \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{u^p}{|x|^p} \, dx \leq \lambda \lambda_{N,p}^{-1} \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p \, dx.$$

Entonces, si $\lambda < \lambda_{N,p}$, existe $\gamma = \gamma(N, p, \lambda) > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_2^2 + \gamma \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p \, dx \leq 0.$$

Ahora, si $2N/(N+2) \leq p$, entonces $p^* = Np/(N-p) \geq 2$, y $||u(x,t)||_{p^*} \leq \gamma_{N,p} ||\nabla u(x,t)||_p$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_2^2 + \gamma ||u(x,t)||_{p^*}^p \leq 0.$$

La *desigualdad de Hölder* implica que

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2 \, dx \leq |\Omega|^{(p^*-2)/p^*} \left(\int_\Omega |u(x,t)|^{p^*} \, dx \right)^{2/p^*}.$$

Así

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_2^2 + \gamma_1 |\Omega|^{1-p/2-p/N} ||u(x,t)||_2^p \leq 0,$$

y se obtiene

$$||u(x,T)||_2 \leq ||u_0||_2 \left(1 - \frac{(2-p)\gamma_1 |\Omega|^{1-p/2-p/N} T}{||u_0||_2^{2-p}} \right)_+^{1/(2-p)}.$$

∎

Teorema 4.5.2 *Considérese $\Omega \subset I\!R^N$ un dominio acotado y sea u la solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, & x \in \Omega,\, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x) \in L^2(\Omega) \cap L^s(\Omega), \quad u_0 \geq 0, & \\ u(x,t) &= 0 & x \in \partial\Omega,\, t > 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

obtenida como el límite de la sucesión u_n de soluciones del problema truncado correspondiente (4.2), donde $1 < p < 2N/(N+2)$ ($s = N(2-p)/p > 2$) y $0 < \lambda < \mu_{N,p}$. Entonces existe un tiempo finito $T^\star$ dependiente sólo de N, p, λ y u_0, tal que

$$u(\cdot, t) \equiv 0 \qquad \forall t \geq T^\star.$$

Además

$$0 < T^\star \leq \gamma_2 ||u_0||_s^{2-p}, \qquad 1 < p < \frac{2N}{N+2},$$

donde γ_2 es una constante positiva que depende sólo de N, p, λ.

Demostración. Teniendo en cuenta que $u_n \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ por el lema 4.4.6, u_n^{s-1} es una función *test* admisible. Al multiplicar por u_n^{s-1} la ecuación verificada por u_n, se tiene

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}||u_n(x,t)||_s^s + \mu_{N,p}\lambda_{N,p}^{-1} \int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\, dx = \lambda \int_\Omega W_n(x) u_n^{p+s-2}(x,t)\, dx. \tag{4.6}$$

Como

$$\int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}|^p = (s-1)\frac{\lambda_{N,p}}{\mu_{N,p}} \int_\Omega u_n^{s-2} |\nabla u_n|^p,$$

se puede concluir que $u_n^{(p+s-2)/p} \in W_0^{1,p}(\Omega)$; por tanto, usando la *desigualdad de Hardy* en el segundo miembro de (4.6), se obtiene

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}||u_n(x,t)||_s^s + \mu_{N,p}\lambda_{N,p}^{-1} \int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\, dx \leq \lambda\lambda_{N,p}^{-1} \int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\, dx.$$

Si $\lambda < \mu_{N,p}$, entonces existe $\gamma = \gamma(N,p,\lambda) > 0$, tal que

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}||u_n(x,t)||_s^s + \gamma \int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\, dx \leq 0.$$

Aplicando la *desigualdad de Sobolev*,

$$\int_\Omega u_n^s(x,t)\, dx = \int_\Omega u_n^{p^*(p+s-2)/p}(x,t)\, dx \leq \gamma_{N,p} \left(\int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\, dx \right)^{N/(N-p)},$$

y se obtiene

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}||u_n(x,t)||_s^s + \gamma_2||u_n(x,t)||_s^{p+s-2} \leq 0.$$

Por tanto se concluye que

$$||u_n(x,T)||_s \leq ||u_0||_s \left(1 - \frac{(2-p)\gamma_2 T}{||u_0||_s^{2-p}}\right)_+^{1/(2-p)}.$$

Es decir, existe un tiempo finito de extinción uniforme para cualquier solución del problema truncado correspondiente a (4.5). Como u se obtiene como límite de la sucesión no decreciente u_n (véase lema 4.4.6) entonces existe un tiempo finito de extinción $T^\star$ para u también, a saber,

$$0 < T^\star \leq \gamma_2 ||u_0||_s^{2-p}.$$

■

Nota 4.5.3 En las hipótesis del resultado anterior, se tiene también que la solución u obtenida como límite de la sucesión de soluciones de los problemas truncados pertenece a $L^s(\Omega)$, $s > 2$. ■

Nota 4.5.4 Si $\lambda = 0$, o sea, en el caso homogéneo, resultados similares han sido demostrados en **[40]**, Cap. VIII, Sec. 2 y 3 (véase también **[59]**), los cuales dependen solo de N y p (si $\lambda < 0$ se obtienen resultados similares). Sin embargo, si $\lambda > 0$, entonces λ debe ser suficientemente pequeño para que haya extinción en tiempo finito. ■

Nota 4.5.5 Queda como problema abierto la siguiente cuestión: la existencia de extinción en tiempo finito para alguna solución de (4.5) con $\lambda \in [\mu_{N,p}, \lambda_{N,p}]$ (en dominios acotados y en $I\!R^N$). De alguna forma, esto es equivalente a un resultado de unicidad en la clase de regularidad L^s, ya que es posible hallar soluciones en $I\!R^N$ que no tienen extinción en tiempo finito en este rango de λ y que no están en L^s (véase subsección 4.5.2). ■

Hay que enfatizar que la estimación del tiempo de extinción obtenida en el teorema 4.5.2 no depende de $|\Omega|$ para $\lambda < \mu_{N,p} \leq \lambda_{N,p}$. Este es el resultado principal que se usará en la prueba de la extinción en tiempo finito para el problema de Cauchy con $0 < \lambda < \mu_{N,p}$ y $1 < p < 2N/(N+2)$.

Teorema 4.5.6 *Si $1 < p < 2N/(N+2)$, $0 < \lambda < \mu_{N,p}$ y $u_0 \in L^2(I\!R^N) \cap L^s(I\!R^N)$, $s = N(2-p)/p$, existe un tiempo finito de extinción $T^\star$ (dependiente sólo de N, p, λ y $||u_0||_s$) para u, solución de (4.1) obtenida en el teorema 4.4.1, tal que*

$$u(\cdot,t) \equiv 0 \qquad \forall t \geq T^\star,$$

y

$$0 < T^\star \leq \gamma_2 ||u_0||_s^{2-p},$$

donde γ_2 es una constante positiva dependiente sólo de N, p, λ.

Demostración. En estas hipótesis, se puede usar el teorema 4.4.1 para obtener u, una solución de (4.1) como el límite de la sucesión u_k formada por las soluciones aproximadas de (4.4). Cada u_k tiene un tiempo finito de extinción que no depende del dominio y está uniformemente acotado por el teorema 4.5.2. Por tanto, existe un tiempo finito de extinción para u. ■

Nota 4.5.7 Si se toma un dominio no acotado Ω en lugar de $I\!R^N$, se puede usar una sucesión de dominios anidados con medida finita aproximando Ω para obtener las mismas conclusiones. En particular, hay que notar que las pruebas de las proposiciones 4.5.1 y 4.5.2 son también válidas para un dominio no acotado con medida finita. ▪

4.5.2 Resultados de no extinción

En esta subsección se demostrará que para $\lambda > \lambda_{N,p}$ no existe extinción en tiempo finito para las soluciones de (4.3) en dominios acotados con dato inicial positivo y, como consecuencia para las soluciones del problema de Cauchy. Para terminar esta subsección se demostrará que existe al menos una solución al problema de Cauchy (4.1) con $\mu_{N,p} < \lambda \leq \lambda_{N,p}$ que no tiene extinción en tiempo finito; la existencia de la solución autosemejante S para este rango de λ juega un papel fundamental en la prueba de este resultado.

Teorema 4.5.8 *Sea $\Omega \subset I\!R^N$ un dominio acotado y considérese u, una solución del problema original (4.3) con $\lambda > \lambda_{N,p}$ y $1 < p < 2$. Entonces, no existe tiempo de extinción finito para u.*

Demostración. En la sección 8 de **[49]** se demuestra, siguiendo las ideas en **[44]**, que, si c es suficientemente pequeño, $w(x,t) = ct^{1/(2-p)}\phi_1(x)$ es una subsolución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ u(x,t) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

para $\lambda > \lambda_{N,p}$, donde ϕ_1 verifica

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_1 &= \lambda_1(n) W_n(x) \phi_1^{p-1}, \qquad x \in \Omega, \\ \phi_1(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo $\lambda_1(n)$ el primer autovalor del problema anterior, para n suficientemente grande. Entonces w es también una subsolución del problema (4.3). Como w no puede tener extinción en tiempo finito, no existe extinción en tiempo finito para cualquier solución de (4.3) (obsérvese que $w(x,0) = 0$). ∎

Nota 4.5.9 Como consecuencia del teorema 4.5.8, se concluye que no existe extinción en tiempo finito para cualquier solución del problema de Cauchy correspondiente si $\lambda > \lambda_{N,p}$ y $u_0(x) > 0$ en una bola de $I\!R^N$. ▪

Además, si se toma $\lambda > \mu_{N,p}$, se sabe que existe una solución autosemejante S del problema de Cauchy con dato inicial cero en el rango $1 < p < 2N/(N+1)$ (véase sección 4.2). De esta manera se obtiene para el mismo problema una solución con extinción en tiempo finito (la solución trivial) y una solución que no tiene extinción en tiempo finito (S; obsérvese que $S \notin L^s$). Se demostrará que, en este rango, existe al menos una solución del problema de Cauchy con dato inicial positivo que no tiene extinción en tiempo finito.

Teorema 4.5.10 *Si $1 < p < 2N/(N+1)$, $\mu_{N,p} < \lambda$, $u_0 \geq \delta > 0$ en una bola B y existe un desplazamiento en el tiempo de S, $\overline{S}$, tal que $u_0 \leq \overline{S}$, entonces existe una solución del problema de Cauchy (4.1) que no se extingue en tiempo finito.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que u_0 está acotada (si no, se puede tomar $T_k(u_0)$). Considérese la siguiente iteración para $k > 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} v_{kt} - \Delta_p v_k &=& \lambda \dfrac{\tilde{v}_{k-1}^{p-1}}{|x|^p}, & x \in B_k,\ t > 0, \\ v_k(x,0) &=& u_0(x), & x \in B_k, \\ v_k(x,t) &=& S(x,t), & x \in \partial B_k,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{4.7}$$

donde $v_0 = \overline{S}$, $\tilde{v}_k = v_k$ en B_k, $\tilde{v}_k = S$ en $I\!\!R^N \setminus B_k$, B_k siendo la bola de radio k centrada en el origen en $I\!\!R^N$. Para $T > 0$ fijo, se estudian separadamente los casos $1 < p < 2N/(N+2)$ y $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$:

a) Supóngase $1 < p < 2N/(N+2)$; en este rango se sabe que $\overline{S} \in L^p(0,T; W^{1,p}(B_1))$ (véase sección 4.2). Además, mediante un cálculo similar al desarrollado en la prueba del lema 4.3.2 a), se tiene

$$\frac{\overline{S}^{p-1}}{|x|^p} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(B_1)).$$

Por tanto, como $\overline{S}_t \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(B_1))$ también, y $v_1 = S$ en ∂B_1, se pueden aplicar los resultados de **[66]**, obteniendo la existencia de una solución única al problema correspondiente a $k = 1$, a saber,

$$v_1 \in \mathcal{C}(0,T; L^2(B_1)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(B_1)).$$

Así, $\tilde{v}_1 \in L^p(0,T; W^{1,p}(B_2))$ y $|x|^{-p}\tilde{v}_1^{p-1} \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(B_2))$, que a su vez implica la existencia de v_2, una solución del problema correspondiente a $k = 2$, etc. Además,

$$\begin{array}{rcll} v_{1t} - \Delta_p v_1 = \lambda \dfrac{\overline{S}^{p-1}}{|x|^p} &=& \overline{S}_t - \Delta_p \overline{S}, & x \in B_1,\ t > 0, \\ v_1(x,0) = u_0(x) &\leq& \overline{S}(x,0), & x \in B_1, \\ v_1(x,t) = S(x,t) &\leq& \overline{S}(x,t), & x \in \partial B_1,\ t > 0, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcll} v_{1t} - \Delta_p v_1 = \lambda \dfrac{\overline{S}^{p-1}}{|x|^p} &\geq& \lambda \dfrac{S^{p-1}}{|x|^p} = S_t - \Delta_p S, & x \in B_1,\ t > 0, \\ v_1(x,0) = u_0(x) &\geq& 0 = S(x,0), & x \in B_1, \\ v_1(x,t) &=& S(x,t), & x \in \partial B_1,\ t > 0, \end{array}$$

por lo que se concluye que

$$S \leq v_1 \leq v_0 = \overline{S} \quad \text{ en } B_1.$$

Ahora, si se supone $S \leq v_{k-1} \leq \overline{S}$ en B_{k-1}, de forma similar, v_k verifica $S \leq v_k \leq \overline{S}$ en B_k. Si se toma ahora una función corte φ y se sigue la prueba del teorema 4.4.3 se puede pasar al límite y obtener una solución v del problema de Cauchy que no se extingue en tiempo finito, ya que las soluciones aproximadas v_k implican que $v \geq S$.

b) Si $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$, entonces $\overline{S} \in L^q_{loc}(I\!R^N)$ para $1 \leq q < s$ (véase la sección 4.2). Supóngase $k = 1$ y tómense los problemas aproximados, para $n > 0$,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} w_{nt} - \Delta_p w_n & = & \lambda f_n = \lambda T_n(|x|^{-p}\overline{S}^{p-1}), & x \in B_1,\, t > 0, \\ w_n(x,0) & = & u_0(x), & x \in B_1, \\ w_n(x,t) & = & T_n(S(x,t)), & x \in \partial B_1,\, t > 0. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Como el segundo miembro en la ecuación anterior y el dato de borde son ambos acotados, se pueden aplicar los resultados en **[66]** para obtener la existencia de una única solución $w_n \in L^p(0,T;W^{1,p}(B_1))$. Además, se puede probar que $w_n \leq \overline{S}$, ya que $(w_n - \overline{S})_+ = 0$ en la frontera parabólica del cilindro $B_1 \times (0,T)$,

$$(w_n - \overline{S})_t - (\Delta_p w_n - \Delta_p \overline{S}) = \lambda(T_n(|x|^{-p}\overline{S}^{p-1}) - |x|^{-p}\overline{S}^{p-1}) \leq 0,$$

y se puede tomar $(w_n - \overline{S})_+$ como función test para integrar la desigualdad anterior, lo que da $w_n \leq \overline{S}$. De la misma manera se puede demostrar que

$$w_1 \leq w_2 \leq ... \leq w_n \leq ... \leq \overline{S}.$$

Es decir, se tiene una sucesión monótona en $L^p(0,T;W^{1,p}(B_1))$ uniformemente acotada por $\overline{S}$. Si se define

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} w_n \leq \overline{S},$$

se puede seguir como en la prueba del teorema 4.4.3 (multiplicando por $T_l(w_n\varphi^p)$ la ecuación satisfecha por w_n, donde φ es una función corte en una bola $B \subset B_1$ que no depende de t) para demostrar

$$\frac{1}{l}\int_0^T \int_{B\cap\{w_n<l\}} |\nabla w_n|^p \, dxdt \leq M,$$

donde M no depende de l.

Por tanto, existe $v_1 \leq \overline{S}$ verificando la ecuación (4.7) correspondiente a $k = 1$ en $\mathcal{D}'(B \times (0,T))$, para cualquier bola $B \subset B_1$ y $v_1(x,0) = u_0(x)$ en B_1, $v_1(x,t) = S(x,t)$ en ∂B_1, ya que v_1 es el límite puntual de las soluciones aproximadas w_n. Repitiendo este procedimiento para cada $k > 1$, se obtiene una solución v_k de la ecuación (4.7) correspondiente a k en $\mathcal{D}'(B_R \times (0,T))$, donde B_R es cualquier bola de $I\!R^N$, para k suficientemente grande.

De esta forma, se ha hallado para $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$ una sucesión de funciones uniformemente acotada superiormente por $\overline{S}$ y, por recurrencia, acotada inferiormente por $S \leq v_k$ en B_k. Así, usando los argumentos empleados en la prueba del teorema 4.4.3, se puede hallar una solución v del problema de Cauchy (4.1) como el límite de v_k si $k \to \infty$, donde $\mu_{N,p} < \lambda$ y $2N/(N+2) \leq p < 2N/(N+1)$, sin extinción en tiempo finito, ya que la cota inferior de las soluciones aproximadas v_k implican que $v \geq S$.

■

4.6 Resultados adicionales

Sea $\Omega \subset I\!R^N$ un dominio acotado y tómese $1 < p < 2$, $N > p$. Considérese el problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u &=& \lambda V(x) u^{p-1}, & x \in \Omega \subset I\!R^N,\ t > 0,\ \lambda > 0,\\ u(x,0) &=& u_0(x) \in L^2(\Omega), & u_0(x) \geq 0,\\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{4.9}$$

con $V \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, y $V(x) \geq 0$. Se puede probar la existencia de una solución de (4.9) para λ suficientemente pequeño y q suficientemente grande, mediante las técnicas usadas en la sección 4.4. Este es un caso particular del problema general siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u &=& \lambda V(x) f(u), & x \in \Omega \subset I\!R^N,\ t > 0,\\ u(x,0) &=& u_0(x) \in L^2(\Omega), & u_0(x) \geq 0,\\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{array}\right. \tag{4.10}$$

donde se supone que $f(\sigma)$ es una función continua no decreciente para $\sigma \geq 0$, $f(0) = 0$, y $f(\sigma) > 0$ para $\sigma \in (0, M]$. En algunos casos, se puede demostrar la existencia de una solución de (4.10) (las pruebas de los siguientes resultados solo contienen las estimaciones principales para pasar al límite en la forma indicada en la sección 4.4).

4.6.1 Existencia global con dato inicial no acotado

Teorema 4.6.1 *A) Si existe algún $\eta \in [0,2]$ tal que $V \in L^{2/(2-\eta)}(\Omega)$ y*

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma^{\eta-1}} \to C \geq 0 \qquad \text{si } \sigma \to \infty,$$

entonces existe una solución global de (4.10) tal que

$$u \in L^\infty_{loc}([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap L^p_{loc}((0,\infty); W_0^{1,p}(\Omega)).$$

B) Si $1 < p < 2N/(N+2)$, $s = N(2-p)/p > 2$, $V \in L^{s/(2-\eta)}(\Omega)$ para algún $\eta \in [0,2]$ y

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma^{\eta-1}} \to C \geq 0 \qquad \text{si } \sigma \to \infty,$$

entonces existe una solución global de (4.10) verificando

$$u \in L^\infty_{loc}([0,\infty); L^s(\Omega)), \qquad u^{(p+s-2)/p} \in L^p_{loc}((0,\infty); W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Demostración. *A)* Sea u una solución del problema (4.10). Para $T > 0$, se tiene, usando las *desigualdades de Hölder* y *Young* e integrando en $[0,T]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,T)\,dx &+ \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p\,dxdt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)\,dx + C_q T \int_\Omega V^q(x)\,dx + \int_0^T \int_\Omega (f(u(x,t))u(x,t))^{q'}\,dxdt. \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe algún $\eta \in [0,2]$ tal que $V \in L^q(\Omega)$, con $q = 2/(2-\eta)$; esto implica que

$$\frac{(f(\sigma)\sigma)^{q'}}{\sigma^2} = \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^{(q-2)/q}}\right)^{q'} = \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^{\eta-1}}\right)^{q'} \to C \quad \text{si } \sigma \to \infty.$$

Por tanto $(f(u)u)^{q'} \le Cu^2$; en otras palabras,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,T)\,dx \quad &+ \quad \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p\,dxdt \\ &\le \quad \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2(x)\,dx + C_qT\int_\Omega V^q(x)\,dx + C\int_0^T\int_\Omega u^2(x,t)\,dxdt.\end{aligned}$$

La *desigualdad de Gronwall* implica que

$$\int_\Omega u^2(x,T)dx \le e^{CT}\int_\Omega (u_0^2(x) + C_qTV^q(x))\,dx.$$

O sea, $u(\cdot,T) \in L^2(\Omega)$, y $u \in L^\infty_{loc}([0,\infty);L^2(\Omega))$. Además, se tiene también

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p\,dxdt < \infty,$$

por lo que $u \in L^p_{loc}([0,\infty) : W_0^{1,p}(\Omega))$.

B) Al multiplicar la ecuación que verifican las soluciones u_n de los problemas truncados correspondientes a (4.10) (que están acotadas por el lema 4.4.6) por u_n^{s-1} e integrando en $[0,T]$ para $T > 0$ se tiene, usando las *desigualdades de Hölder* y *Young*,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_\Omega u_n^s(x,T)\,dx \quad &+ \quad \frac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\,dxdt \\ &\le \quad \frac{1}{s}\int_\Omega u_0^s(x)\,dx + C_qT\int_\Omega V^q(x)\,dx + \int_0^T\int_\Omega (f(u(x,t))u_n^{s-1}(x,t))^{q'}\,dxdt.\end{aligned}$$

Por hipótesis, existe algún $\eta \in [0,2]$ tal que $q = s/(2-\eta)$; esto implica que

$$\frac{(f(\sigma)\sigma^{s-1})^{q'}}{\sigma^s} = \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^{(q-s)/q}}\right)^{q'} = \left(\frac{f(\sigma)}{\sigma^{\eta-1}}\right)^{q'} \to C \quad \text{si } \sigma \to \infty.$$

Por tanto $(f(u_n)u_n^{s-1})^{q'} \le Cu_n^s$; es decir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_\Omega u_n^s(x,T)\,dx \quad &+ \quad \frac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\,dxdt \\ &\le \quad \frac{1}{s}\int_\Omega u_0^s(x)\,dx + C_qT\int_\Omega V^q(x)\,dx + C\int_0^T\int_\Omega u_n^s(x,t)\,dxdt.\end{aligned}$$

La *desigualdad de Gronwall* implica que

$$\int_\Omega u_n^s(x,T)dx \le e^{CT}\int_\Omega (u_0^s(x) + C_q T V^q(x))\,dx.$$

Pasando al límite en la sucesión no decreciente u_n, se tiene $u(x,T)\in L^s(\Omega)$, y así $u\in L^\infty_{loc}([0,\infty);L^s(\Omega))$. Por otra parte, también se tiene $u^{(p+s-2)/p}\in L^p_{loc}((0,\infty);W_0^{1,p}(\Omega))$. ■

Nota 4.6.2 Si $1<p<2N/(N+2)$, entonces existe η tal que $p<\eta<2$ y $2/(2-\eta)<N/p$. Así pues, el teorema 4.6.1 implica la existencia de una solución global de (4.10) para V supercrítico (véase la introducción de esta Memoria) y η superdifusivo. ▪

4.6.2 Algunas notas sobre unicidad

Lema 4.6.3 *Considérese el problema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t-\Delta_p u &=& \lambda f(u), & x\in\Omega\subset I\!R^N,\ t>0,\\ u(x,0) &=& 0, & \\ u(x,t) &=& 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0. \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Si existe algún η tal que $1<p<\eta\le 2$ y

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma^{\eta-1}}\to C \qquad \textit{para } \sigma\to 0,$$

entonces la solución única a este problema es $u\equiv 0$.

Demostración. El caso $2N/(N+2)\le p<2$ ha sido esencialmente estudiado en **[49]**, lema 8.6. Si $1<p<2N/(N+2)$, se puede seguir un argumento similar multiplicando la ecuación que verifican las soluciones u_n de los problemas truncados correspondientes a (4.11) por u_n^{s-1}, que en virtud de lo estudiado en la subsección 4.4.3 son acotadas. Entonces

$$\frac{1}{s}\int_\Omega u_n^s(x,T)\,dx + \frac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega f(u_n(x,t))u_n^{s-1}(x,t)\,dxdt.$$

Aplicando la *desigualdad de Sobolev*, se tiene

$$\frac{1}{s}\int_\Omega u_n^s(x,T)\,dx + C_{N,p}\int_0^T\left(\int_\Omega u_n^s(x,t)\,dx\right)^{(N-p)/N} dt \le \int_0^T\int_\Omega f(u_n(x,t))u_n^{s-1}(x,t)\,dxdt.$$

Haciendo ahora $y_n(t)\equiv (\int_\Omega u_n^s(x,t)\,dx)^{1/s}$, para $T>0$ suficientemente pequeño, se obtiene

$$0\le y_n^s(T)\le \int_0^T (\lambda C_{|\Omega|}y_n^{\eta+s-2}(t) - C_{N,p}y_n^{p+s-2}(t))\,dt.$$

Como $\eta > p$, esto implica que $y_n(T) \equiv 0$ para cada $T > 0$, es decir, $u_n \equiv 0$, por lo que el límite verifica $u \equiv 0$. ■

Con respecto a la no unicidad, supóngase que f es cóncava en $[0, M]$ con

$$\int_0^M \frac{d\sigma}{f^{-1}(\sigma)} < \infty.$$

Se puede comprobar que, en estas hipótesis, $h(\sigma) = \sigma/f(\sigma)$ es una función creciente y $h(\sigma) \to 0$ si $\sigma \to 0$. Además, si $\mu = \mu(t)$ viene dada por

$$\int_0^\mu \frac{d\sigma}{f(\sigma)} = t \qquad t \geq 0,$$

entonces μ está bien definida, es continua y positiva en $[0, t_0]$, donde

$$t_0 = \int_0^M \frac{d\sigma}{f(\sigma)}$$

y μ resuelve

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu}{dt} = f(\mu), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \mu(0) = 0. \end{cases}$$

Tómese λ_1 el primer autovalor de $-\Delta_p$ en el dominio acotado Ω con dato cero en el borde, con la correspondiente autofunción normalizada $\phi_1 \leq 1$ (véase **[44]**). Entonces se puede probar el siguiente lema:

Lema 4.6.4 *Considérese el problema (4.10) donde* $1 < p < 2$, $V \equiv 1$, $u_0 \equiv 0$. *Si* f *es cóncava en* $[0, M]$ *con*

$$\int_0^M \frac{d\sigma}{f^{-1}(\sigma)} < \infty$$

y

$$\frac{\sigma^{p-1}}{f(\sigma)} = \frac{h(\sigma)}{\sigma^{2-p}} \to C \quad \text{si } \sigma \to 0,$$

donde $C \in [0, \lambda_1^{-1})$, *entonces existe* $\tau > 0$ *tal que la solución de (4.10) no es única en* $0 \leq t \leq \tau$, $0 \leq u \leq M$.

Nota 4.6.5 Por ejemplo, se pueden aplicar los lemas 4.6.3 y 4.6.4 a los siguientes casos:

(a) Si $f(\sigma) = \lambda\sigma^{\eta-1}$, donde $p < \eta \leq 2$, se tiene unicidad.

(b) Si $f(\sigma) = \lambda\sigma^{\eta-1}$, donde $1 < \eta < p$ o $f(\sigma) = \sigma^{p-1}$ con $\lambda > \lambda_1$, entonces se tiene no unicidad.

■

Hay que notar que la no unicidad para dato inicial cero implica la no existencia de tiempo finito de extinción para las soluciones de los problemas correspondientes con dato inicial no negativo (véase próxima subsección).

4.6.3 Extinción en tiempo finito

Si u es una solución de (4.9), usando la *desigualdad de Hölder* y siguiendo la prueba del teorema 4.5.1 se tiene

$$||u(x,T)||_2 \leq ||u_0||_2 \left(1 - \frac{(2-p)\gamma|\Omega|^{1-p/2-p/N}T}{||u_0||_2^{2-p}}\right)_+^{1/(2-p)}$$

para $2N/(N+2) \leq p < 2$, $q > N/p$, $\lambda < (C||V||_q)^{-1}$ y $\gamma = \gamma(N,p,\Omega,\lambda) > 0$. Por ejemplo, en el caso particular $V(x) = |x|^{-\beta}$, se obtiene el resultado para $\beta < p$.

Sean $\mu_{N,p}$, s definidas en la sección 4.2. Si $1 < p < 2N/(N+2)$ $(s > 2)$, entonces se puede multiplicar la ecuación del problema truncado correspondiente a (4.9) (véase la sección 4.3) por u_n^{s-1}, donde u_n es la solución débil del problema truncado. Entonces se tiene, usando de nuevo la *desigualdad de Hölder* y siguiendo la prueba del teorema 4.5.2, ya que la supersolución ϕ_n introducida en la subsección 4.4.3 no depende del potencial V,

$$||u_n(x,T)||_s \leq ||u_0||_s \left(1 - \frac{(2-p)\gamma T}{||u_0||_s^{2-p}}\right)_+^{1/(2-p)},$$

donde $\lambda < C_{N,p}||V||_q^{-1}$ (de nuevo, cuanto menor es $||V||_q$, mayor es el rango para λ), y γ depende de N, p, λ y $||V||_q$ con $q = N/p$. Por tanto, se tiene el resultado para la solución u de (4.9) obtenida como límite de la sucesión no decreciente u_n.

De esta manera se puede ver que existe un tiempo de extinción finito para las soluciones de (4.9) si λ es lo suficientemente pequeño.

Considérese ahora ϕ_1, una solución del problema elíptico de autovalores

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_p \phi_1 & = & \lambda_1 V(x)\phi_1^{p-1}, & x \in \Omega \subset I\!R^N, \\ w(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.12}$$

donde $V \in L^q(\Omega)$, con $q > N/p$, y λ_1 es el primer autovalor para $-\Delta_p$ con peso V en Ω y dato cero en el borde, esto es,

$$\lambda_1 = \inf_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^p}{\int_\Omega V(x)\phi^p}.$$

Entonces, multiplicando la ecuación en (4.9) por u, se tiene, para $\lambda < \lambda_1$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(x,t)||_2^2 + \gamma \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^p \, dx \leq 0$$

con $\gamma > 0$, de modo que se tiene de nuevo la estimación anterior para el tiempo finito de extinción de u si $2N/(N+2) \leq p < 2$ (véase prueba del teorema 4.5.1).

Si se multiplica la ecuación satisfecha por la solución débil u_n del problema truncado correspondiente a (4.9) por u_n^{s-1}, y $\lambda << \lambda_1$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\frac{1}{s}\frac{d}{dt}||u_n(x,t)||_s^s + \gamma \int_\Omega |\nabla u_n^{(p+s-2)/p}(x,t)|^p \, dx \leq 0,$$

y se obtiene de nuevo extinción en tiempo finito para las soluciones de (4.9) obtenidas como límite de la sucesión u_n, $1 < p < 2N/(N+2)$, independientemente del dominio (véase prueba del teorema 4.5.2).

En particular, si se tiene $V \in L^q(I\!R^N)$, $q > N/p$, y $\lambda < \lambda_1 \mu_{N,p}/\lambda_{N,p}$, entonces existe un tiempo de extinción finito para las soluciones del problema de Cauchy correspondiente que se obtienen como límite conforme $k \to \infty$ de las soluciones u_k de los problemas de Dirichlet (4.9) en $\Omega = B_k$, la bola de radio k centrada en el origen de $I\!R^N$.

Por otra parte, si $\lambda > \lambda_1$, entonces cualquier solución de (4.9) no puede tener extinción en tiempo finito, ya que $w(x,t) = ct^{1/(2-p)}\phi_1(x)$ es una subsolución positiva de (4.9), para c suficientemente pequeño (véase la prueba del teorema 4.5.8). Así existe un hueco para los valores de λ (el intervalo $[\lambda_1 \mu_{N,p}/\lambda_{N,p}, \lambda_1])$ en el que la cuestión de la existencia de un tiempo finito de extinción permanece abierta.

Por tanto se pueden resumir los resultados obtenidos en el siguiente teorema:

Teorema 4.6.6 *Si $1 < p < 2$ y u es una solución de (4.9) entonces existe un tiempo finito $T^\star$ dependiente solo de N, p, λ, u_0 y $||V||_q$ tal que*

$$u(\cdot,t) \equiv 0 \qquad \forall t \geq T^\star.$$

Además

$$\begin{array}{llll} 0 < T^\star \leq \gamma_1 ||u_0||_2^{2-p} |\Omega|^{p/2+p/N-1}, & & q > N/p, & \lambda < \lambda_1, \quad 2N/(N+2) \leq p < 2, \\ 0 < T^\star \leq \gamma_2 ||u_0||_s^{2-p}, & 1 < p < 2N/(N+2), & q > N/p, & \lambda < \lambda_1 \dfrac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}}, \\ 0 < T^\star \leq \gamma_2 ||u_0||_s^{2-p}, & 1 < p < 2N/(N+2), & q = N/p, & \lambda < \gamma_{N,p}^{-(N-p)/N} ||V||_q^{-1} \dfrac{\mu_{N,p}}{\lambda_{N,p}}, \end{array}$$

donde γ_1 y γ_2 son constantes positivas dependientes sólo de N, p, λ y $||V||_q$.

Nótese que $|x|^{-p} \in \cap L^q_{loc}(I\!R^N)$ para cada $q < N/p$.

Nota 4.6.7 Un resultado similar se obtiene para una solución de (4.10) donde la no linealidad general $f(\sigma)$ verifica $f(\sigma) \leq C\sigma^{p-1}$, para $1 < p < 2$, es decir, existe un tiempo finito de extinción si

1. $\lambda < \lambda_1/C$ para $2N/(N+2) \leq p \leq 2$.

2. $\lambda < \lambda_1 \mu_{N,p}/(C\lambda_{N,p})$ para $1 < p \leq 2N/(N+2)$.

■

4.7 Apéndice: enunciado del Teorema de Boccardo-Murat

Lo formulamos solo para el caso del p-Laplaciano. Sea $Q = \Omega \times [0, T)$.

Teorema 4.7.1 *Sea $\{u_n\}$ sucesión de soluciones en el sentido de $\mathcal{D}'(Q)$ de las ecuaciones*

$$u_{nt} - \Delta_p u_n = f_n + g_n$$

Supongamos que:

1. $u_n \rightharpoonup u$ *débilmente en* $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$.

2. $f_n \to f$ *fuertemente en* $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, $1/p+1/p'=1$.

3. $g_n \in L^1(Q)$, $g \in L^1(Q)$ *y* $g_n \rightharpoonup g$ *débilmente en* $L^1(Q)$.

Entonces para $k>0$ *fijo*

$$\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u) \text{ fuertemente en } (L^p_{loc}(Q))^N,$$

donde T_k *es el operador de truncamiento.*

Bibliografía y referencias

[1] Adimurthi, S.L. Yadava, *An elementary proof of the uniqueness of positive radial solutions of a quasilinear Dirichlet problem,* Arch. Ration. Mech. Anal. 127 (1994) 219-229.

[2] J. A. Aguilar Crespo, I. Peral Alonso, *An a priori estimate for the N-Laplacian,* C.R. Acad. Sci. Paris t. 319, Serie I (1994) 161-166.

[3] J. A. Aguilar Crespo, I. Peral Alonso, *On an elliptic equation with exponential growth,* Rend. Semi. Mat. Univ. Padova Vol. 96 (1996) 143-175.

[4] J. A. Aguilar Crespo, I. Peral Alonso, *Blow-up behavior for solutions of $-\Delta_N u = V(x)e^u$ in bounded domains in $\mathbb{R}^N$,* Nonlinear Analysis T.M.A. Vol. 29 (4)(1997) 365-384.

[5] J. A. Aguilar Crespo, I. Peral Alonso, *Positive radial solutions of quasilinear equations involving supercritical growth,* aparecerá en Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA).

[6] J. A. Aguilar Crespo, I. Peral Alonso, *Global behaviour of the Cauchy Problem for some critical nonlinear parabolic equations,* Prepublicación 1998.

[7] S. Alama, G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities,* Calc. Var. 1 (1993) 439-475.

[8] A. Ambrosetti, *Critical Points and Nonlinear Variational Problems,* Bulletin de la Soc. Math. de France, Tome 120 No. 2 (1992) 1-139.

[9] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems,* J. Funct. Anal. 122 No. 2 (1994) 519-543.

[10] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for semilinear and quasilinear elliptic problems,* J. Funct. Anal. Vol. 137 (1996) 219-242.

[11] A. Ambrosetti, J. García Azorero, I. Peral Alonso, *Quasilinear equations with a multiple bifurcation,* Diff. and Int. Equat. Vol. 10 No. 1 (1997) 37-50.

[12] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications,* J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.

[13] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids,* C.R. Acad. Sci. Paris t. 305, Série I (1987) 725-728.

[14] D. Arcoya, J.L. Gámez, L. Orsina, I. Peral, *Local existence results for sub-super-critical elliptic problems,* Prepublicación 1997.

[15] F. Andreu, J.M. Mazón, S. Segura de León, J. Toledo, *Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions,* Adv. Math. Sci. Appl. 7 No. 1 (1997) 183-213.

[16] C. Bandle, *Existence theorems. Qualitative results and a priori bounds for a class of nonlinear Dirichlet problems,* Arch. Ration. Mech. Anal. 49 (1973) 241-269.

[17] P. Baras, J. Goldstein, *The heat equation with a singular potential,* Amer. Math. Soc. Transl. Vol. 294 (1984) 121-139.

[18] G. Barles, *Remarks on the uniqueness results of the first eigenvalue of the p-laplacian,* Ann. Fac. Sci. Toulousse Serie 5 No. 1 (1988) 65-75.

[19] G.R. Belitskii, *Functional equations and conjugacy of local diffeomorphisms of a finite smoothness class,* Funct. Anal. Appl. 7 (1973) 268-277.

[20] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M.Pierre, J.L. Vázquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie IV Vol. XXII Fas. 2 (1995) 241-273.

[21] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolzetta, L. Nirenberg, *Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems,* NoDEA 2 (1995) 553-572.

[22] M. F. Bidaut-Veron, *Local and global behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations of Emden-Fowler type,* Arch. Ration. Mech. Anal. 107 (1989) 293-324.

[23] L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral, *A Dirichlet problem involving critical exponent,* Nonlinear Analysis T.M.A. Vol. 24 (11)(1995) 1639-1648.

[24] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures,* Comm. Partial Differ. Equat. Vol. 17 No. 3,4 (1992) 641-655.

[25] L. Boccardo, F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations,* Nonlinear Analysis T.M.A. Vol. 19 No. 6 (1992) 581-597.

[26] L. Boccardo, I. Peral, J.L. Vázquez, *The N-Laplacian elliptic equation: variational versus entropy solutions,* J. Math. Anal. Appl. 201 (1996) 671-688.

[27] H. Brézis, "Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications" Ed. Masson, 1983.

[28] H. Brézis, T. Cazenave, Y. Martel, A. Ramiandrisoa, *Blowup for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited,* Advances in Differential Equations 1 No. 1 (1996) 73-90.

[29] H. Brézis, Y.Y. Li, I. Shafrir, *A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities,* J. Funct. Anal. 115 No. 2 (1993) 344-358.

[30] H. Brézis, F. Merle, *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimensions,* Comm. Partial Differ. Equat. 16 No. 8 & 9 (1992) 1223-1253.

[31] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[32] C. Budd, *Applications of Shilnikov's theory to semilinear elliptic equations,* SIAM J. Math. Anal. 20 No. 5 (1989) 1069-1080.

[33] X. Cabre, P. Majer, *Truncation of nonlinearities in some supercritical elliptic problems,* C.R. Acad. Sci. Paris t. 332, No. 12 (1996) 1157-1162.

[34] S. Chandrasekar, "An introduction to the study of stellar structure" Ed. Dover Publ. Inc. (1985).

[35] S.Y.A. Chang, P.C. Yang, *Prescribing Gaussian curvature on* S^2*,* Acta Math. 159 (1987) 215-259.

[36] W. Chen, C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations,* Duke Math. Journal 63 No.3 (1991) 615-622.

[37] K.S Cheng, T.K. Luo, *On the classification of radial solutions for* $\Delta u + K(|x|)e^{2u} = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$*,* J. Differ. Equat. 110 (1994) 254-275.

[38] M. Del Pino, R. Manasevich, *Global Bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian,* J. Differ. Equat. 92 (1991) 226-251.

[39] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Analysis T.M.A. 7 No. 8 (1983) 827-850.

[40] E. Di Benedetto, "Degenerate Parabolic Equations" Springer-Verlag, 1993.

[41] B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin, *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in* $\mathbb{R}^N$*,* Advances in Mathematics 118 No. 2 (1996) 177-243.

[42] D.A. Frank-Kamenetskii, "Diffusion and heat transfer in chemical kinetics" Ed. Plenum Press, 1969.

[43] A. Friedman, "Variational Principles and Free-Boundary Problems" R. E. Krieger Publishing Co. 1988.

[44] H. Fujita, *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations,* Proc. Symb. Pure Math. Vol 18 Part I Amer. Math. Soc. (1968) 138-161.

[45] H. Fujita, *On the nonlinear equations* $\Delta u + e^u = 0$ *and* $v_t = \Delta u + e^u$*,* Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) 132-135.

[46] T. Gallouët, F. Mignot, J.P. Puel, *Quelques résultats sur le problème* $-\Delta u = \exp u$*,* C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988) 289-292.

[47] J. García Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term,* Transactions of the Amer. Math. Soc. Vol. 323 No. 2 (1991), 877-895.

[48] J. García Azorero, I. Peral Alonso, *On an Emdem-Fowler type equation,* Nonlinear Analysis T.M.A. 18 No. 11 (1992) 1085–1097.

[49] J. García Azorero, I. Peral Alonso, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems,* aparecerá en J. Differ. Equat. 143 (1998).

[50] J. García Azorero, I. Peral Alonso, J.P. Puel, *Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term,* Nonlinear Analysis T.M.A. 22 (1994) 1-18.

[51] I.M. Gelfand, *Some problems in the theory of quasilinear equations,* Amer. Math. Soc. Transl. (Ser.2) 29 (1963) 295-381.

[52] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order" Springer, New York (1983).

[53] E. Giusti, "Minimal surfaces and functions of bounded variation" Birkhäuser (1984).

[54] M. Guedda, L. Veron, *Quasilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents,* Nonlinear Analysis T.M.A. Vol. 13 No. 8 (1989), 879-902.

[55] J. Hale, "Ordinary Differential Equations" Robert E. Krieger Publishing Co., Malabar, Florida (1980).

[56] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, "Inequalities" Cambridge University Press, 1934.

[57] P. Hartman, *On local homeomorphisms of Euclidean spaces,* Bol. Soc. Mat. Mexicana 5 (1960) 220-241.

[58] P. Hartman, "Ordinary Differential Equations" John Wiley, New York (1964).

[59] M.A. Herrero, J.L. Vázquez, *Asymptotic behaviour of the solutions of a strongly nonlinear parabolic problem,* Ann. Fac. des Sci. Toulouse Vol. III (1981) 113-127.

[60] D.D. Joseph, T.S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources,* Arch. Ration. Mech. Anal. 49 (1973) 241-269.

[61] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Curvature functions for compact* 2*-manifolds,* Annals of Mathematics 99 (1974) 14-47.

[62] S. Kichenassamy, L. Veron, *Singular solutions of the p-Laplace equation,* Math. Ann. 275 (1986) 599-615.

[63] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Elliptic equations" Academic Press, 1968.

[64] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type" Translations of Mathemathics Monographs, A.M.S. 1968.

[65] P. Lindqvist, *On the equation* $\Delta_p u+\lambda|u|^{p-2}u = 0$*,* Proc. Amer. Math. Soc. 109-1 (1990) 157-164.

[66] J. L. Lions, "Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires" Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[67] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1,* Rev. Matemática Iberoamericana Vol. 1 No. 1 (1985) 145-201.

[68] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2,* Rev. Matemática Iberoamericana Vol. 1 No. 2 (1985) 45-121.

[69] F. Merle, L.A. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth,* Proc. of the Royal Soc. Edinburgh Vol. 118 A (1991) 49-62.

[70] F. Mignot, J.P. Puel, *Sur une classe de probleme non lineaire avec non linearite positive, croissante, convexe,* Comm. Partial Differ. Equat. 5 (8) (1980) 791-836.

[71] F. Mignot, J.P. Puel, *Solution radiale singulière de* $-\Delta u = \lambda e^u$*,* C. R. Acad. Sci. Paris, 307 Serie I (1988) 379-382.

[72] G.D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and rigidity of hyperbolic space forms,* Inst. des Hautes Etudes Scient. Publ. Math. 34 (1968) 53-104.

[73] W.M. Ni, J. Serrin, *Existence and non-existence theorems for ground states of quasilinear PDEs,* Acca. Naz. Lincei, Convegni del Lincei 77 (1986) 231-257.

[74] I. Peral Alonso, *Some Results on Quasilinear Elliptic Equations: Growth versus Shape,* Proceedings of the Second International School in Nonlinear Analysis and Differential Equations, Editor A. Ambrosetti, Trieste, Italy, 1998 (Aparecerá).

[75] I. Peral, J.L. Vázquez, *On the Stability or Instability of the Singular Solution of the Semilinear Heat Equation with Exponential Term,* Arch. Ration. Mech. Anal. 129 (1995) 201-224.

[76] S.I. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u+\lambda f(u)$*,* Soviet Math. Vol. 5 (1965) 1408-1411.

[77] S.I. Pohozaev, *On the Eigenfunctions of Quasilinear Elliptic Problems,* Mat. Sbornik Vol. 82 (124) No. 2 (1970) 171-188.

[78] P.H. Rabinowitz, *Theorie du degree topologique et applications a des problemes aux limites non lineaires,* Lectures of Paris VI and Paris XI 1973 escritas por H. Berestycki. Publications de Universite VI Laboratoire d'Analyse Numerique. Paris, 1975.

[79] X. Ren, J. Wei, *Counting peaks of solutions to some quasilinear elliptic equations with large exponent,* J. Differ. Equat. 117 No. 1 (1995) 28-55.

[80] S. Sakaguchi, *Concavity properties of solutions to some degerate quasilinear elliptic Dirichlet problems,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie 4 Vol. 14 No. 3 (1987) 403-421.

[81] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations,* Acta Math. 111 (1964) 247-302.

[82] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans $\mathbb{R}^N$,* Lecture Notes in Math. No. 665 P. Benilan editor Springer Verlag, 1978.

[83] G. Stampacchia, "Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus" Les Presses de L'Universite de Montreal, 1966.

[84] M. Struwe, G. Tarantello, *On Multivortex Solutions in Chern-Simons Gauge Theory,* Prepublicación 1996.

[85] G. Talenti, *Nonlinear elliptic equations, rearrangements of functions and Orlicz spaces,* Ann. Mat. Pura Appl. 120 (1979) 159-184.

[86] P. Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations,* J. Differ. Equat. 51 (1984) 126-150.

[87] H. Yamabe, *On the deformations of Riemannian structures on compact manifolds,* Osaka Math. Jou. Vol 12 (1960) 21-37.

[88] A. Zygmund, "Trigonometric Series" Cambridge University Press, 1977.

Agradecimientos

No podía concluir esta Memoria sin expresar mi agradecimiento a todas y cada una de las personas que, en mayor o menor medida, han hecho posible que se escriba esta última página.

Me gustaría dar las gracias a todos los profesores de Matemáticas que he tenido a lo largo de mi vida estudiantil, los cuales han contribuido de alguna forma a que yo haya llegado hasta aquí (salvo una o dos excepciones que casi consiguen lo contrario).

Doy las gracias también al equipo de investigación en Ecuaciones en Derivadas Parciales del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid por incluir mi modesta participación dentro de los proyectos que ha llevado a cabo en los últimos años. Quería destacar la inestimable colaboración de Jesús a la hora de pulir el manuscrito de la presente Memoria, con valiosas sugerencias y correcciones.

Por otra parte, me gustaría agradecer al Instituto de Ingeniería del Conocimiento (IIC), lugar donde he estado trabajando durante los últimos siete años, las facilidades y la flexibilidad de horario que han permitido que mi trabajo de investigación matemática se haya llevado a cabo en paralelo. En particular, quería dar las gracias a mis compañeros del grupo de Aplicaciones Industriales del IIC por su ánimo e interés en mis progresos como investigador, y por lo mucho que he aprendido con ellos.

Por último, me gustaría agradecer muy especialmente el apoyo de las personas que han seguido más de cerca el trabajo que he venido realizando durante todos estos años. En primer lugar, mi madre; ella me enseñó a sumar y supongo que debe tener gran parte de "culpa" en haber despertado mi curiosidad matemática.

Por supuesto, otra de las personas que más de cerca ha seguido mi trabajo, qué duda cabe, ha sido mi director de tesis, Ireneo, cuyo entusiasmo inagotable y contagioso ha conseguido que, paso a paso, esta Memoria se haya llegado a escribir.

Finalmente, qué puedo decir de Lola. Nunca me dejó tirar la toalla en los momentos difíciles (no hubo muchos, pero sí algunos) animándome en todo momento, durante todos estos intensos años. Gracias, Lola.

Muchas gracias a todos.
Collado Mediano, 29 de marzo de 1998.