

**EL MÉTODO DE LA FASE  
ESTACIONARIA, FUNCIONES DE BESSEL  
Y APLICACIONES**

Trabajo fin de Máster

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Universidad Autónoma de Madrid. Curso 2009-2010

ALEJANDRO J. CASTRO CASTILLA

Dirigido por Gustavo Garrigós Anierte



# Índice

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>5</b>
<b>2. COTAS SUPERIORES</b>	<b>7</b>
2.1. Fase no estacionaria . . . . .	7
2.2. Lemas de van der Corput . . . . .	7
2.3. Fase no estacionaria: caso multidimensional . . . . .	10
<b>3. DESARROLLO ASINTÓTICO DE UNA INTEGRAL OSCILATORIA</b>	<b>13</b>
3.1. Contexto unidimensional . . . . .	13
3.2. Contexto multidimensional . . . . .	22
3.3. Análisis más fino del error . . . . .	28
<b>4. APLICACIONES A LAS FUNCIONES DE BESSEL</b>	<b>35</b>
4.1. Serie de potencias . . . . .	35
4.2. Representación integral . . . . .	36
4.3. Cotas superiores y desarrollos asintóticos . . . . .	39
4.4. Estimaciones uniformes en el parámetro $\nu$ . . . . .	45
4.5. Norma $L^p$ de las funciones de Bessel . . . . .	53
<b>5. APLICACIONES AL PROBLEMA DE RESTRICCIÓN DE LA TRANS- FORMADA DE FOURIER</b>	<b>59</b>
5.1. Transformada de Fourier de una medida . . . . .	59
5.2. El Teorema de restricción de Stein (1967) . . . . .	60
5.3. Teoremas de restricción en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	62



## 1. INTRODUCCIÓN

Las integrales oscilatorias son un importante objeto de estudio dentro del análisis armónico. Fourier las estudió en sus trabajos relativos a las funciones de Bessel; Airy, Stokes y Lipschitz también se preocuparon de determinar un desarrollo asintótico de estas funciones. Riemann usó el método de la fase estacionaria para encontrar un desarrollo asintótico de ciertas transformadas de Fourier. Más recientemente, las integrales oscilatorias han resultado de gran utilidad en EDP's y en teoría de números, en particular, en el problema de la distribución de puntos con coordenadas enteras.

Una integral oscilatoria es una función  $I(\lambda)$ , que depende del parámetro  $\lambda > 0$ , de la forma

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx,$$

para ciertas funciones suficientemente suaves  $\phi$  y  $\psi$ , y donde  $(a, b)$  puede ser un intervalo propio de la recta o todo  $\mathbb{R}$ . Por razones físicas, es habitual denominar a  $\phi$  función de fase y a  $\psi$  función de amplitud. La transformada de Fourier es un claro ejemplo de integral oscilatoria. Otro ejemplo que investigaremos con cierto detalle en esta memoria son las funciones de Bessel

$$J_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-imx} dx, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Un problema interesante es estudiar qué le ocurre a  $I(\lambda)$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , es decir, determinar su comportamiento asintótico. Es claro que si  $\psi$  es integrable entonces  $|I(\lambda)| \leq \|\psi\|_1$ . Es más, es de esperar un cierto decaimiento cuando  $\lambda$  es grande, debido a las cancelaciones que se producen en la integral. Así, cuando la derivada de la fase no se anula, es decir  $\phi'(x) \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y digamos  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , integrando sucesivamente por partes obtenemos

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^N}\right),$$

para  $N$  tan grande como se desee. En particular, para fases lineales  $\phi(x) = x$  obtenemos el decaimiento rápido de la transformada de Fourier de una función suave. Por otro lado, para fases cuadráticas un ejemplo ilustrativo viene dado por

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda x^2} dx = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \int_0^\infty e^{it^2} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

donde la constante  $\int_0^\infty e^{it^2} dt$  (integral impropia en el sentido de Riemann) se puede calcular explícitamente con el teorema de los residuos. Este decaimiento es característico de las integrales oscilatorias cuando la función fase  $\phi(x)$  es cuadrática.

De los ejemplos anteriores sigue que la contribución principal de una integral oscilatoria ocurre cerca de los puntos  $x_0$  donde  $\phi'(x_0) = 0$ , es decir puntos donde la fase  $\phi$  es "estacionaria". Por tanto, un procedimiento para estimar integrales oscilatorias, digamos con un único punto estacionario  $x_0$ , consistiría en dividir  $I(\lambda)$  en dos integrales, la primera sobre un entorno suficientemente pequeño de  $x_0$  y la segunda sobre el complementario de este intervalo. En la primera, la fase es esencialmente constante y no cabe esperar cancelación. Esta integral la mayoramos por la medida del intervalo. En la segunda integral,

aprovechamos la cancelación integrando por partes. Esta estrategia es suficiente para encontrar buenas cotas superiores de  $|I(\lambda)|$  (ver sección 2). Si nuestro propósito sobre  $I(\lambda)$  es conocer un término principal más un término de error, la táctica a seguir requiere algo más de análisis (ver sección 3).

Este modo de abordar el problema se denomina “método de la fase estacionaria”, y es el objeto de estudio de este trabajo. Se pueden formular teoremas más o menos generales, como los recogidos en la sección 3, que ilustran la aplicabilidad del método. No obstante, en la práctica resulta más apropiado entender el método como un conjunto de técnicas que en muchas ocasiones hay que desarrollar específicamente para cada caso. Por ejemplo, dificultades adicionales surgen cuando la integración por partes produce términos adicionales de frontera (en integrales de tipo  $\int_a^b e^{i\phi(x)}\psi(x)dx$ ), o cuando la fase depende de un parámetro y buscamos estimaciones independientes del parámetro (ver sección 4.4 sobre funciones de Bessel).

Así, hemos estructurado este trabajo como sigue. En la sección 2 estudiamos el lema de van der Corput y la acotación de integrales oscilatorias con fase no estacionaria. En la tercera sección nos centramos en determinar un desarrollo asintótico cuando la fase de la integral es estacionaria, distinguiendo cuando estamos en una o varias dimensiones y prestando especial atención al comportamiento del error. A continuación, en la sección 4, introducimos las funciones de Bessel  $J_\nu$  vía representación en serie e integral y les aplicamos la teoría general previamente desarrollada. Uno de los objetivos a alcanzar aquí es analizar la norma  $L^p$  de estas funciones y su dependencia del parámetro  $\nu$ . Finalmente, en la quinta sección, abordamos algunas aplicaciones al problema de restricción de la transformada de Fourier.

## 2. COTAS SUPERIORES

### 2.1. Fase no estacionaria

**Proposición 2.1.** Sean  $\psi \in C_0^\infty(a, b)$  y  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\phi'(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Entonces, para cada  $N \in \mathbb{N}$  se verifica

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^N}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (1)$$

*Demostración.* Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y  $\lambda > 0$ . Ya que  $\phi'$  no se anula en el intervalo  $[a, b]$ , podemos considerar el operador diferencial  $D = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cdot}{\phi'(x)}\right)$ . Integrando  $N$  veces por partes,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} e^{i\lambda\phi(x)} \frac{\psi(x)}{\phi'(x)} dx = -\frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} D\psi(x) dx \\ &= -\frac{1}{(i\lambda)^2} \int_a^b \frac{d}{dx} e^{i\lambda\phi(x)} \frac{D\psi(x)}{\phi'(x)} dx = \left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^2 \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} D^2\psi(x) dx \\ &= \dots = \left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^N \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} D^N\psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Observar que los términos de borde no aparecen porque la función  $\psi$  se anula en un entorno de  $x = a, b$ . De la expresión anterior sigue fácilmente (1) pues la integral que se obtiene está acotada independientemente de  $\lambda$ .  $\square$

En la Proposición 2.1 es importante que  $\psi$  se anule cerca de los extremos del intervalo  $[a, b]$ . En caso contrario el decaimiento en (1) es falso. De hecho, puede ser que  $I(\lambda) = \mathcal{O}(1/\lambda)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ , como se aprecia en el siguiente ejemplo sencillo

$$\int_a^b e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}.$$

### 2.2. Lemas de van der Corput

Si el soporte de la función  $\psi$  no está contenido en el intervalo  $(a, b)$  veamos qué podemos decir de la integral oscilatoria  $I(\lambda)$ . En la siguiente proposición, introducida por J.G. van der Corput en 1921 ([11]), estudiamos una de las situaciones más sencillas, cuando  $\psi \equiv 1$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $\phi \in C^\infty(a, b)$  verificando  $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ ,  $x \in [a, b]$ , para cierto  $k \in \mathbb{N}$ . Si

(i)  $k = 1$  y  $\phi'$  es monótona; ó

(ii)  $k \geq 2$ ,

entonces,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq \frac{C_k}{\lambda^{1/k}}, \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

siendo  $C_1 = 2$  y  $C_k = 2^{k+1} - 2$ ,  $k \geq 2$ .

*Demostración.* Probamos primero (i). Fijamos  $\lambda > 0$  y suponemos, sin pérdida de generalidad,  $\phi'$  creciente y  $\phi'(x) \geq 1$ ,  $x \in [a, b]$ , por continuidad. Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx &= \frac{1}{i\lambda} \int_a^b \frac{d}{dx} e^{i\lambda\phi(x)} \frac{1}{\phi'(x)} dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi'(x)} dx + \frac{1}{i\lambda} \left[ e^{i\lambda\phi(x)} \frac{1}{\phi'(x)} \right]_a^b. \end{aligned}$$

De aquí,

$$\left| \frac{1}{i\lambda} \left[ e^{i\lambda\phi(x)} \frac{1}{\phi'(x)} \right]_a^b \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\phi'(b)} + \frac{1}{\phi'(a)} \right)$$

y también,

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi'(x)} dx \right| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi'(x)} \right| dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{|\phi''(x)|}{\phi'(x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{1}{\phi'(x)} dx \right| = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)} \right| \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\phi'(a)} - \frac{1}{\phi'(b)} \right), \end{aligned}$$

ya que  $\phi''$  es una función no negativa y  $\phi'$  es creciente. Luego,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq \frac{2}{\lambda\phi'(a)} \leq \frac{2}{\lambda}.$$

Establecemos (ii) procediendo por inducción sobre  $k$ . Por hipótesis de inducción consideramos (3) cierto para toda función que verifique las hipótesis del enunciado. Sin pérdida de generalidad, suponemos además que

$$\phi^{(k+1)}(x) \geq 1, \quad x \in [a, b].$$

Esto nos dice que  $\phi^{(k)}$  es una función creciente. Tomamos  $\xi \in [a, b]$  el único punto verificando

$$|\phi^{(k)}(\xi)| = \min_{x \in [a, b]} |\phi^{(k)}(x)|.$$

Distinguiamos dos casos.

$\phi^{(k)}(\xi) = 0$ . Utilizaremos el método de la fase estacionaria mencionado en la introducción. Obsérvese que lejos de  $\xi$  se tiene

$$|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta, \quad x \notin (\xi - \delta, \xi + \delta), \quad \delta < \min\{\xi - a, b - \xi\}.$$

En efecto, basta aplicar el teorema del valor medio,

$$|\phi^{(k)}(x)| = |\phi^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(\xi)| = |x - \xi| |\phi^{(k+1)}(\eta)| \geq \delta, \quad x \notin (\xi - \delta, \xi + \delta), \quad \delta < \min\{\xi - a, b - \xi\},$$

para un cierto  $\eta \in (a, b)$ . Vemos así que  $\phi^{(k)}(x)/\delta \geq 1$ ,  $x \in (a, \xi - \delta) \cup (\xi + \delta, b)$ . Aplicando ahora la hipótesis de inducción a esta función,

$$\left| \int_a^{\xi - \delta} e^{i(\lambda\delta)\phi(x)/\delta} dx \right| \leq \frac{C_k}{(\lambda\delta)^{1/k}},$$



y también,

$$\left| \int_{\xi+\delta}^b e^{i(\lambda\delta)\phi(x)/\delta} dx \right| \leq \frac{C_k}{(\lambda\delta)^{1/k}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| &= \left| \left( \int_a^{\xi-\delta} + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} + \int_{\xi+\delta}^b \right) e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \\ &\leq \frac{2C_k}{(\lambda\delta)^{1/k}} + 2\delta. \end{aligned} \quad (4)$$

La integral intermedia la hemos acotado por la longitud del intervalo.

$\phi^{(k)}(\xi) \neq 0$ . Por monotonía necesariamente ha de ser  $\xi = a$  ó  $\xi = b$ . Suponemos  $\xi = a$ . Procediendo igual que antes, también es cierto

$$|\phi^{(k)}(x)| \geq |\phi^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(\xi)| \geq \delta, \quad x \notin (a, a + \delta), \quad \delta < b - a,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| &= \left| \left( \int_a^{a+\delta} + \int_{a+\delta}^b \right) e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \\ &\leq \frac{C_k}{(\lambda\delta)^{1/k}} + \delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Las acotaciones en (4) y (5) se minimizan cuando  $\delta = (\lambda\delta)^{-1/k}$ , es decir, cuando  $\delta = \lambda^{-1/(k+1)}$ . De esta manera probamos la situación  $k + 1$ , siendo  $C_{k+1} = 2C_k + 2$ . Recursivamente se obtiene  $C_k = 2^{k+1} - 2$ .  $\square$

Cabe señalar que la constante del Lema de van der Corput obtenida aquí se puede mejorar, de hecho  $C_k = \mathcal{O}(k)$  (ver [1, Lema 1], [6, Proposición 2.2] y [21, Lema 4]).

Ahora es fácil establecer un resultado para funciones  $\psi$  más generales.

**Corolario 2.3.** *Si  $\phi$  satisface las mismas hipótesis que en la Proposición 2.2 y  $\psi$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , se tiene que*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq \frac{C_k}{\lambda^{1/k}} \left( |\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right), \quad \lambda > 0,$$

con  $C_1 = 2$  y  $C_k = 2^{k+1} - 2$ ,  $k \geq 2$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda > 0$ . Definimos la función

$$F(x) = \int_a^x e^{i\lambda\phi(y)} dy, \quad x \in [a, b].$$

Integrando por partes es claro que

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = \int_a^b F'(x) \psi(x) dx = - \int_a^b F(x) \psi'(x) dx + [F(x) \psi(x)]_a^b.$$

En virtud de la Proposición 2.2,

$$|F(x)| \leq \frac{C_k}{\lambda^{1/k}}, \quad x \in [a, b].$$

Luego,

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \leq \frac{C_k}{\lambda^{1/k}} \left( |\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)|dx \right),$$

por ser  $F(a) = 0$ . □

### 2.3. Fase no estacionaria: caso multidimensional

Mostramos a continuación otra técnica diferente a la empleada en dimensión 1 para obtener el decaimiento de una integral oscilatoria cuya fase no es estacionaria. Esta vez no integramos repetidas veces por partes, sino que nos apoyamos en el siguiente lema, que es una variante del teorema de la función implícita (véase [18, Teorema 3, p. 214])

**Lema 2.4.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty(\Omega)$  y  $x_0 \in \Omega$  de manera que  $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ . Entonces, existen entornos  $U$  y  $V$  de  $0$  y  $x_0$  respectivamente y un difeomorfismo  $G : U \rightarrow V$  verificando  $G(0) = x_0$  y

$$\phi(G(y)) = \phi(x_0) + y_n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in U.$$

**Proposición 2.5.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty(\Omega)$  y  $x_0 \in \Omega$  de manera que  $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ . Suponemos también  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte en un entorno suficientemente pequeño de  $x_0$ . Entonces,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| \leq \frac{C_N}{\lambda^N}, \quad N \in \mathbb{N},$$

siendo  $C_N > 0$  una constante que depende de  $N$  y de un número finito de derivadas de  $\phi$  y  $\psi$ .

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  los entornos que nos proporciona el Lema 2.4, y  $G$  el difeomorfismo que existe entre ellos. Podemos suponer  $\text{sop}(\psi) \subset V$ . Haciendo el cambio de variables  $x = G(y)$  conseguimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx &= \int_V e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \int_U e^{i\lambda\phi(G(y))}\psi(G(y))|J_G(y)|dy \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \int_U e^{i\lambda y_n}\psi(G(y))|J_G(y)|dy \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot (-\lambda/2\pi e_n)}\psi(G(y))|J_G(y)|dy \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \widehat{\psi} \left( -\frac{\lambda}{2\pi} e_n \right), \end{aligned}$$

siendo  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  y  $\tilde{\psi}(y) = \psi(G(y))|J_G(y)|$ . Por ser  $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , también  $\widehat{\tilde{\psi}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| &= \left| \widehat{\tilde{\psi}} \left( -\frac{\lambda}{2\pi} e_n \right) \right| = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^N \left| \left( -\frac{\lambda}{2\pi} \right)^N \widehat{\tilde{\psi}} \left( -\frac{\lambda}{2\pi} e_n \right) \right| \\ &\leq \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^N \left\| \widehat{\tilde{\psi}} \right\|_{(0, \dots, 0, N), 0}, \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Aquí,  $\|\cdot\|_{\alpha,0}$  denota la seminorma en la clase de Schwartz

$$\|f\|_{\alpha,0} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha f(x)|,$$

para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

□



### 3. DESARROLLO ASINTÓTICO DE UNA INTEGRAL OSCILATORIA

#### 3.1. Contexto unidimensional

**Teorema 3.1.** *Supongamos  $k \geq 2$ , y  $x_0 \in \mathbb{R}$  verificando*

$$\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \cdots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0,$$

con  $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$ . Si  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tiene soporte suficientemente pequeño en un entorno de  $x_0$ , entonces

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/k}}, \quad (6)$$

es decir, para cualesquiera  $N, r \in \mathbb{N}$  se verifica

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^r \left[ I(\lambda) - \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/k}} \right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{r+(N+2)/k}}\right) \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (7)$$

*Demostración.* Detallamos la situación  $k = 2$ , comenzando por el caso de fase cuadrática  $\phi(x) = x^2$ . Dividimos la prueba en una serie de pasos. El primero de ellos es una fórmula explícita cuando  $\psi(x) = x^l e^{-x^2}$ .

$$\text{PASO 1: } \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+(l+1)/2}}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (8)$$

Veamos como obtener (8) usando el teorema de los residuos. Observamos que si  $l$  es impar, la integral en (8) se anula. Sea entonces  $l \in \mathbb{N}$  un número par. Si hacemos el cambio de variables  $t = \sqrt{1 - i\lambda}x$  conseguimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = 2(1-i\lambda)^{-(l+1)/2} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^l dt \\ &= \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) (1-i\lambda)^{-(l+1)/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde el cambio de variables complejo se puede justificar como sigue. Para normalizar tomamos  $x = t/(1 + \lambda^2)^{1/4}$ , obteniendo así

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = C_\lambda \int_0^{\infty} e^{-w_\lambda t^2} t^l dt,$$

siendo  $w_\lambda = (1 - i\lambda)/\sqrt{1 + \lambda^2}$  un vector unitario y  $C_\lambda = 1/(1 + \lambda^2)^{(l+1)/4}$ . También podemos escribir  $w_\lambda = e^{i\theta_\lambda}$ , con  $-\pi/2 < \theta_\lambda < 0$ , ya que  $\lambda > 0$ . Para calcular esta última integral tomamos, para cada  $R > 0$ , la curva cerrada y orientada positivamente

$$\gamma_R = \gamma_R^1 + \gamma_R^2 - \gamma_R^3,$$

donde

- $\gamma_R^1 = \{z = te^{i\theta_\lambda/2} : t \in [0, R]\}$ ,
- $\gamma_R^2 = \{z = Re^{i\theta} : \theta \in [\theta_\lambda/2, 0]\}$ ,
- $\gamma_R^3 = \{z = t : t \in [0, R]\}$ .

Ya que  $F(z) = e^{-z^2} z^l$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , es una función entera, el teorema de los residuos nos dice que

$$0 = \int_{\gamma_R} F(z) dz = \int_{\gamma_R^1} F(z) dz + \int_{\gamma_R^2} F(z) dz - \int_{\gamma_R^3} F(z) dz, \quad R > 0. \quad (10)$$

Analizamos cada una de estas integrales por separado. Se tiene que

$$\int_{\gamma_R^1} F(z) dz = w_\lambda^{(l+1)/2} \int_0^R e^{-w_\lambda t^2} t^l dt \longrightarrow w_\lambda^{(l+1)/2} \int_0^\infty e^{-w_\lambda t^2} t^l dt, \quad R \rightarrow \infty.$$

Por ser  $0 < \cos \theta_\lambda \leq \cos 2\theta$ ,  $\theta \in [\theta_\lambda/2, 0]$ , obtenemos

$$\left| \int_{\gamma_R^2} F(z) dz \right| \leq R^{l+1} \int_{\theta_\lambda/2}^0 e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{4} R^{l+1} e^{-R^2 \cos \theta_\lambda} \longrightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Por otro lado,

$$\int_{\gamma_R^3} F(z) dz = \int_0^R e^{-t^2} t^l dt \longrightarrow \int_0^\infty e^{-t^2} t^l dt, \quad R \rightarrow \infty.$$

Haciendo  $R \rightarrow \infty$  en (10) conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = C_\lambda \frac{1}{w_\lambda^{(l+1)/2}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^l dt = (1-i\lambda)^{-(l+1)/2} \int_0^\infty e^{-t^2} t^l dt,$$

como queríamos.

Escribimos ahora

$$(1-i\lambda)^{-(l+1)/2} = \lambda^{-(l+1)/2} (1/\lambda - i)^{-(l+1)/2}.$$

Ya que la función  $(z-i)^{-(l+1)/2}$  es analítica en la bola unidad, se tiene

$$(z-i)^{-(l+1)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(l) z^m, \quad |z| < 1,$$

para ciertos coeficientes

$$c_m(l) = \binom{-(l+1)/2}{m} i^{m+(l+1)/2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En definitiva, sustituyendo en (9)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right) \lambda^{-(l+1)/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(l)}{\lambda^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+(l+1)/2}}, \quad \lambda > 1,$$

con convergencia uniforme en  $\lambda \geq \lambda_0 > 1$ . En particular, se tiene la estimación del error

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx - \sum_{m=0}^N \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+(l+1)/2}} \right) \right| = \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+r+(l+1)/2}} \right| \leq \frac{C_N}{\lambda^{N+1+r+(l+1)/2}}. \quad (11)$$

En el segundo paso mantenemos  $\phi(x) = x^2$  y estudiamos el decaimiento mejorado de  $I(\lambda)$  cuando  $\psi(x) = x^l \eta(x)$  con  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Para ello usamos el método de fase estacionaria descrito en la introducción.

$$\boxed{\text{PASO 2: } \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx \right| \leq \frac{A}{\lambda^{(l+1)/2}}, \quad \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad l \in \mathbb{N}} \quad (12)$$

Tomamos  $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , de manera que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 2 \end{cases}.$$

Para un cierto  $\varepsilon > 0$  pequeño, que determinamos más adelante, dividimos usando la función de corte suave  $\alpha$  la integral que aparece en (12) en otras dos, según estemos cerca o lejos del origen:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \alpha(x/\varepsilon) dx + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) [1 - \alpha(x/\varepsilon)] dx$$

La primera integral la podemos estimar fácilmente haciendo el cambio de variables  $x = \varepsilon z$ . Así,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \alpha(x/\varepsilon) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |x|^l |\eta(x)| \alpha(x/\varepsilon) dx \\ &= \varepsilon^{l+1} \int_{\mathbb{R}} |z|^l |\eta(\varepsilon z)| \alpha(z) dz \\ &\leq A \varepsilon^{l+1}, \end{aligned} \quad (13)$$

siendo  $A > 0$  una constante independiente de  $\varepsilon$ . Recordar que las funciones  $\eta$  y  $\alpha$  tienen soporte compacto. El estudio de la segunda integral hay que hacerlo con más cuidado. Llamamos

$$f(x) = x^l \eta(x) [1 - \alpha(x/\varepsilon)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es claro que  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  y  $\text{sop } f \subset B(0, M) \setminus B(0, \varepsilon)$ , siempre que  $\text{sop } \eta \subset B(0, M)$ . Denotamos por  $D$  al operador diferencial  $Df = d/dx(f/x)$ . Procediendo como en (2) conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} f(x) dx = \left( \frac{-1}{2i\lambda} \right)^m \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} D^m f(x) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que

$$D^m f(x) = \frac{1}{x^{2m}} \sum_{j=0}^m c_{j,m} f^{(j)}(x) x^j, \quad m \in \mathbb{N},$$

para ciertas constantes  $c_{j,m}$ . En efecto, si  $m = 1$ ,

$$Df(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

Procediendo por inducción suponemos cierto

$$D^{m-1}f(x) = \frac{1}{x^{2(m-1)}} \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} f^{(j)}(x) x^j.$$

Veamos qué ocurre en el siguiente paso:

$$\begin{aligned} D^m f(x) &= D(D^{m-1}f(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} f^{(j)}(x) x^j \right) \\ &= \frac{1}{x^{4m-2}} \left[ \left( \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} (f^{(j+1)}(x) x^j + j f^{(j)}(x) x^{j-1}) \right) x^{2m-1} \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} f^{(j)}(x) x^j \right) (2m-1) x^{2m-2} \right] \\ &= \frac{1}{x^{2m}} \left[ \left( \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} (f^{(j+1)}(x) x^j + j f^{(j)}(x) x^{j-1}) \right) x \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{j=0}^{m-1} c_{j,m-1} f^{(j)}(x) x^j \right) (2m-1) \right] \\ &= \frac{1}{x^{2m}} \sum_{j=0}^m c_{j,m} f^{(j)}(x) x^j. \end{aligned}$$

Con todo lo anterior podemos concluir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} f(x) dx \right| &= \frac{1}{(2\lambda)^m} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} D^m f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{A}{\lambda^m} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} \frac{1}{|x|^{2m}} \sum_{j=0}^m |f^{(j)}(x) x^j| dx \\ &\leq \frac{A}{\lambda^m} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{2m-l}} dx \\ &\leq \frac{A}{\lambda^m} \frac{1}{\varepsilon^{2m-l-1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m > (l+1)/2, \end{aligned} \tag{14}$$

para cierta constante  $A > 0$  que no depende de  $\varepsilon$ . En la penúltima desigualdad hemos aplicado

$$|f^{(j)}(x) x^j| \lesssim |x|^l, \quad \varepsilon \leq |x| \leq M, \quad j \in \mathbb{N}.$$



Para justificar esta acotación basta aplicar la regla de derivación de Leibniz

$$\begin{aligned}
|x^j f^{(j)}(x)| &= \left| x^j \sum_{\beta=0}^j \binom{j}{\beta} (x^\beta)^{(j-\beta)} (\eta(x)[1 - \alpha(x/\varepsilon)]^{(\beta)} \right| \\
&\lesssim |x|^l \sum_{\beta=0}^j |x|^\beta \left| \sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} \eta^{(\beta-\gamma)}(x) [1 - \alpha(x/\varepsilon)]^{(\gamma)} \right| \\
&\lesssim |x|^l \sum_{\beta=0}^j |x|^\beta \left( 2 + \sum_{\gamma=1}^{\beta} \chi_{[\varepsilon, 2\varepsilon]}(x) \frac{|\alpha^{(\gamma)}(x/\varepsilon)|}{\varepsilon^\gamma} \right) \\
&\lesssim |x|^l \sum_{\beta=0}^j |x|^\beta \left( 2 + \sum_{\gamma=1}^{\beta} |x|^{-\gamma} \right) \\
&\lesssim |x|^l, \quad \varepsilon \leq |x| \leq M, \quad j \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Juntando (13) y (14),

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx \right| \leq A \left( \varepsilon^{l+1} + \frac{1}{\lambda^m} \frac{1}{\varepsilon^{2m-l-1}} \right), \quad m > (l+1)/2.$$

Elegimos  $\varepsilon > 0$  minimizando la expresión anterior, es decir,

$$\varepsilon^{l+1} = \frac{1}{\lambda^m} \frac{1}{\varepsilon^{2m-l-1}}.$$

Esto se consigue tomando  $\varepsilon = \lambda^{-1/2}$ . Probamos así (12).

Veamos cómo obtener la expansión asintótica en el caso general.

PASO 3:  $\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/2}}$

Sea  $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  de manera que  $\tilde{\psi}(x) = 1$ ,  $x \in \text{sop}(\psi)$ . Podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} [e^{x^2} \psi(x)] \tilde{\psi}(x) dx.$$

Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y consideramos el desarrollo de Taylor de la función  $e^{x^2} \psi(x)$

$$e^{x^2} \psi(x) = \sum_{l=0}^N b_l x^l + x^{N+1} R_N(x) = P_N(x) + x^{N+1} R_N(x), \quad x \in \text{sop}(\psi).$$

Sustituyendo en lo anterior conseguimos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx &= \sum_{l=0}^N b_l \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} P_N(x) e^{-x^2} [\tilde{\psi}(x) - 1] dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^{N+1} R_N(x) e^{-x^2} \tilde{\psi}(x) dx \\
&= I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda).
\end{aligned}$$

Estudiamos cada una de estas integrales por separado. En virtud del PASO 1, es claro que

$$\begin{aligned}
I_1(\lambda) &= \sum_{l=0}^N b_l \left( \sum_{m=0}^N \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+(l+1)/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1+(l+1)/2}}\right) \right) \\
&= \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N b_l \frac{C_m(l)}{\lambda^{m+(l+1)/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(N+2)/2}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{3N} \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(N+2)/2}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^N \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(N+2)/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

siendo

$$a_j = \sum_{l,m=0,\dots,N, 2m+l=j} b_l C_m(l), \quad j = 0, \dots, 3N.$$

Por ser  $P_N(x)e^{-x^2}[\tilde{\psi}(x) - 1]$  una función de la clase de Schwartz que se anula en un entorno del origen, podemos integrar por partes  $I_2(\lambda)$  cuantas veces deseemos (ver Proposición 2.1). En particular, integrando  $N + 1$  veces por partes se tiene

$$I_2(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(N+2)/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Por último, el PASO 2 nos dice que

$$I_3(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{(N+2)/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

puesto que  $R_N(x)e^{-x^2}\tilde{\psi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

La cota del error (7) cuando  $r \geq 1$  se puede comprobar fácilmente usando (11) en  $I_1$ , integrando por partes  $N + r + 1$  veces en  $I_2$ , y usando el paso 2 con  $l = N + 1 + 2r$  en  $I_3$ .

Finalmente, analizamos la situación de fase no cuadrática.

PASO 4:  $\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\lambda^{(j+1)/2}}$

Ya que por hipótesis sabemos que  $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$  y  $\phi''(x_0) \neq 0$ , el desarrollo de Taylor de  $\phi$  en  $x_0$  nos queda

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{\phi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \mathcal{O}(|x - x_0|^3) \\
&= \frac{\phi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2[1 + \varepsilon(x)], \quad x \rightarrow x_0,
\end{aligned}$$

siendo  $\varepsilon(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|)$ ,  $x \rightarrow x_0$ . Elegimos  $U_{x_0}$  un entorno de  $x_0$  lo suficientemente pequeño para que se verifique

- $|\varepsilon(x)| < 1$ ,  $x \in U_{x_0}$ , y
- $\phi'(x) \neq 0$ ,  $x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ .

Suponemos además que  $\text{sop}(\psi) \subset U_{x_0}$ . De esta manera, la aplicación

$$x \mapsto y = \sqrt{\frac{\phi''(x_0)}{2}}(x - x_0)[1 + \varepsilon(x)]^{1/2}$$

es un difeomorfismo que aplica  $U_{x_0}$  en un entorno del origen que llamamos  $V_0$ . También es claro que  $\phi(x) = y^2$ . Haciendo este cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx &= \int_{U_{x_0}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \\ &= 2 \int_{V_0} e^{i\lambda y^2} \psi(\phi^{-1}(y^2)) \frac{y}{\phi'(\phi^{-1}(y^2))} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda y^2} \bar{\psi}(y) dy, \end{aligned}$$

siendo  $\bar{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  la función dada por

$$\bar{\psi}(y) = 2\psi(\phi^{-1}(y^2)) \frac{y}{\phi'(\phi^{-1}(y^2))}, \quad y \in V_0,$$

y que se anula fuera de  $V_0$ .

Los cambios de variables introducidos nos permiten pasar de la integral oscilatoria con fase  $\phi$  a una integral oscilatoria cuya fase es cuadrática, que ya estudiamos en el PASO 3.  $\square$

Si analizamos con detalle la prueba del Teorema 3.1 vemos que las constantes  $a_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , que aparecen en la expansión asintótica (6) dependen únicamente de un número finito de derivadas de  $\phi$  y  $\psi$  en el punto  $x_0$ . En particular, si  $k = 2$ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= \Gamma(1/2)b_0c_0(0) = \Gamma(1/2)[e^{y^2}\bar{\psi}(y)]_{y=0}[(z-i)^{-1/2}]_{z=0} \\ &= \left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)}\right)^{1/2} \psi(x_0), \end{aligned} \tag{15}$$

porque la regla de L'Hôpital nos dice que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \bar{\psi}(y) &= 2\psi(x_0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{\phi'(x)^2}\right)^{1/2} = 2\psi(x_0) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi'(x)}{2\phi'(x)\phi''(x)}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2}{\phi''(x_0)}\right)^{1/2} \psi(x_0). \end{aligned}$$

Según comentamos en el PASO 1, también se tiene que  $a_j = 0$ , para todo  $j$  impar, pues

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx = 0, \quad l \text{ impar},$$

y  $j = 2m + l$ ,  $l, m \in \mathbb{N}$ .

Usando técnicas similares a las empleadas en la prueba del teorema anterior establecemos el siguiente desarrollo asintótico que será de gran utilidad en la próxima sección.

**Proposición 3.2.** Sea  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  y  $\mu > -1$ . Entonces,

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x} \psi(x) x^\mu dx \sim \sum_{j=0}^\infty \frac{\alpha_j}{\lambda^{j+1+\mu}},$$

siendo

$$\alpha_j = i^{j+1+\mu} \frac{\Gamma(j+1+\mu)}{j!} \psi^{(j)}(0), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Observar que esta integral oscilatoria tiene fase no estacionaria y  $\psi$  no es necesariamente nula en el origen. Este ejemplo sirve para ilustrar el comentario que sigue a la Proposición 2.1. También es importante resaltar que los coeficientes que se obtienen en este desarrollo son explícitos, y esto no siempre es fácil de obtener como apreciamos en el Teorema 3.1.

*Demostración.* Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y  $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  verificando  $\tilde{\psi}(x) = 1$ ,  $x \in \text{sop}(\psi)$ . Suponemos cierto

- (a)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^\nu dx = \frac{i^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}, \quad \nu > -1,$
- (b)  $\sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^\nu (\tilde{\psi}(x) - 1) dx \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^M}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \nu > -1, M \in \mathbb{N}, M > \nu + 1,$
- (c)  $\int_0^\infty e^{i\lambda x} x^\nu \eta(x) dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \nu > -0, \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$

y escribimos el desarrollo de Taylor de la función  $\psi$  al nivel  $N$

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^N \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} x^j + x^{N+1} R_N(x), \quad x \in \text{sop}(\psi).$$

En virtud del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\lambda x} \psi(x) x^\mu dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} \psi(x) x^\mu \tilde{\psi}(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^{\mu+j} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^{\mu+j} [\tilde{\psi}(x) - 1] dx \right\} \\ &\quad + \int_0^\infty e^{i\lambda x} x^{\mu+N+1} R_N(x) \tilde{\psi}(x) dx \\ &= I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda). \end{aligned}$$

Haciendo uso de (a) conseguimos

$$I_1(\lambda) = \sum_{j=0}^N \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \frac{i^{j+1+\mu} \Gamma(j+1+\mu)}{\lambda^{j+1+\mu}} = \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{\lambda^{j+1+\mu}},$$

y por ser el límite menor o igual que el supremo, (b) nos dice que

$$I_2(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+2+\mu}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Finalmente, por (c) obtenemos

$$I_3(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+2+\mu}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

pues  $R_N(x)\tilde{\psi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

En resumen, hemos visto

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x} \psi(x) x^\mu dx - \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{\lambda^{j+1+\mu}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+2+\mu}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad N \in \mathbb{N},$$

como queríamos.

Falta por comprobar las propiedades (a), (b) y (c). Para calcular la integral que aparece en (a) podríamos proceder por residuos, igual que hicimos en el PASO 1 del Teorema 3.1. Sin embargo, vamos a seguir un camino más directo. Sea  $z > 0$ . Es claro que

$$\int_0^\infty e^{-zx} x^\nu dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}} \quad \nu > -1.$$

Como las funciones que aparecen a ambos lados de la igualdad anterior son holomorfas cuando  $\Re z > 0$ , y coinciden en el semieje real positivo, aplicando el principio de prolongación analítica terminamos. En efecto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^\nu dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon - i\lambda)x} x^\nu dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(\nu+1)}{(\varepsilon - i\lambda)^{\nu+1}} = \frac{i^{\nu+1} \Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}}.$$

Veamos ahora (b). Sea  $\varepsilon > 0$ ,  $\nu > -1$  y  $M \in \mathbb{N}$ , con  $M > \nu + 1$ . Integrando  $M$  veces por partes sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x} x^\nu (\tilde{\psi}(x) - 1) dx \right| &= \frac{1}{|-\varepsilon + i\lambda|^M} \left| \int_0^\infty \frac{d^M}{dx^M} (e^{(-\varepsilon + i\lambda)x}) x^\nu (\tilde{\psi}(x) - 1) dx \right| \\ &= \frac{1}{|-\varepsilon + i\lambda|^M} \left| \int_0^\infty e^{(-\varepsilon + i\lambda)x} \frac{d^M}{dx^M} (x^\nu (\tilde{\psi}(x) - 1)) dx \right| \\ &\lesssim \frac{1}{(\varepsilon^2 + \lambda^2)^{M/2}} \leq \frac{1}{\lambda^M}. \end{aligned}$$

Observar que no aparecen los términos de frontera al integrar por partes porque en  $x = \infty$  se anulan por el factor  $e^{-\varepsilon x}$  y en un entorno del origen la función  $\tilde{\psi}(x) - 1$  es idénticamente cero. Detallamos la acotación de la última integral. Elegimos  $\delta > 0$  de manera que  $\text{sop}(\tilde{\psi} - 1) \subset (\delta, \infty)$ . Se tiene que

$$\left| \int_0^\infty e^{(-\varepsilon + i\lambda)x} \frac{d^M}{dx^M} (x^\nu (\tilde{\psi}(x) - 1)) dx \right| \lesssim \int_\delta^\infty x^{\nu-M} dx + \int_\delta^\infty \sum_{j=0}^{M-1} x^{\nu-j} \tilde{\psi}^{(M-j)}(x) dx \lesssim 1,$$

porque  $M > \nu + 1$  y la segunda integral también es finita pues  $\tilde{\psi}$  tiene soporte compacto.

Por último (c) es consecuencia del PASO 2 del Teorema 3.1. Tomamos  $\nu > 0$  y  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Basta hacer el cambio de variables  $x = y^2$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\lambda x} x^\nu \eta(x) dx &= 2 \int_0^\infty e^{i\lambda y^2} y^{2\nu+1} \eta(y^2) dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda y^2} y^{2\nu+1} \tilde{\eta}(y) dy = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\nu+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo  $\tilde{\eta}(y) = \eta(y^2)\chi_{[0,\infty)}(y)$  una función de soporte compacto, continua y con cualquier derivada continua salvo quizás en el origen, pero esto es irrelevante.  $\square$

### 3.2. Contexto multidimensional

Nos proponemos ahora obtener un desarrollo asintótico de una integral oscilatoria con fase estacionaria en dimensión  $n$ ,  $n > 1$ . En  $\mathbb{R}^n$  se puede seguir una estrategia análoga a la de la sección anterior, pero preferimos dar un método directo, con interés en sí mismo, usando el teorema de Plancherel.

En el Teorema 3.1 la clave fue determinar el comportamiento de dicha integral cuando la fase es cuadrática, esto es,  $\phi(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Estudiamos en primer lugar el análogo  $n$ -dimensional, es decir, veremos que ocurre cuando

$$\phi(x) = \langle Tx, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

siendo  $T$  una matriz invertible, real y simétrica.

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  denotamos, como es habitual,  $\hat{f}$  a la transformada de Fourier de  $f$ , es decir,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Comenzamos calculando la siguiente transformada de Fourier que necesitaremos en la prueba del Teorema 3.4.

**Lema 3.3.** *Sea  $T$  una matriz de dimensión  $n \times n$ , invertible, real, simétrica y con signatura  $\sigma$ . Si llamamos*

$$G_T(x) = e^{-\pi i \langle Tx, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

*entonces la transformada de Fourier distribucional de  $G_T$  viene dada por*

$$\hat{G}_T = \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} G_{-T^{-1}}.$$

Recordamos que la signatura  $\sigma$  de la matriz  $T$  es la cantidad  $\sigma = \sigma_+ - \sigma_-$ , donde  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$  denotan respectivamente el número de autovalores positivos y negativos de  $T$ , contados según su multiplicidad.

*Demostración.* Ya que  $|G_T(x)| = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , es claro que  $G_T \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ . Sin embargo, se verifica

- $G_T \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\blacksquare \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} |G_T(x)| dx < \infty, \quad N > n.$$

Es decir,  $G_T$  es una función atemperada o de crecimiento lento. Luego,

$$L_{G_T}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_T(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

define una distribución atemperada. Para calcular la transformada de Fourier de  $G_T$  debemos encontrar una función, que llamamos  $\widehat{G}_T$ , verificando

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_T(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_T(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (16)$$

CASO  $n = 1$

Sea  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $\sigma = \text{sgn}(t)$ . Debemos ver que

$$\int_0^\infty e^{-\pi itx^2} \widehat{\varphi}(x)dx = \frac{e^{-\pi i\sigma/4}}{|t|^{1/2}} \int_0^\infty e^{\pi ix^2/t} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (17)$$

Si llamamos  $z = it$ , se tiene que  $e^{-\pi i\sigma/4}|t|^{-1/2} = z^{-1/2}$ . Luego (17) equivale a probar

$$\int_0^\infty e^{-\pi zx^2} \widehat{\varphi}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{-\pi x^2/z} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (18)$$

cuando  $z$  es un número imaginario puro. Como ambos términos en (18) son funciones holomorfas en  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ , y continuas en  $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq 0, z \neq 0\}$  en virtud del principio de prolongación analítica para probar que son iguales basta hacerlo en un subconjunto de esta región que tenga puntos de acumulación. Veamos entonces que (18) se verifica en el semieje real positivo.

Definimos la función  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Es bien conocido que  $f = \widehat{f}$  (véase [14, Proposición 8.24, p. 251]). Además, por ser  $f$  una función integrable, se tiene  $\widehat{L_f} = L_{\widehat{f}}$ . Esto prueba la relación (18) para  $z = 1$ .

Supongamos ahora  $z > 0$ . Definimos la función  $g(x) = e^{-\pi zx^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Por ser  $g$  también integrable, para demostrar (18) basta comprobar que

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\pi \xi^2/z}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y esto es inmediato a partir de las propiedades de la transformada de Fourier.

CASO  $n \geq 2$

Es suficiente probar (16) para matrices diagonales. En efecto, sea  $T$  una matriz real simétrica y no degenerada. Podemos escribir  $T = USU^{-1}$ , siendo  $S$  una matriz diagonal y  $U$  ortogonal ([5, (178), p. 359]). Es claro que  $U^{-1} = U^t$ ,  $\det U = 1$ ,  $\det T = \det S$  y las signaturas de  $T$  y  $S$  coinciden. Además,

$$\widehat{\varphi \circ U}(\xi) = |\det U|^{-1} \widehat{\varphi}((U^{-1})^t \xi) = (\widehat{\varphi} \circ U)(\xi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} G_T(x) \widehat{\varphi}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle USU^{-1}x, x \rangle} \widehat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle SU^{-1}x, U^{-1}x \rangle} \widehat{\varphi}(x) dx \\
&= |\det U| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle Sy, y \rangle} \widehat{\varphi}(Uy) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle Sy, y \rangle} \widehat{\varphi \circ U}(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} G_S(y) \widehat{\varphi \circ U}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_S(y) \varphi(U(y)) dy \\
&= \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det S|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_{-S^{-1}}(y) \varphi(U(y)) dy \\
&= \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i \langle S^{-1}y, y \rangle} \varphi(U(y)) dy \\
&= |\det U^{-1}| \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i \langle S^{-1}U^{-1}x, U^{-1}x \rangle} \varphi(x) dx \\
&= \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle -T^{-1}x, x \rangle} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_T(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Supongamos entonces que  $T$  es una matriz diagonal,  $T = \text{diag}\{t_1, \dots, t_n\}$ . Llamamos  $\sigma_j = \text{sgn}(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Es claro que

$$\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma_j \quad \text{y} \quad \det T = \prod_{j=1}^n t_j.$$

Probamos en primer lugar (16) en un contexto más sencillo. Imponemos que  $\varphi(x)$  sea tensorial, es decir,

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} G_T(x) \widehat{\varphi}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \sum_{j=1}^n t_j x_j^2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \sum_{j=1}^n t_j x_j^2} \left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_j \xi_j} \varphi_j(\xi_j) d\xi_j \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \sum_{j=1}^n t_j x_j^2} \prod_{j=1}^n \widehat{\varphi}_j(x_j) dx = \prod_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-\pi i t_j x_j^2} \widehat{\varphi}_j(x_j) dx_j \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\pi i \sigma_j / 4}}{|t_j|^{1/2}} \int_0^\infty e^{\pi i x_j^2 / t_j} \varphi_j(x_j) dx_j = \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle -T^{-1}x, x \rangle} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_T(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Por último debemos estudiar qué ocurre cuando  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  no es tensorial. Dado  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  no es difícil probar que existe una sucesión  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , donde para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k$  es combinación lineal de funciones tensoriales de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , verificando

$$\varphi_k \longrightarrow \varphi, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$



(véase [34, Proposición 2.1', p. 9]). Por ser la transformada de Fourier un operador continuo de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en sí mismo, también podemos escribir

$$\widehat{\varphi}_k \longrightarrow \widehat{\varphi}, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Además, si  $f$  es una función temperada, el funcional  $L_f$  es continuo en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Con todo esto, sigue que

$$L_{e^{\pi i \langle T^{-1}, \cdot \rangle}}(\varphi_k) \longrightarrow L_{e^{\pi i \langle T^{-1}, \cdot \rangle}}(\varphi), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

y

$$L_{e^{-\pi i \langle T, \cdot \rangle}}(\widehat{\varphi}_k) \longrightarrow L_{e^{-\pi i \langle T, \cdot \rangle}}(\widehat{\varphi}), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Finalmente, aplicamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle Tx, x \rangle} \widehat{\varphi}_k(x) dx = \frac{e^{-\pi i \sigma / 4}}{|\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i \langle T^{-1}x, x \rangle} \widehat{\varphi}_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

por ser  $\varphi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , una función tensorial. La unicidad del límite permite concluir esta prueba.  $\square$

**Teorema 3.4.** *Sea  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $T$  una matriz real, simétrica, invertible y con signatura  $\sigma$ . Entonces,*

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \langle Tx, x \rangle} \psi(x) dx \\ &= \frac{\pi^{n/2} e^{\pi i \sigma / 4}}{\lambda^{n/2} |\det T|^{1/2}} \left( \psi(0) + \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{D}_j \psi(0)}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

siendo  $\mathcal{D}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , un operador diferencial de orden  $2j$ , homogéneo de coeficientes constantes que depende únicamente de  $T$ ; y las demás constantes implícitas dependen sólo de  $T$  y de un número finito de seminormas de la clase de Schwartz de  $\psi$ .

*Demostración.* Fijamos  $N \in \mathbb{N}$ . En virtud del teorema de inversión de Fourier sabemos que  $\widehat{\psi}(y) = \psi(-y)$ , c.t.  $y \in \mathbb{R}^n$ . Además, por ser  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , el Lema 3.3 nos permite escribir

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \langle Tx, x \rangle} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle (-\lambda/\pi T)y, y \rangle} \psi(-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \langle (-\lambda/\pi T)y, y \rangle} \widehat{\psi}(y) dy = \frac{\pi^{n/2} e^{\pi i \sigma / 4}}{\lambda^{n/2} |\det T|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2 / \lambda i \langle T^{-1} \xi, \xi \rangle} \widehat{\psi}(\xi) d\xi, \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Desarrollamos ahora la función exponencial que aparece en el integrando por Taylor,

$$\begin{aligned} e^{-\pi^2 / \lambda i \langle T^{-1} \xi, \xi \rangle} &= \sum_{j=0}^N \frac{(-\pi^2 i \langle T^{-1} \xi, \xi \rangle)^j}{j! \lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{|\langle T^{-1} \xi, \xi \rangle|^{N+1}}{\lambda^{N+1}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{(-\pi^2 i \langle T^{-1} \xi, \xi \rangle)^j}{j! \lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hemos aplicado Cauchy-Schwarz. Sustituyendo en lo anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2/\lambda i \langle T^{-1}\xi, \xi \rangle} \widehat{\psi}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda^j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(-\pi^2 i \langle T^{-1}\xi, \xi \rangle)^j}{j!} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{O}\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}\right) \widehat{\psi}(\xi) d\xi, \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Estudiamos cada término por separado. Por la fórmula de inversión de Fourier, es inmediato

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot 0} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \psi(0),$$

y recordando como se comporta la transformada de Fourier con las derivadas, también se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(-\pi^2 i \langle T^{-1}\xi, \xi \rangle)^j}{j!} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D_j \psi}(\xi) d\xi = D_j \psi(0), \quad j = 1, \dots, N,$$

donde  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , denota un operador diferencial de orden  $2j$ , homogéneo y de coeficientes constantes. Finalmente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{O}\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}\right) \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2N+2} \widehat{\psi}(\xi) d\xi\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

puesto que  $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y, por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2N+2} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{\psi}(\xi) |\xi|^{2N+2} (1 + |\xi|)^{n+1}}{(1 + |\xi|)^{n+1}} d\xi \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|)^{n+1}} d\xi \lesssim 1.$$

□

Para poder considerar fases  $\phi$  más generales, no necesariamente cuadráticas, introducimos los siguientes resultados auxiliares.

**Lema 3.5** (Lema de Morse). Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty(\Omega)$  y  $x_0 \in \Omega$  verificando  $\nabla \phi(x_0) = 0$ . Supongamos que la matriz Hessiana

$$H_\phi(x_0) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1}^n$$

es invertible. Entonces, existe un único  $k \in \{1, \dots, n\}$ , entornos  $U$  y  $V$  de  $0$  y  $x_0$  respectivamente y un difeomorfismo  $G : U \rightarrow V$  de manera que  $G(0) = x_0$  y

$$\phi(G(y)) = \phi(x_0) + \sum_{j=1}^k y_j^2 - \sum_{j=k+1}^n y_j^2, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in U.$$

**Lema 3.6.** Sean  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\nabla \phi(x_0) = 0$  y  $G$  un difeomorfismo que cumple  $G(0) = x_0$ . Entonces, se tiene la siguiente relación entre las matrices Hessianas

$$H_{\phi \circ G}(0) = DG(0)^t H_\phi(x_0) DG(0).$$

Por tanto,  $H_\phi(x_0)$  y  $H_{\phi \circ G}(0)$  tienen la misma signatura y

$$\det(H_{\phi \circ G}(0)) = J_G(0)^2 \det(H_\phi(x_0)).$$

Ya tenemos las herramientas suficientes para abordar nuestro objetivo.

**Corolario 3.7.** Sean  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\nabla\phi(x_0) = 0$ ,  $H_\phi(x_0)$  invertible y  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  una función con soporte en un entorno suficientemente pequeño de  $x_0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \frac{i^k \pi^{n/2} e^{-\pi i n/4}}{\lambda^{n/2} \Delta^{1/2}} \left( \psi(x_0) + \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mathcal{D}}_j \psi(x_0)}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

siendo  $\Delta = 2^{-n} |\det(H_\phi(x_0))|$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , un operador diferencial de orden menor o igual que  $2j$ , homogéneo de coeficientes constantes que depende únicamente de  $\phi$ ; y las demás constantes implícitas dependen sólo de  $\phi$  y de un número finito de derivadas de  $\psi$ .

*Demostración.* Sea  $N \in \mathbb{N}$ . Por el Lema de Morse, Lema 3.5, sabemos que existen entornos  $U$  y  $V$  de  $0$  y  $x_0$  respectivamente, y un difeomorfismo  $G$  que aplica  $U$  en  $V$ , con  $G(0) = x_0$  y de manera que

$$\phi(G(y)) = \phi(x_0) + \sum_{j=1}^k y_j^2 - \sum_{j=k+1}^n y_j^2, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in U, \quad (19)$$

para cierto  $1 \leq k \leq n$ . Suponemos además,  $\text{sop}(\psi) \subset V$ . Haciendo el cambio de variables  $x = G(y)$  conseguimos

$$I(\lambda) = \int_V e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = e^{i\lambda\phi(x_0)} \int_U e^{i\lambda\langle Ty, y \rangle} \tilde{\psi}(y) dy, \quad \lambda > 0,$$

siendo

$$\tilde{\psi}(y) = \psi(G(y)) |J_G(y)| \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad y \in U,$$

y  $T = (T_{ij})_{i,j=1}^n$  la matriz diagonal dada por

$$T_{jj} = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq j \leq k \\ -1 & , \quad k+1 \leq j \leq n \end{cases}.$$

Observar que  $|\det(T)| = 1$  y la signatura de  $T$  es  $2k - n$ . El lema de Morse nos permite convertir la fase  $\phi$  en una función cuadrática. De esta manera podemos aplicar el Teorema 3.4,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \int_U e^{i\lambda\langle Ty, y \rangle} \tilde{\psi}(y) dy \\ &= e^{i\lambda\phi(x_0)} \frac{i^k \pi^{n/2} e^{-\pi i n/4}}{\lambda^{n/2}} \left( \tilde{\psi}(0) + \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{D}_j \tilde{\psi}(0)}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Falta determinar de manera más explícita quienes son los coeficientes anteriores. De la relación (19), es fácil ver que  $|\det(H_{\phi \circ G}(0))| = 2^n$ . En virtud del Lema 3.6 se tiene que

$$|J_G(0)| = \frac{|\det(H_{\phi \circ G}(0))|^{1/2}}{|\det(H_\phi(x_0))|^{1/2}} = \frac{1}{2^{-n/2} |\det(H_\phi(x_0))|^{1/2}} = \frac{1}{\Delta^{1/2}}.$$

Luego,  $\tilde{\psi}(0) = \psi(x_0)\Delta^{-1/2}$ . Sustituyendo en lo que teníamos,

$$I(\lambda) = e^{i\lambda\phi(x_0)} \frac{i^k \pi^{n/2} e^{-\pi i n/4}}{\lambda^{n/2} \Delta^{1/2}} \left( \psi(x_0) + \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{\mathcal{D}}_j \psi(x_0)}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

donde hemos llamado

$$\tilde{\mathcal{D}}_j \psi(x_0) = \Delta^{1/2} D_j \tilde{\psi}(0), \quad j = 1, \dots, N.$$

□

### 3.3. Análisis más fino del error

A grandes rasgos, en los apartados anteriores hemos obtenido

$$I(\lambda) - \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{\lambda^{\beta_j}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\beta_{N+1}}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad N \in \mathbb{N},$$

para ciertas sucesiones  $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  y  $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Es decir, sabemos aproximar la integral  $I(\lambda)$  por la suma de potencias de  $1/\lambda$  con un cierto error. En algunas aplicaciones (ver sección 4), necesitaremos saber de modo preciso cómo dependen los coeficientes y el error de la función  $\psi$ . En este sentido, la prueba que dimos en el Teorema 3.1 no arroja mucha luz al respecto (salvo quizá si  $N = 0$ ). Seguiremos pues la estrategia del Teorema 3.4 con un análisis más fino del término de error.

Por la experiencia que tenemos, la situación que merece la pena analizar en detalle es cuando la fase de la integral oscilatoria es de tipo cuadrática.

**Teorema 3.8.** *Sea  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Entonces, para todo  $\lambda > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx \\ &= \frac{\pi^{1/2} e^{\pi i/4}}{\lambda^{1/2}} \left( \psi(0) + \sum_{j=1}^N \frac{\psi^{(2j)}(0)}{j!} \left(\frac{i}{4\lambda}\right)^j + \frac{\mathcal{R}_N(\lambda)}{N!} \left(\frac{i}{4\lambda}\right)^{N+1} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

siendo

$$|\mathcal{R}_N(\lambda)| \leq C_N \|\psi^{(2N+2)}\|_{\infty}, \quad \lambda > 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

para cierta constante  $C_N > 0$  que sólo depende de  $N$ .

*Demostración.* Sean  $\lambda > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$ . Como consecuencia del Lema 3.3, tomando  $n = 1$  y  $T = -\lambda/\pi$ ,

$$\widehat{e^{i\lambda x^2}}(\xi) = \frac{\pi^{1/2} e^{\pi i/4}}{\lambda^{1/2}} e^{-\pi^2 i \xi^2 / \lambda}, \quad x, \xi \in \mathbb{R},$$

entendiendo la transformada de Fourier en sentido distribucional. Aplicando el teorema de inversión de Fourier y la identidad de Parseval sigue que

$$I(\lambda) = \frac{\pi^{1/2} e^{\pi i/4}}{\lambda^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2 i \xi^2 / \lambda} \widehat{\psi}(\xi) d\xi.$$

Si  $f$  es una función suficientemente regular, recordamos que su desarrollo en serie de Taylor viene dado por

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^N \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \frac{z^{N+1}}{N!} R_N(z)$$

donde

$$R_N(z) = \int_0^1 f^{(N+1)}(sz)(1-s)^N ds.$$

En particular, si tomamos  $f$  la función exponencial y el punto  $z = -\pi^2 i \xi^2 / \lambda$ , se tiene que

$$e^{-\pi^2 i \xi^2 / \lambda} = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{j!} \left( \frac{i}{4\lambda} \right)^j (2\pi i \xi)^{2j} + \frac{1}{N!} \left( \frac{i}{4\lambda} \right)^{N+1} (2\pi i \xi)^{2N+2} R_N \left( \frac{-\pi^2 i}{\lambda} \xi^2 \right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo en lo anterior y recordando que  $(2\pi i \xi)^k \widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi^{(k)}}(\xi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , conseguimos (20), donde hemos llamado

$$\mathcal{R}_N(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 e^{-\pi^2 i \xi^2 s / \lambda} (1-s)^N ds \right) \widehat{\psi^{(2N+2)}}(\xi) d\xi.$$

Para terminar debemos ver que  $\mathcal{R}_N$  verifica la estimación (21). Usando nuevamente Parseval, podemos escribir

$$\mathcal{R}_N(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \psi^{(2N+2)}(x) dx,$$

donde  $g_\lambda$  representa la transformada de Fourier

$$g_\lambda(x) = \left( \int_0^1 e^{-\pi^2 i \xi^2 s / \lambda} (1-s)^N ds \right)^\wedge(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definimos la función

$$h(\xi) = \int_0^1 e^{-i \xi^2 s} (1-s)^N ds, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Por las propiedades de escala de la transformada de Fourier, es claro que,

$$g_\lambda(x) = h \left( \frac{\pi}{\lambda^{1/2}} \xi \right)^\wedge(x) = \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \widehat{h} \left( \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} x \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_N(\lambda)| &\leq \|\psi^{(2N+2)}\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g_\lambda(x)| dx = \|\psi^{(2N+2)}\|_\infty \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h} \left( \frac{\lambda^{1/2}}{\pi} x \right) dx \\ &= \|\psi^{(2N+2)}\|_\infty \|\widehat{h}\|_1. \end{aligned}$$

Si vemos  $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$  concluimos esta prueba.

Para cada  $R > 0$  y  $\xi \neq 0$  el teorema de los residuos nos dice que

$$\overline{h(\xi)} = \int_0^1 F(s) ds = - \int_{\gamma_R^1} F(z) dz - \int_{\gamma_R^2} F(z) dz + \int_{\gamma_R^3} F(z) dz,$$

siendo  $F(z) = e^{i \xi^2 z} (1-z)^N$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , y

- $\gamma_R^1 = \{z = 1 + is : s \in [0, R]\}$ ,
- $\gamma_R^2 = \{z = s + iR : s \in [0, 1]\}$ ,
- $\gamma_R^3 = \{z = is : s \in [0, R]\}$ .

Observamos que

$$\left| \int_{\gamma_R^2} F(z) dz \right| \leq (1 + R^2)^{N/2} e^{-R\xi^2} \longrightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad \xi \neq 0.$$

Haciendo  $R \rightarrow \infty$ , conseguimos

$$\begin{aligned} \bar{h}(\xi) &= i \int_0^\infty F(is) ds - i \int_0^\infty F(1 + is) ds \\ &= i \int_0^\infty e^{-\xi^2 s} (1 - is)^N ds - ie^{i\xi^2} \int_0^\infty e^{-\xi^2 s} (-is)^N ds \\ &= - \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} (-i)^{j+1} \int_0^\infty e^{-\xi^2 s} s^j ds + (-i)^{N+1} e^{i\xi^2} \int_0^\infty e^{-\xi^2 s} s^N ds \\ &= - \sum_{j=0}^N \frac{\alpha_j}{\xi^{2j+2}} + \frac{\alpha_N e^{i\xi^2}}{\xi^{2N+2}}, \quad \xi \neq 0, \end{aligned} \tag{22}$$

siendo los coeficientes  $\alpha_j = (-i)^{j+1} j!$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Deducimos de aquí,

$$h(\xi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad |\xi| > 1.$$

Además, por ser  $h$  una función acotada,

$$h(\xi) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{1 + \xi^2}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,  $h \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\hat{h}$  está bien definida y es acotada. Para conseguir  $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$  podemos probar  $h'' \in L^1(\mathbb{R})$ , puesto que

$$|(2\pi ix)^2 \hat{h}(x)| = |\hat{h}''(x)| \leq \|h''\|_1 \lesssim 1,$$

implica  $\hat{h} = \mathcal{O}(1/x^2)$ . Calculamos entonces  $h''$ . En virtud de (22) tenemos que

$$h'(\xi) = \sum_{j=0}^N \frac{\bar{\alpha}_j (2j + 2)}{\xi^{2j+3}} - \frac{\bar{\alpha}_N 2ie^{-i\xi^2}}{\xi^{2N+1}} - \frac{\bar{\alpha}_N (2N + 2)e^{-i\xi^2}}{\xi^{2N+3}}, \quad \xi \neq 0,$$

y

$$\begin{aligned} h''(\xi) &= - \sum_{j=0}^N \frac{\bar{\alpha}_j (2j + 2)(2j + 3)}{\xi^{2j+4}} + \frac{\bar{\alpha}_N 4e^{-i\xi^2}}{\xi^{2N}} + \frac{\bar{\alpha}_N 2i(2N + 1)e^{-i\xi^2}}{\xi^{2N+2}} \\ &\quad + \frac{\bar{\alpha}_N (2N + 2)2ie^{-i\xi^2}}{\xi^{2N+2}} + \frac{\bar{\alpha}_N (2N + 2)(2N + 3)e^{-i\xi^2}}{\xi^{2N+4}}, \quad \xi \neq 0. \end{aligned}$$

En resumen,

$$h''(\xi) = \mathcal{O}\left(\xi^{-\min\{4, 2N\}}\right), \quad |\xi| > 1.$$

Para  $N \geq 1$  ya tenemos garantizado  $h'' \in L^1(\mathbb{R})$ . La situación  $N = 0$  debemos estudiarla siguiendo otra estrategia. Veamos directamente  $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ , pues en esta ocasión resulta sencillo calcular esta transformada de Fourier explícitamente. Para cada  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , aplicando Parseval y Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} h(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 e^{-i\xi^2 s} ds \right) \widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi^2 s} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi ds \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \widehat{e^{-i\xi^2 s}}(x)\varphi(x)dx ds = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 \widehat{e^{-i\xi^2 s}}(x)ds \right) \widehat{\varphi}(x)dx. \end{aligned}$$

Por tanto, en virtud del Lema 3.3,

$$\widehat{h}(x) = \int_0^1 \widehat{e^{-i\xi^2 s}}(x)ds = \pi^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^1 e^{i\pi^2 x^2/s} \frac{ds}{s^{1/2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Haciendo el cambio de variables  $\pi^2 x^2/s = u$  e integrando por partes

$$\begin{aligned} |\widehat{h}(x)| &= \left| \pi^{3/2} x \int_{\pi^2 x^2}^{\infty} e^{iu} u^{-3/2} du \right| = \pi^{3/2} |x| \left| \frac{3}{2} \int_{\pi^2 x^2}^{\infty} e^{iu} u^{-5/2} du - e^{i\pi^2 x^2} (\pi x)^{-3} \right| \\ &\lesssim \frac{1}{|x|^2}, \quad |x| \geq 1. \end{aligned}$$

Concluimos así  $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ , pues recordamos  $\widehat{h}$  es una función acotada.  $\square$

En las aplicaciones resulta útil disponer de un resultado en donde el rango de integración sea un intervalo  $(a, b)$ . Como la función  $\psi$  no tiene por qué anularse en las proximidades de los extremos de este intervalo, estos puntos influyen en la expansión asintótica, como se aprecia a continuación.

**Corolario 3.9.** Sean  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  y  $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_a^b e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx \\ &= \frac{\pi^{1/2} e^{i\pi/4}}{\lambda^{1/2}} \left( \psi(0) + \sum_{j=1}^N \frac{\psi^{(2j)}(0)}{j!} \left( \frac{i}{4\lambda} \right)^j + \frac{\mathcal{R}_N(\lambda)}{N!} \left( \frac{i}{4\lambda} \right)^{N+1} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^M \left[ -\frac{e^{i\lambda x^2}}{x} D^{j-1} \psi(x) \right]_a^b \left( \frac{i}{2\lambda} \right)^j + \mathcal{S}_M(\lambda) \left( \frac{i}{2\lambda} \right)^{M+1}, \quad \lambda > 0, \quad N, M \in \mathbb{N}, \quad (23) \end{aligned}$$

siendo  $D$  el operador diferencial  $D = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \cdot \right)$ ,

$$|\mathcal{R}_N(\lambda)| \leq C_{a,b,N} \sum_{j=0}^{2N+2} \|\psi^{(j)}\|_{\infty}, \quad \lambda > 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

y

$$|\mathcal{S}_M(\lambda)| \leq C_{a,b,M} \sum_{j=0}^{M+1} \|\psi^{(j)}\|_{\infty}, \quad \lambda > 0, \quad M \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

*Demostración.* Fijamos  $\lambda > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$  y elegimos  $\varphi \in C_0^\infty(a/2, b/2)$  de manera que  $0 \leq \varphi \leq 1$  y  $\varphi(x) = 1$ ,  $x \in [a/4, b/4]$ . Podemos escribir

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda x^2} \psi(x) \varphi(x) dx + \int_a^b e^{i\lambda x^2} \psi(x) (1 - \varphi(x)) dx = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

Los primeros términos que aparecen en (23) los conseguimos aplicando el Teorema 3.8 a la integral  $I_1$ . Observar que  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi^{(k)}(0) = 0$ ,  $1 \leq k \leq 2j$ , y

$$|\mathcal{R}_N(\lambda)| \leq C_N \|(\psi\varphi)^{(2N+2)}\|_\infty \leq C_N \sum_{j=0}^{2N+2} \|\psi^{(j)} \varphi^{(2N+2-j)}\|_\infty \leq C_{a,b,N} \sum_{j=0}^{2N+2} \|\psi^{(j)}\|_\infty.$$

Por otro lado, nos damos cuenta de que el integrando en  $I_2$  se anula en un entorno del origen, por tanto, esta integral no tiene fase estacionaria. Por esta razón está permitido integrar por partes (ver demostración Proposición 2.1), teniendo en cuenta los términos de borde. Integrando  $M+1$  veces por partes,

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \sum_{j=1}^{M+1} \left[ -\frac{e^{i\lambda x^2}}{x} D^{j-1} \{\psi(x)(1 - \varphi(x))\} \right]_a^b \left( \frac{-1}{2i\lambda} \right)^j \\ &\quad + \left( \frac{-1}{2i\lambda} \right)^{M+1} \int_a^b e^{i\lambda x^2} D^{M+1} \{\psi(x)(1 - \varphi(x))\} dx \\ &= \sum_{j=1}^M \left[ -\frac{e^{i\lambda x^2}}{x} D^{j-1} \psi(x) \right]_a^b \left( \frac{i}{2\lambda} \right)^j + \mathcal{S}_M(\lambda) \left( \frac{i}{2\lambda} \right)^{M+1}, \end{aligned}$$

donde llamamos

$$\mathcal{S}_M(\lambda) = \left[ -\frac{e^{i\lambda x^2}}{x} D^M \psi(x) \right]_a^b + \int_a^b e^{i\lambda x^2} D^{M+1} \{\psi(x)(1 - \varphi(x))\} dx.$$

En lo anterior hemos aplicado

$$D^k \{\psi(x)(1 - \varphi(x))\} = D^k \psi(x), \quad x = a, b, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Recordando que  $\text{sop}(\varphi) \subset (a, b)$ , esta propiedad se deduce sin dificultad por inducción. A partir de la expresión de  $\mathcal{S}_M(\lambda)$ , también es inmediato comprobar que la acotación (25) se satisface.  $\square$

Existe una generalización del Teorema 3.8 para fases  $\phi$  no necesariamente cuadráticas debida a Hörmander ([16, Teorema 7.7.5, p. 220]). Aunque originalmente es un resultado  $n$ -dimensional por simplicidad lo enunciamos para funciones en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.10.** *Sea  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  y  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  verificando  $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ ,  $\phi''(x_0) \neq 0$ , para cierto  $x_0 \in \text{sop}(\psi)$  y  $\phi'(x) \neq 0$ ,  $x \in \text{sop}(\psi)$ . Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx = e^{i\lambda\phi(x_0)} \left( \frac{2\pi i}{\lambda\phi''(x_0)} \right)^{1/2} \sum_{j=0}^N \frac{\mathcal{D}_j \psi(x_0)}{\lambda^j} + \frac{\mathcal{R}_N(\lambda)}{\lambda^{N+1}}, \quad \lambda > 0, \quad N \in \mathbb{N},$$

siendo

$$|\mathcal{R}_N(\lambda)| \leq C_N \sum_{j=0}^{2N+2} \|\psi^{(j)}\|_\infty, \quad \lambda > 0, \quad N \in \mathbb{N},$$

y  $\mathcal{D}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , un operador diferencial de orden  $2j$  que depende de  $\phi$ .



No detallamos aquí su demostración, pero si es interesante destacar que en ella no se recurre el lema de Morse para reducirse a la situación más simple de fase cuadrática. Para más detalles ver [16, Teorema 7.7.1, p. 216].



## 4. APLICACIONES A LAS FUNCIONES DE BESSEL

Para cada  $\nu \in \mathbb{R}$  consideramos la ecuación diferencial

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2) u(x) = 0. \quad (26)$$

Es común llamar a (26) *ecuación de Bessel de orden  $\nu$* . Ésta surge de manera natural al tratar con problemas de contorno en teoría de potencial para dominios cilíndricos ([17, Capítulo 6]). Estamos interesados en estudiar una solución particular de (26), las funciones de Bessel de orden  $\nu$ , que denotamos por  $J_\nu(x)$ . Dichas funciones tienen multitud de aplicaciones en ingeniería, física, astronomía, teoría de números y análisis matemático.

Comenzamos esta sección definiendo, como es habitual en la literatura, las funciones de Bessel a través de una serie de potencias. En general, una expresión de este tipo nos da sólo información local, pero poca información global sobre  $J_\nu(x)$ . A continuación veremos que las funciones de Bessel también se pueden representar mediante una integral oscilatoria, lo que nos permitirá poner en marcha toda la teoría que hemos desarrollado con anterioridad.

### 4.1. Serie de potencias

Definimos la función de Bessel de orden  $\nu \in \mathbb{R}$ , como sigue

$$J_\nu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{\nu+2j} j! \Gamma(j + \nu + 1)} \lambda^{\nu+2j}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

donde para valores negativos (no enteros) la función  $\Gamma$  viene dada por la siguiente relación [17, (1.2.2) p. 3]

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z) \sin(\pi z)}, \quad z < 0, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

De esta expresión se deduce que  $\Gamma(z) \rightarrow \pm\infty$ ,  $z \rightarrow m$ , siendo  $m$  un entero negativo.

Debemos comprobar que la serie (27) verifica la ecuación (26). Para simplificar la notación escribimos

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{2^{\nu+2j} j! \Gamma(j + \nu + 1)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

para referirnos a los coeficientes en (27). Derivando obtenemos

$$J'_\nu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\nu + 2j) \lambda^{\nu+2j-1}$$

y

$$J''_\nu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j (\nu + 2j)(\nu + 2j - 1) \lambda^{\nu+2j-2}.$$

Observar que podemos derivar término a término porque no es difícil ver que las series resultantes son uniformemente convergente sobre compactos. Luego,

$$\begin{aligned} & \lambda^2 J''_\nu(\lambda) + \lambda J'_\nu(\lambda) + (\lambda^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \{ (\nu + 2j)(\nu + 2j - 1) + (\nu + 2j) + (\lambda^2 - \nu^2) \} \lambda^{\nu+2j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \{(\nu + 2j)(\nu + 2j - 1) + (\nu + 2j) - \nu^2\} \lambda^{\nu+2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^{\nu+2j+2} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 4j(j + \nu) \lambda^{\nu+2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \lambda^{\nu+2j+2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \{\alpha_{j+1} 4(j + 1)(j + \nu + 1) + \alpha_j\} \lambda^{\nu+2j+2} = 0,
\end{aligned}$$

puesto que el coeficiente  $\alpha_{j+1} 4(j + 1)(j + \nu + 1) + \alpha_j$  es siempre nulo.

## 4.2. Representación integral

Establecemos primero una representación integral para las funciones de Bessel cuando el parámetro  $\nu$  es un número entero. Para ello nos apoyamos en el siguiente lema.

**Lema 4.1** (Función generadora).

$$e^{\lambda/2(z-1/z)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(\lambda) z^m, \quad 0 < |z| < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

con convergencia uniforme sobre compactos de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

La prueba es sencilla. Basta expandir en serie de Taylor las exponenciales  $e^{\lambda z/2}$ ,  $e^{-\lambda/2z}$  y multiplicarlas entre sí (ver [17, p. 100-101]).

**Proposición 4.2.**

$$J_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-imx} dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

*Demostración.* Fijamos  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $z \in \mathbb{C}$  es un vector unitario, existe  $x \in [0, 2\pi]$  de manera que  $z = e^{ix}$ . Con esta elección de  $z$  aplicamos el Lema 4.1 y obtenemos

$$e^{i\lambda \sin x} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(\lambda) e^{imx}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Como la convergencia es uniforme,  $J_m(\lambda)$  coincide con el  $m$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $e^{i\lambda \sin x}$ , y por tanto se tiene (28).  $\square$

Conseguimos ahora una representación integral para valores del parámetro  $\nu > -1/2$ .

**Proposición 4.3.**

$$J_\nu(\lambda) = \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1 - x^2)^{\nu-1/2} dx, \quad \nu > -1/2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

*Demostración.* Recordamos como se define la función beta

$$\beta(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt, \quad a, b > 0,$$

y cual es su relación con la función gamma

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Haciendo el cambio de variables  $t = x^2$ , podemos escribir

$$\beta(a, b) = 2 \int_0^1 x^{2(a-1/2)}(1-x^2)^{b-1} dx = \int_{-1}^1 x^{2(a-1/2)}(1-x^2)^{b-1} dx, \quad a, b > 0. \quad (30)$$

En particular, si elegimos  $a = j + 1/2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , y  $b = \nu + 1/2$ ,  $\nu > -1/2$ ,

$$\frac{\Gamma(j+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(j+\nu+1)} = \int_{-1}^1 x^{2j}(1-x^2)^{\nu-1/2} dx.$$

Expresamos así el factor que aparece en (27),  $1/\Gamma(j+\nu+1)$ , mediante una integral. Sea  $\nu > -1/2$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sustituyendo en la expresión para  $J_\nu(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} J_\nu(\lambda) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^{\nu+2j}}{2^{\nu+2j} j! \Gamma(j+1/2) \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 x^{2j} (1-x^2)^{\nu-1/2} dx \\ &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (\lambda x)^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(j+1/2)} dx \\ &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (\lambda x)^{2j}}{(2j)!} dx \\ &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} \cos(\lambda x) dx \\ &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1-x^2)^{\nu-1/2} dx. \end{aligned}$$

Hemos aplicado

$$2^{2j} j! \Gamma(j+1/2) = \sqrt{\pi} (2j)!, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Esta igualdad se comprueba por inducción, teniendo en cuenta la propiedad fundamental de la función gamma,  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Observar que podemos intercambiar la integral con la serie, pues ésta converge uniformemente sobre compactos.  $\square$

Es también posible demostrar que las representaciones integrales en (28) y (29) coinciden sin pasar por la serie de potencias en (27). A continuación damos una demostración de este hecho que a veces se utiliza en la literatura (ver [23, p. 338] y [25, Lema 3.1, p. 153]).

**Proposición 4.4.** *Si  $J_m(\lambda)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , y  $\mathcal{J}_\nu(\lambda)$ ,  $\nu > -1/2$ , denotan las funciones definidas en (28) y (29) respectivamente, entonces,*

$$J_k(\lambda) = \mathcal{J}_k(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

*Demostración.* Haciendo el cambio de variables  $\sin x = t$ , es claro que

$$\begin{aligned} J_0(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \right) e^{i\lambda \sin x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^1 + \int_{-1}^0 \right) e^{i\lambda t} (1-t^2)^{-1/2} dt = \mathcal{J}_0(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Además,  $J_k(0) = \mathcal{J}_k(0) = 0$ , si  $k \neq 0$ , trivialmente. Si probamos

$$(i) \quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{-k} J_k(\lambda)) = -\lambda^{-k} J_{k+1}(\lambda), \quad \lambda \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}; \text{ y}$$

$$(ii) \quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{-k} \mathcal{J}_k(\lambda)) = -\lambda^{-k} \mathcal{J}_{k+1}(\lambda), \quad \lambda \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

entonces,

$$-J_1(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(J_0(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda}(\mathcal{J}_0(\lambda)) = -\mathcal{J}_1(\lambda), \quad \lambda \neq 0.$$

Por tanto,  $J_1 = \mathcal{J}_1$ . Procediendo de manera recursiva se obtiene (31).

Tomamos  $\lambda \neq 0$  y  $k \in \mathbb{N}$ . Veamos primero (i). Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{-k} J_k(\lambda)) &= -\lambda^{-k} \left\{ \frac{k}{\lambda} J_k(\lambda) - J'_k(\lambda) \right\} \\ &= -\frac{\lambda^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-ikx} \left( \frac{k}{\lambda} - i \sin x \right) dx \\ &= -\frac{\lambda^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-ikx} \left( \frac{k}{\lambda} + e^{-ix} - \cos x \right) dx \\ &= -\lambda^{-k} J_{k+1}(\lambda), \end{aligned}$$

pues

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-ikx} \left( \frac{k}{\lambda} - \cos x \right) dx = \frac{i}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda \sin x} e^{-ikx}) dx = 0.$$

Probamos ahora (ii). Integrando por partes y teniendo en cuenta propiedades de simetría y paridad,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{-k} \mathcal{J}_k(\lambda)) &= \frac{i}{2^k \sqrt{\pi} \Gamma(k+1/2)} \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} x (1-x^2)^{k-1/2} dx \\ &= -\frac{2}{2^k \sqrt{\pi} \Gamma(k+1/2)} \int_0^1 \sin(\lambda x) x (1-x^2)^{k-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2^k \sqrt{\pi} \Gamma(k+1/2)} \int_0^1 \sin(\lambda x) \frac{d}{dx} \left( \frac{(1-x^2)^{k+1/2}}{k+1/2} \right) dx \\ &= \frac{-\lambda}{2^k \sqrt{\pi} \Gamma(k+3/2)} \int_0^1 \cos(\lambda x) (1-x^2)^{k+1/2} dx \\ &= \frac{-\lambda}{2^{k+1} \sqrt{\pi} \Gamma(k+3/2)} \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1-x^2)^{k+1/2} dx \\ &= -\lambda^{-k} \mathcal{J}_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

□

### 4.3. Cotas superiores y desarrollos asintóticos

En las Figuras 1, 2 y 3 hemos representado gráficamente  $J_0$ ,  $J_{3/2}$  y  $J_{50}$ . En ellas se aprecia muy claro el carácter oscilatorio de estas funciones de Bessel. Observamos también que decaen a cero a medida que aumenta el parámetro  $\lambda$ . Estas propiedades cualitativas difícilmente se deducen de una representación en serie como (27), de ahí la importancia de (28) y (29). Dedicamos este apartado a precisar analíticamente este decaimiento que se intuye en los dibujos. Para ello emplearemos las técnicas expuestas en las secciones 2 y 3.

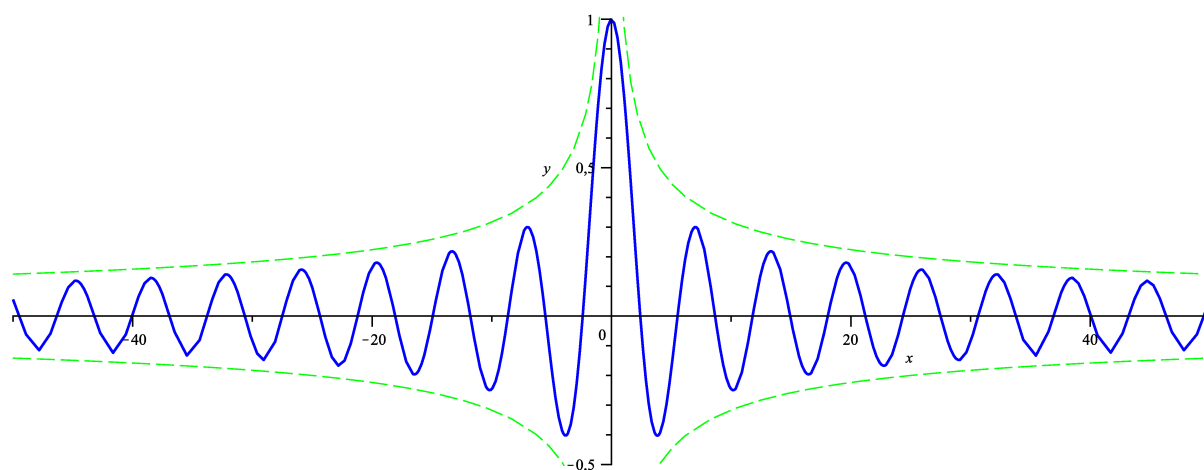


Figura 1:  $J_0(\lambda)$

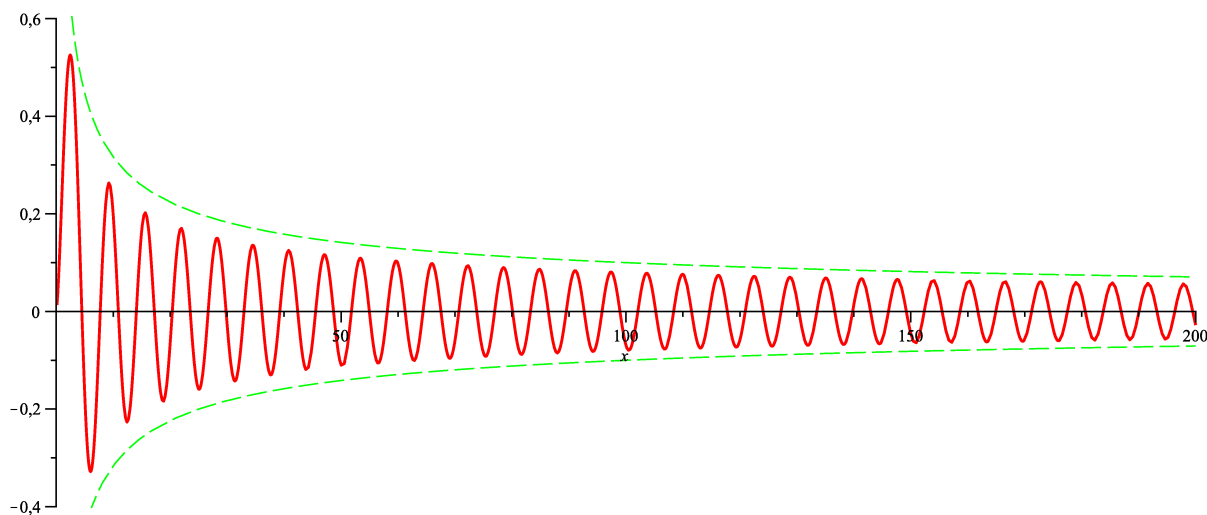
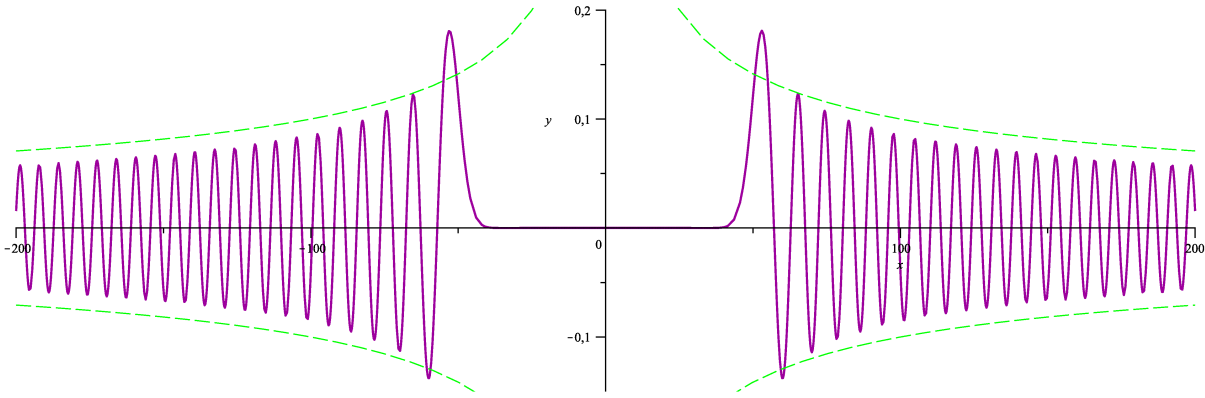


Figura 2:  $J_{3/2}(\lambda)$

Figura 3:  $J_{50}(\lambda)$ 

En estas gráficas hemos marcado en línea verde discontinua las curvas  $\pm|\lambda|^{-1/2}$ . Estas funciones son relevantes como mostramos seguidamente, pues determinan el decaimiento principal de las funciones de Bessel. Empezamos con un resultado sencillo.

**Propiedad 4.5.**

$$J_m(\lambda) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right), \quad m \in \mathbb{Z}, \lambda \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Como es de esperar trabajaremos con la representación (28). Ya que la derivada de la fase se anula en  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ , debemos aislar dichos puntos, según explicamos en la introducción. Con este fin, consideramos funciones  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , verificando

- $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 1$ , y  $0 \leq \psi_j \leq 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;
- $\text{sop}(\psi_1), \text{sop}(\psi_2)$  contenidos en entornos suficientemente pequeños de  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ ;
- $\psi_1 \equiv 1, \psi_2 \equiv 1$  en un entorno reducido de  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ , respectivamente;
- $\pi/2, 3\pi/2 \notin \text{sop}(\psi_3)$ .

Podemos escribir

$$J_m(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_1 \phi_1(x)} \tilde{\psi}_1(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_2 \phi_2(x)} \tilde{\psi}_2(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} \tilde{\psi}_3(x) dx,$$

siendo

$$m_j = \min_{\text{sop}(\psi_j)} |\sin x|, \quad \lambda_j = \lambda m_j, \quad \phi_j = \sin(x)/m_j, \quad j = 1, 2,$$

y  $\tilde{\psi}_j = e^{-imx} \psi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Con esta elección particular de las funciones se tiene que

$$|\phi_j^{(2)}(x)| \geq 1, \quad x \in \text{sop}(\psi_j), \quad j = 1, 2.$$

Por tanto, podemos aplicar el Corolario 2.3 a las dos primeras integrales, y obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_j \phi_j(x)} \tilde{\psi}_j(x) dx \right| \leq \frac{C(m_j)}{\lambda^{1/2}}, \quad j = 1, 2.$$



Para estimar la tercera integral acudimos a la Proposición 2.1,

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} \tilde{\psi}_3(x) dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^N}\right), \quad N \in \mathbb{N}, \lambda \rightarrow \infty,$$

pues  $\cos x \neq 0$ ,  $x \in \text{sop}(\psi_3)$ . □

Si lo que buscamos es un término principal más un error, podemos aplicar el método de la fase estacionaria (Teorema 3.1).

#### Propiedad 4.6.

$$J_m(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad m \in \mathbb{Z}, \lambda \rightarrow \infty. \quad (32)$$

*Demostración.* Fijamos  $m \in \mathbb{Z}$  y elegimos una partición de la unidad  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  como en la prueba de la Propiedad 4.5. Escribimos ahora

$$J_m(\lambda) = \frac{e^{i\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\phi_1(x)} \tilde{\psi}_1(x) dx + \frac{e^{-i\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\phi_2(x)} \tilde{\psi}_2(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} \tilde{\psi}_3(x) dx,$$

siendo esta vez,  $\phi_j = \sin x + (-1)^j$ ,  $j = 1, 2$ , y  $\tilde{\psi}_j = e^{-imx} \psi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . La tercera de estas integrales tiene un decaimiento muy bueno (Proposición 2.1). Por simetría, basta analizar con detalle la primera integral. Es claro que se verifican las hipótesis del Teorema 3.1,

$$\phi_1(\pi/2) = \phi_1'(\pi/2) = 0, \quad \phi_1''(\pi/2) = -1 \neq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\phi_1(x)} \tilde{\psi}_1(x) dx &= \frac{e^{i\lambda}}{2\pi} \left\{ \frac{a_0}{\lambda^{1/2}} + \frac{a_1}{\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \right\} \\ &= \frac{e^{i\lambda}}{2\pi\lambda^{1/2}} \left( \frac{2\pi}{-i\phi_1''(\pi/2)} \right)^{1/2} \tilde{\psi}_1(\pi/2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= \frac{e^{i\lambda}}{2\pi\lambda^{1/2}} \left( \frac{2\pi}{i} \right)^{1/2} e^{-im\pi/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \frac{e^{i(\lambda - \pi m/2 - \pi/4)}}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Recordar que en (15) vimos cuanto valía explícitamente la constante  $a_0$  y razonamos por qué  $a_1 = 0$ . Análogamente,

$$\frac{e^{-i\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\phi_2(x)} \tilde{\psi}_2(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \frac{e^{-i(\lambda - \pi m/2 - \pi/4)}}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Sumando lo obtenido conseguimos (32). □

En las aplicaciones a menudo se trabaja con funciones de Bessel cuyo parámetro  $\nu$  es un semientero positivo. Para esta situación tenemos la siguiente fórmula exacta.

**Propiedad 4.7.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$J_{k+1/2}(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \left( \cos \lambda \sum_{j=0}^{k/2-1} \frac{a_{2j+1,k}}{\lambda^{2j+1}} + i \sin \lambda \sum_{j=0}^{k/2} \frac{a_{2j,k}}{\lambda^{2j}} \right) & , \quad k \text{ par} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \left( \cos \lambda \sum_{j=0}^{(k-1)/2} \frac{a_{2j,k}}{\lambda^{2j}} + i \sin \lambda \sum_{j=0}^{(k+1)/2} \frac{a_{2j+1,k}}{\lambda^{2j+1}} \right) & , \quad k \text{ impar} \end{cases}$$

donde

$$a_{j,k} = \frac{-i^{k+j+1}}{2^k} \sum_{r=(j+k)/2}^k \frac{(-1)^r (2r)!}{(2r-k-j)! r! (k-r)!}, \quad j = 0, \dots, k.$$

*Demostración.* Suponemos sin pérdida de generalidad que  $k$  es par. Integramos  $k$  veces por partes la expresión (29),

$$\begin{aligned} \frac{2^{k+1/2} \sqrt{\pi} k!}{\lambda^{k+1/2}} J_{k+1/2}(\lambda) &= \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1-x^2)^k dx \\ &= \left( \frac{-1}{i\lambda} \right)^k \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} \frac{d^k}{dx^k} [(1-x^2)^k] dx \\ &= i^k \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} \frac{d^k}{dx^k} \left[ \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r x^{2r} \right] dx \\ &= i^k \sum_{r=\lceil k/2 \rceil}^k \binom{k}{r} (-1)^r \frac{(2r)!}{(2r-k)!} \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} x^{2r-k} dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Tenemos que calcular cada una de estas nuevas integrales. Para ello definimos

$$I_l(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} x^l dx, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que

$$I_l(\lambda) = \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j l!}{(l-j)!} \frac{e^{i\lambda} - (-1)^{l-j} e^{-i\lambda}}{(i\lambda)^{j+1}}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

En efecto, (34) es válida para  $l = 0$ . Suponemos que esta identidad también se verifica para  $l - 1$ . Integrando por partes y haciendo uso de la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} I_l(\lambda) &= \frac{-l}{i\lambda} I_{l-1}(\lambda) + \frac{e^{i\lambda} - (-1)^l e^{-i\lambda}}{(i\lambda)} \\ &= \frac{-l}{i\lambda} \left( \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^j (l-1)!}{(l-j-1)!} \frac{e^{i\lambda} - (-1)^{l-j-1} e^{-i\lambda}}{(i\lambda)^{j+1}} \right) + \frac{e^{i\lambda} - (-1)^l e^{-i\lambda}}{(i\lambda)} \\ &= \sum_{j=0}^l \frac{(-1)^j l!}{(l-j)!} \frac{e^{i\lambda} - (-1)^{l-j} e^{-i\lambda}}{(i\lambda)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Probamos así (34). Sustituyendo en (33),

$$\begin{aligned}
 J_{k+1/2}(\lambda) &= \frac{i^k \lambda^{1/2}}{2^{k+1/2} \sqrt{\pi} k!} \sum_{r=\lceil k/2 \rceil}^k \binom{k}{r} (-1)^r \frac{(2r)!}{(2r-k)!} I_{2r-k}(\lambda) \\
 &= \frac{i^k \lambda^{1/2}}{2^{k+1/2} \sqrt{\pi} k!} \sum_{r=\lceil k/2 \rceil}^k \binom{k}{r} (-1)^r \frac{(2r)!}{(2r-k)!} \sum_{j=0}^{2r-k} \frac{(-1)^j (2r-k)! e^{i\lambda} - (-1)^{-k-j} e^{-i\lambda}}{(2r-k-j)! (i\lambda)^{j+1}} \\
 &= \frac{i^k \lambda^{1/2}}{2^{k+1/2} \sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^k \sum_{r=(j+k)/2}^k \frac{(-1)^{j+r} (2r)!}{(2r-k-j)! r! (k-r)!} \frac{e^{i\lambda} - (-1)^{-k-j} e^{-i\lambda}}{(i\lambda)^{j+1}} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{e^{i\lambda} - (-1)^{-k-j} e^{-i\lambda}}{\lambda^j} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \cos \lambda \sum_{j=0}^{k/2-1} \frac{a_{2j+1,k}}{\lambda^{2j+1}} + i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sin \lambda \sum_{j=0}^{k/2} \frac{a_{2j,k}}{\lambda^{2j}}
 \end{aligned}$$

siendo

$$a_{j,k} = \frac{-i^{k+j+1}}{2^k} \sum_{r=(j+k)/2}^k \frac{(-1)^r (2r)!}{(2r-k-j)! r! (k-r)!}, \quad j = 0, \dots, k.$$

□

Con un poco más de trabajo, también podemos calcular un desarrollo asintótico completo para las funciones de Bessel.

**Propiedad 4.8.** Sea  $\nu > -1/2$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 J_\nu(\lambda) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \cos \left( \lambda - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\lambda^{2j}} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sin \left( \lambda - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{\lambda^{2j+1}}, \quad \lambda \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{35}$$

siendo

$$a_j = \frac{(-1)^j \Gamma(\nu + 2j + 1/2)}{2^{2j} (2j)! \Gamma(\nu - 2j + 1/2)} \quad y \quad b_j = \frac{(-1)^j \Gamma(\nu + 2j + 3/2)}{2^{2j+1} (2j+1)! \Gamma(\nu - 2j - 1/2)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Cuando el parámetro  $\nu$  es un número entero negativo, también se tiene un desarrollo similar. Basta tener presente la relación

$$J_{-m}(\lambda) = (-1)^m J_m(\lambda), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que se puede probar directamente a partir de (27).

*Demostración.* Fijamos  $\nu > -1/2$ . Deduciremos (35) como consecuencia de la Proposición 3.2. Para ello debemos escribir la integral (29) como en el enunciado de dicha Proposición. Elegimos  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  verificando

- $0 \leq \psi_j \leq 1$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;

- $\text{sop}(\psi_1) \subset (0, 2)$  y  $\psi_1(x) = 1$ ,  $x \in [1/2, 3/2]$ ;
- $\psi_2(x) = \psi_1(-x)$ ;
- $\text{sop}(\psi_3) \subset (-1, 1)$  y  $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 1$ , en  $[-1, 1]$ .

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned}
 J_\nu(\lambda) &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left\{ \int_0^1 e^{i\lambda x} (1-x^2)^{\nu-1/2} \psi_1(x) dx + \int_{-1}^0 e^{i\lambda x} (1-x^2)^{\nu-1/2} \psi_2(x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1-x^2)^{\nu-1/2} \psi_3(x) dx \right\} \\
 &= \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \{I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda)\}. \tag{36}
 \end{aligned}$$

Observar que  $I_2$  es la integral conjugada de  $I_1$ . Además, ya que  $(1-x^2)^{\nu-1/2} \psi_3(x) \in C_0^\infty(-1, 1)$ ,  $I_3$  decae como cualquier potencia negativa de  $\lambda$  (Proposición 2.1). Estudiamos entonces  $I_1$ . Haciendo el cambio de variables  $y = 1 - x$  conseguimos

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda(1-y)} y^{\nu-1/2} (2-y)^{\nu-1/2} \psi_1(1-y) dy = e^{i\lambda} \int_0^\infty e^{-i\lambda y} \tilde{\psi}_1(y) y^{\nu-1/2} dy,$$

siendo  $\tilde{\psi}_1(y) = (2-y)^{\nu-1/2} \psi_1(1-y) \in C_0^\infty(-1, 1)$ . Ahora sí que podemos aplicar la Proposición 3.2. Obtenemos,

$$I_1(\lambda) = \frac{e^{i\lambda}}{\lambda^{\nu+1/2}} \sum_{j=0}^N (-i)^{j+\nu+1/2} \Gamma(j+\nu+1/2) \frac{\tilde{\psi}_1^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+\nu+3/2}}\right), \quad N \in \mathbb{N}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Por ser  $\psi_1(1-y) = 1$ , en un entorno del origen,  $\tilde{\psi}_1^{(j)}(0)/j!$  no es más que el  $j$ -ésimo coeficiente de Taylor de la función  $(2-y)^{\nu-1/2}$ . Lo calculamos a continuación,

$$\begin{aligned}
 (2-y)^{\nu-1/2} &= 2^{\nu-1/2} (1-y/2)^{\nu-1/2} = 2^{\nu-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu-1/2}{j} \left(-\frac{y}{2}\right)^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu-1/2}{j} \frac{(-1)^j}{2^{j-\nu+1/2}} y^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(\nu+1/2)}{2^{j-\nu+1/2} j! \Gamma(\nu-j+1/2)} y^j.
 \end{aligned}$$

Luego, para cada  $N \in \mathbb{N}$  y  $\lambda \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$I_1(\lambda) = \frac{\Gamma(\nu+1/2) e^{i(\lambda-\pi\nu/2-\pi/4)}}{2^{-\nu+1/2} \lambda^{\nu+1/2}} \sum_{j=0}^N (-i)^j \frac{(-1)^j \Gamma(\nu+j+1/2)}{2^j j! \Gamma(\nu-j+1/2)} \frac{1}{\lambda^j} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+\nu+3/2}}\right).$$

Sustituyendo en (36) se obtiene fácilmente (35). □

**Corolario 4.9.** *Sea  $\nu > -1/2$ . Existe  $C_\nu > 0$  de manera que*

$$|J_\nu(\lambda)| \leq \frac{C_\nu}{\lambda^{1/2}}, \quad \lambda \geq 1.$$

#### 4.4. Estimaciones uniformes en el parámetro $\nu$

Hasta ahora nos hemos interesado en estudiar el comportamiento de las funciones de Bessel para valores grandes de  $\lambda$ , sin preocuparnos de la dependencia del parámetro  $\nu$ . En algunas aplicaciones es importante obtener estimaciones uniformes en  $\nu$ ; ver [3], [4], [7], [10], [15], [19] y [27]. En este sentido, para  $\nu$  grandes, el peor comportamiento de  $J_\nu(\lambda)$  ocurre cuando  $\lambda = \nu$ , en cuyo caso se tiene

$$J_\nu(\nu) = \frac{c}{\nu^{1/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu^{2/3}}\right).$$

De hecho veremos que  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})$  cuando  $\lambda \in [\nu - \nu^{1/3}, \nu + \nu^{1/3}]$ . Por otro lado, sólo a partir de  $\lambda \geq 2\nu$  el decaimiento pasa a ser  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$  uniformemente en  $\nu$ . Para investigar el comportamiento en la "zona de transición"  $[\nu + \nu^{1/3}, 2\nu]$ , en lugar de trabajar con (28) usaremos una representación integral más general válida para  $\nu > 0$  ([17, p. 115, (5.10.8)])

$$J_\nu(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-i\nu x} dx - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu x - \lambda \sinh x} dx, \quad \lambda > 0, \quad (37)$$

como se hace en [2, Capítulo 2]. Observar que si  $\nu \in \mathbb{Z}$ , el segundo término en (37) se cancela y obtenemos la representación (28). En esencia, trabajar con una u otra representación es indiferente pues,

$$\left| \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu x - \lambda \sinh x} dx \right| \leq \frac{1}{\pi(\nu + \lambda)}, \quad \nu, \lambda > 0.$$

y como veremos seguidamente, la información relevante se encuentra en la primera integral, que es la oscilatoria.

Nuestro objetivo es determinar el comportamiento de las funciones de Bessel en diferentes intervalos que dependen del parámetro  $\nu$ . En particular, perseguimos las siguientes estimaciones.

**Teorema 4.10.** *Para cada  $\nu \geq 1$ , se verifica*

$$|J_\nu(\lambda)| \leq C \begin{cases} \frac{1}{\nu} & , \lambda \in [0, \nu/2], \\ \frac{1}{2^j \nu^{1/3}} & , \lambda \in (\nu - 2^{j+1} \nu^{1/3}, \nu - 2^j \nu^{1/3}], \quad j = 0, 1, \dots, K-1, \\ \frac{1}{\nu^{1/3}} & , \lambda \in (\nu - \nu^{1/3}, \nu + \nu^{1/3}], \\ \frac{1}{2^{j/4} \nu^{1/3}} & , \lambda \in (\nu + 2^j \nu^{1/3}, \nu + 2^{j+1} \nu^{1/3}], \quad j = 0, 1, \dots, K, \\ \frac{1}{\lambda^{1/2}} & , \lambda \in [2\nu, \infty), \end{cases} \quad (38)$$

siendo  $C$  una constante universal que no depende de  $\nu$ , y  $K \in \mathbb{N}$  lo elegimos verificando

$$\frac{\nu^{2/3}}{2} < 2^K \leq \nu^{2/3}. \quad (39)$$

Observar que con esta elección de  $K$

$$\nu - 2^K \nu^{1/3} \leq \frac{\nu}{2} \quad \text{y} \quad 2\nu \leq \nu + 2^{K+1} \nu^{1/3},$$

con lo que cubrimos toda la semirrecta  $\lambda > 0$ .

Por periodicidad, es claro que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda \sin x} e^{-i\nu x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-i(\nu x - \lambda \sin x)} dx.$$

Para simplificar los cálculos y aprovechar las simetrías, emplearemos esta segunda notación. En estas integrales oscilatorias la derivada de la fase  $\phi(x) = \nu x/\lambda - \sin x$  es nula cuando  $\cos x = \nu/\lambda$ . Por tanto, si  $\lambda < \nu$ ,  $\phi'$  siempre es distinta de cero. En este rango, procedemos como comentamos en la introducción, integrando por partes.

**Propiedad 4.11.** *Sea  $\nu \geq 1$ . Entonces,*

$$(i) \quad \left| \int_0^\pi e^{\pm i(\nu x - \lambda \sin x)} dx \right| \leq \frac{4}{\nu}, \quad \lambda \in [0, \nu/2],$$

$$(ii) \quad \left| \int_0^\pi e^{\pm i(\nu x - \lambda \sin x)} dx \right| \leq \frac{1}{2^j \nu^{1/3}}, \quad \lambda \in (\nu - 2^{j+1} \nu^{1/3}, \nu - 2^j \nu^{1/3}], \quad j = 0, 1, \dots, K-1.$$

*Demostración.* Estudiamos la integral que tiene el signo positivo, la otra es igual por simetría. Definimos la función

$$f(x) = x - \frac{\lambda}{\nu} \sin x, \quad x \in [0, \pi].$$

Obsérvese que  $f'$  es creciente en  $[0, \pi]$ , y por tanto usando van der Corput (Proposición 2.2)

$$\left| \int_0^\pi e^{i\nu f(x)} dx \right| \leq \frac{2}{\nu \min_{0 \leq x \leq \pi} |f'(x)|}. \quad (40)$$

Además,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\lambda}{\nu} \cos x \geq 1 - \frac{\lambda}{\nu} \\ &\geq \begin{cases} 1/2 & , \quad \lambda \in [0, \nu/2], \\ 2^j/\nu^{2/3} & , \quad \lambda \in (\nu - 2^{j+1}\nu^{1/3}, \nu - 2^j\nu^{1/3}], \quad j = 0, 1, \dots, K-1, \end{cases} \end{aligned}$$

para cualquier  $x \in [0, \pi]$ . Sustituyendo en (40) conseguimos (i) y (ii).  $\square$

Nos restringimos ahora al intervalo  $(\nu - \nu^{1/3}, \nu + \nu^{1/3}]$ , en donde la derivada de la fase  $\phi$  sí se anula.

**Propiedad 4.12.** *Sea  $\nu \geq 1$ . Tenemos que*

$$\left| \int_0^\pi e^{\pm i(\nu x - \lambda \sin x)} dx \right| \leq \frac{9}{\nu^{1/3}}, \quad \lambda \in (\nu - \nu^{1/3}, \nu + \nu^{1/3}].$$

*Demostración.* Fijamos  $\lambda \geq \nu$  y llamamos  $x_0$  al único punto del intervalo  $[0, \pi]$  que verifica  $\phi'(x_0) = 0$ , o equivalentemente  $\cos x_0 = \nu/\lambda$ . Como comentamos antes, si  $\lambda < \nu$ ,  $\phi'$  es distinta de cero y podemos proceder como en la Propiedad 4.11. Observar que  $x_0 \in [0, \pi/2)$ . Elegimos también  $x_0 < \delta < \pi/2$  que fijaremos más adelante. Procedemos ahora como explicamos en la introducción. Definimos en esta ocasión,

$$\varphi(x) = \nu x - \lambda \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

y separamos nuestra integral oscilatoria en dos,

$$\int_0^\pi e^{i\varphi(x)} dx = \int_0^\delta e^{i\varphi(x)} dx + \int_\delta^\pi e^{i\varphi(x)} dx.$$

La primera la acotamos por  $\delta$ , la longitud del intervalo. En la segunda integramos por partes,

$$\int_\delta^\pi e^{i\varphi(x)} dx = \frac{1}{i} \left[ \frac{e^{i\varphi(x)}}{\varphi'(x)} \right]_\delta^\pi + \frac{1}{i} \int_\delta^\pi e^{i\varphi(x)} \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2} dx.$$

Así,

$$\left| \int_\delta^\pi e^{i\varphi(x)} dx \right| \leq \frac{1}{|\varphi'(\pi)|} + \frac{1}{|\varphi'(\delta)|} - \int_\delta^\pi \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varphi'(x)} \right) dx = \frac{2}{|\varphi'(\delta)|} = \frac{2}{|\nu - \lambda \cos \delta|} \leq \frac{8}{\nu \delta^2}.$$

Para justificar la última desigualdad usamos que  $\cos \delta \leq 1 - \delta^2/2$  y, por tanto,

$$\nu - \lambda \cos \delta \geq \frac{\nu \delta^2}{2} - (\lambda - \nu) \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \geq \frac{\nu \delta^2}{2} - (\lambda - \nu) \geq \frac{\nu \delta^2}{4}$$

siempre que  $|\lambda - \nu| < \nu \delta^2/4$ , y esto se cumple para  $\delta < \nu^{-1/3}$ . Luego, la mejor estimación ocurre cuando  $\delta$  y  $1/(\nu \delta^2)$  son del mismo orden, es decir, cuando  $\delta = \nu^{-1/3}$ .  $\square$

Nos ocupamos ahora de analizar la situación  $\lambda > \nu + \nu^{1/3}$ . Esta vez no solo obtendremos cotas superiores, sino que conseguiremos un término principal más un error. El siguiente lema técnico nos será de gran utilidad.

**Lema 4.13.** Sean  $\nu \geq 1$ ,  $\lambda \geq \nu + \nu^{1/3}$ ,

$$\varphi(x) = \nu x - \lambda \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

y  $x_0 \in (0, \pi/2)$  tal que  $\varphi'(x_0) = 0$ , es decir,  $x_0 = \arccos \nu/\lambda$ . Definimos

$$h(x) = \sqrt{\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\rho}}, \quad x \in [0, \pi],$$

siendo  $\rho = \varphi''(x_0)$ . Entonces, existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  verificando

$$(i) \quad c_1 \leq h'(x) \leq c_2 \sqrt{\frac{\nu}{\rho}},$$

$$(ii) \quad |h''(x)| \leq c_2 \frac{\nu}{\rho},$$

$$(iii) |h'''(x)| \leq c_2 \left(\frac{\nu}{\rho}\right)^2,$$

para cada  $x \in [0, \pi]$ .

*Demostración.* Sea  $x \in [0, \pi]$ . Podemos escribir,  $\rho h^2 = \varphi(x) - \varphi(x_0)$ , y de aquí,

$$h'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\rho h(x)}.$$

Expresamos  $h'$  desarrollando  $\varphi$  y  $\varphi'$  en serie Taylor y en un entorno de  $x_0$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \nu - \lambda \cos x & , & \quad \varphi'(x_0) = 0, \\ \varphi^{(2j)}(x) &= (-1)^{j+1} \lambda \sin x & , & \quad \varphi^{(2j)}(x_0) = (-1)^{j+1} \rho, \quad j \geq 1, \\ \varphi^{(2j+1)}(x) &= (-1)^{j+1} \lambda \cos x & , & \quad \varphi^{(2j+1)}(x_0) = (-1)^{j+1} \nu, \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

Llamamos  $\xi = x - x_0$  y escribimos

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2j)}(x_0)}{(2j)!} \xi^{2j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(2j+1)}(x_0)}{(2j+1)!} \xi^{2j+1} \\ &= \rho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!} \xi^{2j} + \nu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} \xi^{2j+1} \\ &= \rho A(\xi) + \nu B(\xi) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \nu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!} \xi^{2j} + \rho \left( \xi - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} \xi^{2j+1} \right) \\ &= \nu A(\xi) + \rho(\xi - B(\xi)), \end{aligned}$$

siendo  $A(\xi) = 1 - \cos \xi$  y  $B(\xi) = \xi - \sin \xi$ . Luego,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{2\rho h(x)} = \frac{\xi + \frac{\nu}{\rho} A(\xi) - B(\xi)}{2(A(\xi) + \frac{\nu}{\rho} B(\xi))^{1/2}} = \frac{\xi + \frac{\nu}{\rho} \xi^2 \tilde{A}(\xi) - \xi^3 \tilde{B}(\xi)}{2(\xi^2 \tilde{A}(\xi) + \frac{\nu}{\rho} \xi^3 \tilde{B}(\xi))^{1/2}} \\ &= \frac{1 + \frac{\nu}{\rho} \xi \tilde{A}(\xi) - \xi^2 \tilde{B}(\xi)}{2(\tilde{A}(\xi) + \frac{\nu}{\rho} \xi \tilde{B}(\xi))^{1/2}}, \end{aligned} \tag{41}$$

donde  $\tilde{A}(\xi) = A(\xi)/\xi^2$  y  $\tilde{B}(\xi) = B(\xi)/\xi^3$ . Sabiendo que las funciones  $\xi - \sin \xi$  y  $1 - \cos \xi$  son comparables a  $\xi^3$  y  $\xi^2$  en  $[0, \pi/2]$ , respectivamente, no es difícil ver que  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  están acotadas inferior y superiormente por constantes positivas. Esto implica (i). Para probar (ii) y (iii) derivamos (41) y acotamos la expresión que resulta de manera análoga.  $\square$

**Propiedad 4.14 (J.A. Barceló).** Sean  $\nu \geq 1$  y  $\lambda \geq \nu + \nu^{1/3}$ . Entonces,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \theta(\lambda)}{(\lambda^2 - \nu^2)^{1/4}} + E_\nu(\lambda), \tag{42}$$

siendo

$$\theta(\lambda) = \nu \arccos \left( \frac{\nu}{\lambda} \right) - \sqrt{\lambda^2 - \nu^2} + \frac{\pi}{4},$$



y

$$|E_\nu(\lambda)| \leq C \left( \frac{\nu^2}{(\lambda^2 - \nu^2)^{7/4}} + \frac{1}{\lambda + \nu} \right),$$

para cierta constante  $C > 0$ .

Observar que las estimaciones dadas en (38) para  $\lambda \geq \nu + \nu^{1/3}$  son consecuencia inmediata de (42).

*Demostración.* Sea  $\lambda \geq \nu + \nu^{1/3}$ . Definimos  $\varphi$ ,  $x_0$  y  $\rho$  como en el enunciado del Lema 4.13. Tenemos que

$$\int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx = e^{i\varphi(x_0)} \int_0^\pi e^{i\rho(\varphi(x) - \varphi(x_0))/\rho} dx = e^{i\varphi(x_0)} \int_{-x_0}^{\pi - x_0} e^{i\rho(\varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0))/\rho} d\xi.$$

Haciendo el cambio de variables  $t^2 = (\varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0))/\rho$ , obtenemos

$$\int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx = e^{i\varphi(x_0)} \int_{h(-x_0)}^{h(\pi - x_0)} e^{i\rho t^2} g(t) dt \quad (43)$$

donde

$$h(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0)}{\rho}} & , \quad \xi \in [-x_0, 0] \\ \sqrt{\frac{\varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0)}{\rho}} & , \quad \xi \in [0, \pi - x_0] \end{cases},$$

y

$$g(t) = \frac{1}{h'(h^{-1}(t))}, \quad t \in [-x_0, \pi - x_0].$$

La función  $h$  es continua y creciente. Además,  $h \in C^1([-x_0, \pi - x_0])$ . Para justificar estas afirmaciones analizamos que ocurre en  $\xi = 0$ , por ser el único punto problemático. Es claro  $h(0) = 0$ . Además, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} h'(0^+) &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{h(\xi) - h(0)}{\xi} = \left( \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0)}{\rho \xi^2} \right)^{1/2} = \left( \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(\xi + x_0)}{2\rho \xi} \right)^{1/2} \\ &= \left( \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\varphi''(\xi + x_0)}{2\rho} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

y análogamente  $h'(0^-) = 1/\sqrt{2}$ .

Si aplicamos el Corolario 3.9 a la integral (43) conseguimos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx &= e^{i\varphi(x_0)} \frac{\pi^{1/2} e^{\pi i/4}}{\rho^{1/2}} \left( g(0) + \mathcal{R}_0(\rho) \frac{i}{4\rho} \right) \\ &\quad + e^{i\varphi(x_0)} \left[ -\frac{e^{i\rho t^2}}{t} g(t) \right]_{h(-x_0)}^{h(\pi - x_0)} \left( \frac{i}{2\rho} \right) + \mathcal{S}_1(\rho) \left( \frac{i}{2\rho} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{i(\varphi(x_0)+\pi/4)}\sqrt{2\pi}}{\rho^{1/2}} + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{\rho^{3/2}} \\
&\quad + \frac{ie^{i(\varphi(x_0))}}{2\rho} \left[ -\frac{e^{i\rho t^2}}{t} g(t) \right]_{h(-x_0)}^{h(\pi-x_0)} + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{\rho^2} \\
&= \frac{e^{i(\varphi(x_0)+\pi/4)}\sqrt{2\pi}}{\rho^{1/2}} + \frac{ie^{i(\varphi(x_0))}}{2\rho} \left[ -\frac{e^{i\rho t^2}}{t} g(t) \right]_{h(-x_0)}^{h(\pi-x_0)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{\rho^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Simplificamos ahora el segundo término que acabamos de obtener. Para ello usamos las relaciones

$$\rho h^2(\xi) = \varphi(\xi + x_0) - \varphi(x_0) \quad \text{y} \quad 2\rho h(\xi)h'(\xi) = \varphi'(\xi + x_0), \quad \xi \in [-x_0, \pi - x_0].$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\rho} \left[ -\frac{e^{i\rho t^2}}{t} g(t) \right]_{h(-x_0)}^{h(\pi-x_0)} &= \frac{e^{i\rho h^2(-x_0)}}{2\rho h(-x_0)h'(-x_0)} - \frac{e^{i\rho h^2(\pi-x_0)}}{2\rho h(\pi-x_0)h'(\pi-x_0)} \\
&= \frac{e^{-i\varphi(x_0)}}{\varphi'(0)} - \frac{e^{i(\nu\pi-\varphi(x_0))}}{\varphi'(\pi)} \\
&= -e^{-i\varphi(x_0)} \left( \frac{1}{\lambda-\nu} + \frac{e^{i\nu\pi}}{\lambda+\nu} \right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en lo anterior,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx &= \frac{\sqrt{2\pi}e^{i(\varphi(x_0)+\pi/4)}}{\rho^{1/2}} - i \left( \frac{1}{\lambda-\nu} + \frac{e^{i\nu\pi}}{\lambda+\nu} \right) \\
&\quad + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{\rho^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}e^{i(\varphi(x_0)+\pi/4)}}{(\lambda^2 - \nu^2)^{1/4}} - i \left( \frac{1}{\lambda-\nu} + \frac{e^{i\nu\pi}}{\lambda+\nu} \right) \\
&\quad + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{(\lambda^2 - \nu^2)^{3/4}},
\end{aligned}$$

porque

$$\rho = \varphi''(x_0) = \lambda \sin x_0 = \lambda \sqrt{1 - \cos^2 x_0} = \lambda \sqrt{1 - \nu^2/\lambda^2} = \sqrt{\lambda^2 - \nu^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i(\nu x - \lambda \sin x)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-i(\nu x - \lambda \sin x)} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \theta(\lambda)}{(\lambda^2 - \nu^2)^{1/4}} + E_\nu(\lambda),
\end{aligned}$$

donde

$$\theta(\lambda) = \varphi(x_0) + \frac{\pi}{4} = \nu x_0 - \lambda \sin x_0 + \frac{\pi}{4} = \nu \arccos\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda^2 - \nu^2} + \frac{\pi}{4}$$

y

$$E_\nu(\lambda) = \frac{2 \sin(\nu\pi)}{\lambda + \nu} + \frac{\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty)}{(\lambda^2 - \nu^2)^{3/4}}.$$

Para terminar debemos ver que

$$\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty) \leq C \frac{\nu^2}{\lambda^2 - \nu^2},$$

para cierta constante  $C > 0$ . Calculamos  $g'$  y  $g''$ . Para cada  $t \in [h(-x_0), h(\pi - x_0)]$  tenemos que

- $g(t) = \frac{1}{h'(h^{-1})(t)},$
- $g'(t) = -h''(h^{-1})(t)g^3(t),$
- $g''(t) = -h'''(h^{-1})(t)g^4(t) - 3h''(h^{-1})(t)g^2(t)g'(t).$

Como consecuencia del Lema 4.13,

$$\|g\|_\infty \leq C, \quad \|g'\|_\infty \leq C \frac{\nu}{\rho} \quad \text{y} \quad \|g''\|_\infty \leq C \left(\frac{\nu}{\rho}\right)^2$$

y esto implica

$$\mathcal{O}(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty) \leq C \frac{\nu^2}{\rho^2},$$

puesto que  $\nu/\rho > 1$ . □

Presentamos a continuación algunas posibles mejoras de las estimaciones que hemos obtenido.

- (a) Si  $\lambda \in [0, 1]$  es fácil ver de (29) que  $|J_\nu(\lambda)| \leq \lambda^\nu / (2^\nu \Gamma(\nu + 1))$  (ver página 53).
- (b) Si  $\lambda \in [1, \nu/4]$  se puede mejorar (38) como  $|J_\nu(\lambda)| \leq e^{-c\nu}$ , con  $c$  una constante universal. Una prueba sencilla si  $\nu = m \in \mathbb{N}$  sería como sigue. Usando la fórmula de Taylor se tiene

$$|e^z - p_{m-1}(z)| \leq \frac{|z|^m e^{|z|}}{m!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, de (28) sigue que

$$|J_m(\lambda)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i\lambda \sin t} - p_{m-1}(i\lambda \sin t)) e^{-imt} dt \right| \leq \frac{\lambda^m e^\lambda}{m!},$$

que usando la fórmula de Stirling se mayoría con  $(m/4)^m e^{m/4} / [(m/e)^m \sqrt{2\pi m}] \leq a^m$ , donde  $a = e^{5/4}/4 < 1$ .

(c) Para  $\lambda \in [\nu/4, \nu - \nu^{1/3}]$  la estimación (38) se puede mejorar a

$$|J_\nu(\lambda)| \leq \frac{e^{-c2^{3j/2}}}{2^{j/4}\nu^{1/3}}, \quad \lambda \in [\nu - 2^{j+1}\nu^{1/3}, \nu - 2^j\nu^{1/3}]. \quad (44)$$

De hecho, para  $\lambda \in (0, \nu)$  es conocido que

$$0 \leq J_\nu(\lambda) \leq \frac{e^{-\nu F(\lambda/\nu)}}{\sqrt{2\pi}(\nu^2 - \lambda^2)^{1/4}},$$

donde  $F(z) = \log[(1 + \sqrt{1 - z^2})/z] - \sqrt{1 - z^2} \geq 0$  (ver [33, p. 255]). Desarrollando en serie de Taylor no es difícil ver que  $F(z) \leq c(1 - z)^{3/2}$ , de donde sigue la estimación (44). Así, en esta zona la función de Bessel es positiva, no oscila, y se cumple la cota uniforme

$$\int_0^{\nu - \nu^{1/3}} |J_\nu(\lambda)| d\lambda \leq C,$$

con  $C$  independiente de  $\nu$  (ver [15, Lema 2.4]).

(d) Para  $|\lambda - \nu| \ll \nu^{1/3}$  existe una fórmula asintótica debida a Debye (1909)

$$J_\nu(\lambda) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\lambda^{1/3}} + \frac{1}{3\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma((j+1)/3) \sin((j+1)\pi/3) B_j(\lambda - \nu)}{(\lambda/6)^{(j+1)/3}}$$

donde  $B_j$  son polinomios de grado  $j$  y paridad  $j$  ([33, p. 247]). En particular, en esta región no se puede mejorar la cota  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/3})$ . Cuando  $\lambda = \nu$  se obtiene

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\nu^{1/3}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu^{5/3}}\right),$$

cuyo término principal lo calculó por primera vez Cauchy en 1854 ([33, p. 231]). Esta fórmula también puede obtenerse del Teorema 3.1, tomando  $\phi(x) = \sin x - x$  y  $k = 3$  (si bien sólo con error  $\mathcal{O}(\nu^{-2/3})$ ).

(e) Para  $\lambda \in [\nu + \nu^{1/3}, \infty)$ , la estimación  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(|\lambda^2 - \nu^2|^{-1/4})$  en (38) no se puede mejorar, como mostramos en la Propiedad 4.14. No obstante, existe una fórmula asintótica más general debida a Debye (1909): si  $\lambda = z\nu$  con  $z > 1$  fijo y  $\nu$  grande se tiene

$$J_\nu(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2/\pi}}{(\lambda^2 - \nu^2)^{1/4}} \left[ \cos \theta(\lambda) \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{p_{2l}(\nu^2/(\lambda^2 - \nu^2))}{(\lambda^2 - \nu^2)^l} \right) - \sin \theta(\lambda) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{p_{2l+1}(\nu^2/(\lambda^2 - \nu^2))}{(\lambda^2 - \nu^2)^{l+1/2}} \right],$$

donde  $\theta(\lambda)$  es la función definida en la Propiedad 4.14 y  $p_l$  son polinomios de grado  $l$  ([33, p. 244]). Obsérvese que la Propiedad 4.14 da el primer término de esta expansión, con una cota del error  $E_\nu(\lambda)$  comparable al segundo término. Las expansiones asintóticas de Debye se obtienen con el llamado *método del descenso rápido* (steepest descent).

### 4.5. Norma $L^p$ de las funciones de Bessel

En el apartado anterior conseguimos acotaciones puntuales de las funciones de Bessel. Dichas estimaciones nos permiten estudiar la norma de  $J_\nu(\lambda)$  en determinados espacios  $L^p$ . Más concretamente, siguiendo las ideas expuestas en [27], nos interesa ahora analizar para qué valores de  $a$  y  $p$  es finita la integral

$$\int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda, \quad \nu \geq 0, \quad (45)$$

y en tal caso estudiar cómo crece o decrece en función del parámetro  $\nu$ . Sabemos que  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-1/2})$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ . Por tanto, una primera condición que debemos imponer para que (45) integre en infinito es  $a < p/2 - 1$ . De hecho, usando

$$J_\nu(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\lambda^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right), \quad (46)$$

no es difícil ver que  $J_\nu \notin L^p((0, \infty), \lambda^a d\lambda)$  si  $a \geq p/2 - 1$ . Además,  $J_\nu(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^\nu)$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ , como se aprecia fácilmente en (27). Esto obliga a que  $a > -1 - \nu p$  para tener integrabilidad en el origen.

En el siguiente lema recogemos de manera precisa las acotaciones de la función de Bessel que necesitamos, simplificando un poco las dadas en el Teorema 4.10.

**Lema 4.15.** *Sea  $\nu \geq 1$ . Entonces*

$$|J_\nu(\lambda)| \leq C \begin{cases} e^{-\nu/5} & , \lambda \in (0, \nu/2), \\ \frac{1}{\nu^{1/4}(|\lambda - \nu| + \nu^{1/3})^{1/4}} & , \lambda \in (\nu/2, 2\nu), \\ \frac{1}{\lambda^{1/2}} & , \lambda \in (2\nu, \infty), \end{cases} \quad (47)$$

para cierta constante  $C > 0$ .

*Demostración.* En virtud de (29) y (30) tenemos que

$$|J_\nu(\lambda)| \leq \frac{\lambda^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \beta(1/2, \nu + 1/2) \leq \left(\frac{\nu}{4}\right)^\nu \frac{1}{\nu \Gamma(\nu)}, \quad 0 < \lambda < \nu/2.$$

Recordando ahora la fórmula de Stirling ([17, p. 12, (1.4.25)])

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad z > 0,$$

obtenemos

$$|J_\nu(\lambda)| \leq \frac{e^\nu}{4^\nu \nu^{1/2} \sqrt{2\pi}} \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\nu < e^{-\nu/5}, \quad 0 < \lambda < \nu/2,$$

porque  $4 > e^{6/5}$ . Para deducir las restantes estimaciones nos basamos en (38). En el intervalo  $(2\nu, \infty)$  la cota en (38) y (47) es la misma. Finalmente, observamos que

$$(\nu/2, 2\nu) \subset \bigcup_{j=0}^{K-1} (\nu - 2^{j+1}\nu^{1/3}, \nu - 2^j\nu^{1/3}] \cup (\nu - \nu^{1/3}, \nu + \nu^{1/3}] \cup \bigcup_{j=0}^K (\nu + 2^j\nu^{1/3}, \nu + 2^{j+1}\nu^{1/3}],$$

siendo  $K$  como en (39), y

- $\nu^{1/4}(|\lambda - \nu| + \nu^{1/3})^{1/4} \leq (2^{j+1} + 1)^{1/4} \nu^{1/3} \leq 3 \cdot 2^j \nu^{1/3}$ ,  $j = 0, 1, \dots, K$ ,
- $\nu^{1/4}(|\lambda - \nu| + \nu^{1/3})^{1/4} \leq 2^{1/4} \nu^{1/3}$ .

□

**Proposición 4.16.** Sea  $0 < p < \infty$  y  $-1 < a < p/2 - 1$ . Entonces,

$$\int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \leq C_{a,p} \begin{cases} \nu^{a-p/2+1} & , \quad 0 < p < 4, \\ \nu^{a-1} \log \nu & , \quad p = 4, \\ \nu^{a+1/3-p/3} & , \quad 4 < p < \infty. \end{cases} \quad (48)$$

siendo  $C_{a,p}$  una constante positiva que sólo depende de  $p$  y de  $a$ .

*Demostración.* En primer lugar observar que la integral que aparece en (48) es una función continua en  $\nu \geq 0$ , por ser las funciones de Bessel continuas en dicho parámetro. Por tanto, esta integral es acotada para  $0 \leq \nu \leq 1$  y (48) se verifica. Fijamos entonces  $\nu > 1$ . Dividimos la integral de la siguiente manera

$$\int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda = \int_0^{\nu/2} |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda + \int_{\nu/2}^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda + \int_{2\nu}^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda,$$

y acotamos cada una de ellas por separado. En virtud del Lema 4.15 es claro que

$$\int_{2\nu}^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \leq C \int_{2\nu}^\infty \lambda^{a-p/2} d\lambda = C_{a,p} \nu^{a-p/2+1},$$

porque estamos suponiendo que  $a - p/2 + 1 < 0$ , y también,

$$\int_0^{\nu/2} |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \leq C e^{-\nu p/5} \int_0^{\nu/2} \lambda^a d\lambda \leq C_a e^{-\nu p/5} \nu^{a+1}$$

ya que  $a > -1$ . Para estudiar la integral que nos falta nos restringimos al intervalo  $(\nu, 2\nu)$ , la integración en  $(\nu/2, \nu)$  se puede razonar de manera similar. Aplicando nuevamente el Lema 4.15 conseguimos

$$\begin{aligned} \int_\nu^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda &\leq C \int_\nu^{2\nu} \frac{1}{\nu^{p/4}(|\lambda - \nu| + \nu^{1/3})^{p/4}} \lambda^a d\lambda \\ &\leq C_a \nu^{a-p/4} \int_\nu^{2\nu} (\lambda - \nu + \nu^{1/3})^{-p/4} d\lambda = C_a \nu^{a-p/4} \int_0^\nu (t + \nu^{1/3})^{-p/4} dt \\ &\leq C_a \nu^{a-p/4} \left( \int_0^{\nu^{1/3}} \frac{dt}{\nu^{p/12}} + \int_{\nu^{1/3}}^\nu \frac{dt}{t^{p/4}} \right) \\ &\leq C_a \begin{cases} \nu^{a-p/4} \left[ \nu^{-p/12+1/3} + \frac{4}{4-p} (\nu^{1-p/4} - \nu^{-p/12+1/3}) \right] & , \quad p \neq 4, \\ \nu^{a-1} \log \nu & , \quad p = 4, \end{cases} \\ &\leq C_{a,p} \begin{cases} \nu^{a-p/2+1} & , \quad 0 < p < 4, \\ \nu^{a-1} (1 + \log \nu) & , \quad p = 4, \\ \nu^{a+1/3-p/3} & , \quad 4 < p < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Sumando las tres estimaciones deducimos (48), pues para  $p > 4$ ,  $a + 1/3 - p/3 > a - p/2 + 1$ . □

Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.17.** *Si  $0 < p < \infty$ ,  $-1 < a < p/2 - 1$  y además  $a \leq p/3 - 1/3$  cuando  $p > 4$ , entonces se verifica la siguiente estimación uniforme*

$$\int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \leq C_{a,p}, \quad \nu \geq 0.$$

A continuación demostramos que las estimaciones en la Proposición 4.16 son óptimas. Para ello necesitamos cotas inferiores, que vienen recogidas en el siguiente lema ([2, Lema 1.4, p. 60-61]).

**Lema 4.18.** *Sea  $\nu \gg 1$  y  $0 < p < \infty$ . Entonces,*

$$\int_{\nu/2}^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p d\lambda \geq C\nu^{1/3-p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{j(1-p/4)}, \quad \frac{\nu^{2/3}}{2} < 2^K \leq \nu^{2/3},$$

para cierto  $m \in \{1, \dots, K-1\}$  y  $C > 0$ .

*Demostración.* Tomamos  $m \in \{1, \dots, K-1\}$  que determinamos seguidamente. En virtud de (37) y de la Propiedad 4.14 podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\nu/2}^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p d\lambda &\geq \int_{\nu+2^m\nu^{1/3}}^{\nu+2^K\nu^{1/3}} |J_\nu(\lambda)|^p d\lambda \\ &= C \sum_{j=m}^{K-1} \int_{\nu+2^j\nu^{1/3}}^{\nu+2^{j+1}\nu^{1/3}} \left| \frac{\cos \theta(\lambda)}{(\lambda^2 - \nu^2)^{1/4}} + E_\nu(\lambda) \right|^p d\lambda \\ &= C \sum_{j=m}^{K-1} \int_{2^j\nu^{1/3}}^{2^{j+1}\nu^{1/3}} \left| \frac{\cos \theta(t + \nu)}{(t^2 + 2t\nu)^{1/4}} + E_\nu(t + \nu) \right|^p dt \\ &\geq C\nu^{-p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{-jp/4} \int_{2^j\nu^{1/3}}^{2^{j+1}\nu^{1/3}} |\cos \theta(t + \nu) + (t^2 + 2t\nu)^{1/4} E_\nu(t + \nu)|^p dt, \end{aligned}$$

por ser  $t \sim 2^j\nu^{1/3}$  y  $t < 3\nu$ . Llamamos ahora

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t + \nu) = \nu \arccos \left( \frac{\nu}{t + \nu} \right) - \sqrt{t^2 + 2t\nu} + \frac{\pi}{4},$$

y hacemos el cambio de variables  $\tilde{\theta}(t) = s$ . Se tiene que

$$\int_{\nu/2}^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p d\lambda \geq C\nu^{1/3-p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{-j(1/2+p/4)} \int_{\tilde{\theta}(2^j\nu^{1/3})}^{\tilde{\theta}(2^{j+1}\nu^{1/3})} |\cos s + g(s)|^p ds,$$

siendo

$$g(s) = (\tilde{\theta}^{-1}(s))^2 + 2\tilde{\theta}^{-1}(s)\nu^{1/4} E_\nu(\tilde{\theta}^{-1}(s)).$$

En efecto, se puede comprobar que

$$\tilde{\theta}'(t) = \frac{(t^2 + 2t\nu)^{1/2}}{\nu + t}.$$

Luego,

$$\frac{1}{\tilde{\theta}'(\tilde{\theta}^{-1}(s))} = \frac{1}{\tilde{\theta}'(t)} \geq C \frac{\nu + t}{t^{1/2}(\nu + t)^{1/2}} \geq C \frac{\nu^{1/2}}{\nu^{1/6}2^{j/2}} = \nu^{1/3}2^{-j/2},$$

pues  $t \sim 2^j\nu^{1/3}$ . Para terminar esta prueba debemos ver que

$$\int_{\tilde{\theta}(2^j\nu^{1/3})}^{\tilde{\theta}(2^{j+1}\nu^{1/3})} |\cos s + g(s)|^p ds \geq C2^{3j/2}. \quad (49)$$

Ya que  $\tilde{\theta}'$  es una función creciente, el teorema del valor medio nos permite escribir

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(2^{j+1}\nu^{1/3}) - \tilde{\theta}(2^j\nu^{1/3}) &\geq \tilde{\theta}'(2^j\nu^{1/3})2^j\nu^{1/3} \\ &\geq \frac{(2^j\nu^{1/3})^{1/2}}{\nu^{1/2}}2^j\nu^{1/3} = 2^{3j/2}, \quad j = m, \dots, K-1. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} |(t^2 + 2t\nu)^{1/4}E_\nu(t + \nu)| &\leq \frac{\nu^2}{t^{3/2}(t + 2\nu)^{3/2}} + \frac{t^{1/4}}{(t + 2\nu)^{3/4}} \leq C \left( \frac{\nu^{1/2}}{t^{3/2}} + \frac{1}{t^{1/2}} \right) \\ &\leq C \left( \frac{\nu^{1/2}}{2^{3m/2}\nu^{1/2}} + \frac{1}{2^{m/2}\nu^{1/6}} \right) \leq C \left( \frac{1}{2^{3m/2}} + \frac{1}{2^{3m/4}} \right) \\ &\leq C2^{-3m/4}, \quad t \in [2^m\nu^{1/3}, 2^K\nu^{1/3}], \end{aligned}$$

por ser  $2^m < 2^K < \nu^{2/3}$ . Ya que  $\nu \gg 1$ , podemos elegir  $m \in \{1, \dots, K-1\}$  suficientemente grande tal que  $C2^{-3m/4} < 1/4$ . Por tanto,

$$|\cos s + g(s)| \geq |\cos s| - |g(s)| = |\cos s| - \frac{1}{4} > \frac{1}{2},$$

en un cierto subconjunto de longitud comparable al intervalo  $[\tilde{\theta}(2^j\nu^{1/3}), \tilde{\theta}(2^{j+1}\nu^{1/3})]$ . Esto nos permite concluir (49).  $\square$

**Teorema 4.19.** *Sea  $\nu \geq 0$ ,  $0 < p < \infty$  y  $a > -1$ . Se tiene que*

(i)  $J_\nu \in L^p((0, \infty), \lambda^a d\lambda)$  si, y sólo si,  $a < p/2 - 1$ .

(ii) Si  $\nu \gg 1$  y  $a < p/2 - 1$ , entonces

$$\left( \int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \right)^{1/p} \sim \begin{cases} \nu^{a/p+1/p-1/2} & , \quad 1 < p < 4, \\ \nu^{(a-1)/4}(\log \nu)^{1/4} & , \quad p = 4, \\ \nu^{a/p+1/3p-1/3} & , \quad 4 < p < \infty, \end{cases}$$

donde las constantes que aparecen son independientes de  $\nu$ .

*Demostración.* Si  $a \geq p/2 - 1$ , usando (46) y procediendo como en la prueba del Lema 4.18 conseguimos  $J_\nu \notin L^p((0, \infty), \lambda^a d\lambda)$ . Recíprocamente, supongamos que  $a < p/2 - 1$ . Teniendo presente el comportamiento de las funciones de Bessel en el origen y en el infinito,

$$|J_\nu(\lambda)| \leq C_\nu \begin{cases} \lambda^\nu & , \quad 0 \leq \lambda < 1, \\ \lambda^{-1/2} & , \quad \lambda \geq 1, \end{cases}$$



se tiene que

$$\int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda \leq C_\nu \left( \int_0^1 \lambda^{\nu p+a} d\lambda + \int_1^\infty \lambda^{-p/2+a} d\lambda \right) < \infty.$$

Las estimaciones superiores en (ii) ya las estudiamos en la Proposición 4.16. Para deducir las cotas inferiores nos apoyamos en el Lema 4.18

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |J_\nu(\lambda)|^p \lambda^a d\lambda &\gtrsim \nu^a \int_{\nu/2}^{2\nu} |J_\nu(\lambda)|^p d\lambda = \nu^{a+1/3-p/3} \sum_{j=m}^{K-1} 2^{j(1-p/4)} \\ &\gtrsim \begin{cases} \nu^{a+1/3-p/3} 2^{K(1-p/4)} & , \quad 1 < p < 4, \\ \nu^{a-1} K & , \quad p = 4, \\ \nu^{a+1/3-p/3} & , \quad 4 < p < \infty, \end{cases} \\ &\gtrsim \begin{cases} \nu^{a-p/2+1} & , \quad 1 < p < 4, \\ \nu^{a-1} \log \nu & , \quad p = 4, \\ \nu^{a+1/3-p/3} & , \quad 4 < p < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

pues recordamos que  $\nu^{1/3}/2 < 2^K \leq \nu^{1/3}$ .

□



## 5. APLICACIONES AL PROBLEMA DE RESTRICCIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier de una función de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  sabemos que es acotada y continua, por lo tanto, está definida en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, la transformada de Fourier de una función  $L^2(\mathbb{R}^n)$  no es más que una función de cuadrado integrable y sólo la podemos definir en casi todo punto, siendo en principio arbitraria en un conjunto de medida nula. Para  $1 < p \leq 2$ , por interpolación podemos extender la transformada de Fourier a un operador que aplica  $L^p(\mathbb{R}^n)$  en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  de manera acotada, con  $1/p + 1/p' = 1$  (Teorema de Hausdorff-Young [14, p. 253]).

Si  $n \geq 2$  y  $S$  es una subvariedad suave de  $\mathbb{R}^n$ , digamos con curvatura no nula, se puede preguntar si existe algún  $p_0 = p_0(S)$ ,  $1 < p_0 < 2$ , de manera que para cada función de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq p_0$ , su transformada de Fourier esté bien definida cuando nos restringimos a  $S$ . Más concretamente, si denotamos por  $d\sigma$  a la medida sobre  $S$  inducida por la medida de Lebesgue, decimos que  $S$  verifica la propiedad de restricción  $L^p$  si existe  $q = q(p)$  tal que

$$\left( \int_{S_0} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq C_{p,q}(S_0) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (50)$$

siendo  $S_0$  un compacto de  $S$ . Ya que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , si (50) se verifica, podemos definir para toda  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $\widehat{f}$  en  $S$ , en casi todo punto con respecto a la medida  $d\sigma$ .

La condición sobre la curvatura no nula en  $S$  es necesaria, pues es fácil ver que para un hiperplano la desigualdad (50) es falsa para cualquier  $p > 1$  (ver [29, p. 8–9]).

La caracterización de las variedades  $S$  que tengan esta propiedad de restricción, así como la determinación de los rangos óptimos de los exponentes  $p$  y  $q$  son en general problemas difíciles en Análisis Armónico que todavía continúan abiertos. Las desigualdades de restricción juegan además un papel importante en el análisis de ciertas EDP's (véase [23, p. 368–372] y [29]). A continuación estudiamos un caso sencillo, cuando tomamos  $S = S^{n-1}$  la esfera unidad de  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.1. Transformada de Fourier de una medida

Comenzamos calculando la transformada de Fourier de la medida sobre  $S^{n-1}$  inducida por la medida de Lebesgue.

**Proposición 5.1.** *Sea  $d\sigma$  la medida en  $S^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , inducida por la medida de Lebesgue. Entonces,*

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{(n-2)/2}} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

siendo

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Fijamos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  y consideramos la rotación  $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que transforma  $\xi$  en el vector  $(0, \dots, 0, |\xi|)$ . Es claro que  $R^{-1} = R^T$  y  $|R| = 1$ . Haciendo el cambio de

variables  $y = Rx$ , podemos escribir,

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i R^{-1}y \cdot \xi} d\sigma(y) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i y \cdot R\xi} d\sigma(y) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i |\xi| \cos \theta} d\sigma(y),$$

donde  $\theta$  denota el ángulo entre el vector  $(0, \dots, 0, 1)$  e  $y \in S^{n-1}$ . Pasando a coordenadas esféricas conseguimos

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_0^\pi \int_{S^{n-2}} e^{-2\pi i |\xi| \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\sigma_{n-2} d\theta = |S^{n-2}| \int_0^\pi e^{-2\pi i |\xi| \cos \theta} (\sin \theta)^{n-2} d\theta,$$

siendo  $|S^{n-2}|$  la medida de Lebesgue de la esfera  $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Finalmente, sabiendo que

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

([24, Ejercicio 5, p. 313]) y llamando  $t = -\cos \theta$  obtenemos

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_{-1}^1 e^{i(2\pi|\xi|)t} (1-t^2)^{(n-3)/2} dt = \frac{2\pi}{|\xi|^{(n-2)/2}} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|),$$

donde hemos hecho uso de la representación integral de las funciones de Bessel (29).  $\square$

**Corolario 5.2.** *Sea  $d\sigma$  la medida en  $S^{n-1}$ ,  $n \geq 2$ , inducida por la medida de Lebesgue. Entonces,*

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^{(n-1)/2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

siendo  $C$  una constante positiva.

Esta estimación también se verifica para superficies generales con curvatura gaussiana no nula ([23, Teorema 1, p. 348]).

*Demostración.* Basta tener en cuenta la Proposición 5.1 y la estimación

$$J_\nu(2\pi|\xi|) \leq C_\nu \begin{cases} |\xi|^\nu & , \quad |\xi| < 1, \\ |\xi|^{-1/2} & , \quad |\xi| \geq 1, \end{cases} \quad \nu \geq 0.$$

$\square$

## 5.2. El Teorema de restricción de Stein (1967)

Enunciamos sin demostrar la conocida desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, que nos será útil en lo que sigue.

**Proposición 5.3 (Desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev).** *Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces*

$$\left\| f * \frac{1}{|y|^\gamma} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\gamma,p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

donde  $0 < \gamma < n$ ,  $1 < p < q < \infty$  y  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n-\gamma}{n}$ .

Una prueba de esta desigualdad puede encontrarse en [23, p. 354].

Podemos ahora analizar un primer resultado de restricción. Al igual que comentamos antes, un teorema para variedades más generales puede consultarse en [23, Teorema 3, p. 352].

**Teorema 5.4.** *Sea  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  la esfera unidad. Si tomamos  $p_0 = 4n/(3n + 1)$ ,  $S^{n-1}$  satisface la propiedad de restricción (50) para  $q = 2$  y  $1 \leq p \leq p_0$ .*

Comentar que el  $p_0(S^{n-1})$  que da este teorema no es el óptimo. El teorema sigue siendo cierto para  $p_0 = 2(n + 1)/(n + 3)$ . Éste último resultado, debido a Tomas y Stein (ver [22], [31] y [32]), requiere de técnicas algo más sofisticadas que las que presentamos aquí.

*Demostración.* Sea  $p \geq 1$ , cuyo rango de variación fijaremos más adelante. Nuestro objetivo es probar que el operador

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(S^{n-1}, d\sigma) \\ f &\longmapsto Rf(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in S^{n-1}, \end{aligned}$$

es acotado. Afirmamos que el operador

$$\begin{aligned} R^* : L^2(S^{n-1}, d\sigma) &\longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n) \\ g &\longmapsto R^*g(x) = \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

es el adjunto de  $R$ , con  $p$  y  $p'$  exponentes de Hölder conjugados. En efecto, para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L^2(S^{n-1}, d\sigma)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \langle g, Rf \rangle_{L^2(S^{n-1}, d\sigma)} &= \int_{S^{n-1}} g(\xi) \overline{Rf(\xi)} d\sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \overline{f(x)} dx d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma(\xi) \right) \overline{f(x)} dx = \langle R^*g, f \rangle_{L^{p'}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde el cambio de orden en las integrales se puede justificar aplicando la desigualdad de Hölder como sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \overline{f(x)} dx d\sigma(\xi) \right| &\leq \int_{S^{n-1}} |g(\xi)| d\sigma(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \\ &\leq |S^{n-1}|^{1/2} \left( \int_{S^{n-1}} |g(\xi)|^2 d\sigma(\xi) \right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty. \end{aligned}$$

Ya que, para cada  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|Rf\|_{L^2(S^{n-1}, d\sigma)}^2 = \langle Rf, Rf \rangle_{L^2(S^{n-1}, d\sigma)} = \langle R^*Rf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|R^*Rf\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para probar la acotación del operador  $R$  es suficiente demostrar que  $R^*R$  aplica  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})$  en  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  de manera acotada. Observamos que

$$\begin{aligned} R^*Rf(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot (y-x)} f(y) dy d\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \xi \cdot (y-x)} d\sigma(\xi) \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{d\sigma}(y-x) f(y) dy = f * \widehat{d\sigma}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Aplicando ahora el Corolario 5.2 y teniendo en cuenta que  $\widehat{d\sigma}$  es acotada,

$$|\widehat{d\sigma}(x)| \leq C \frac{1}{|x|^\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{n-1}{2}.$$

Luego, la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev nos permite escribir

$$\|R^* Rf\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| f * \frac{1}{|x|^\gamma} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

siempre y cuando  $p = 2n/(2n-\gamma)$ . Uniendo las restricciones obtenidas en  $p$  y  $\gamma$  concluimos que lo anterior es válido para

$$1 \leq p \leq \frac{4n}{3n+1},$$

como perseguíamos. □

### 5.3. Teoremas de restricción en $\mathbb{R}^2$

El problema de restricción sólo se conoce completamente en el caso de curvas en el plano  $\mathbb{R}^2$ . A continuación consideramos el caso particular en que la curva es una parábola, como se hace en [8, p. 289-290], pues éste es el caso más sencillo y la fuente de inspiración para abordar problemas más generales. Una vez entendida esta técnica, se puede aplicar a otro tipo de curvas (ver [26, Teorema 2 y Corolario 2]). Estas técnicas debidas a C. Fefferman ([13]) y Carleson-Sjölin ([8]) (ver también [35]) nos permiten obtener teoremas óptimos de restricción en  $\mathbb{R}^2$ , en parte por papel especial del índice crítico  $p = 4 = 2 \cdot 2$ . En  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  el rango óptimo en el problema de restricción sigue siendo una importante cuestión abierta (ver [30] para los más recientes resultados).

**Teorema 5.5.** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  el arco de parábola parametrizado por  $\mathcal{P} = \{(t, t^2), t \in [0, 1]\}$ . Para cada  $f \in L^1([0, 1])$  definimos el operador*

$$Tf(x_1, x_2) = \int_0^1 e^{2\pi i(x_1 t + x_2 t^2)} f(t) dt, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (51)$$

Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|Tf\|_{L^{4+2\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^1([0,1])}.$$

*Demostración.* Tomamos  $f \in L^1([0, 1])$ . Observamos que

$$\begin{aligned} Tf(x_1, x_2)^2 &= \left( \int_0^1 e^{2\pi i(x_1 t + x_2 t^2)} f(t) dt \right) \left( \int_0^1 e^{2\pi i(x_1 s + x_2 s^2)} f(s) ds \right) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i[x_1(t+s) + x_2(t^2+s^2)]} f(t) f(s) dt ds, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $u = t + s$  y  $v = t^2 + s^2$  sigue que

$$Tf(x_1, x_2)^2 = \int_U e^{2\pi i[x_1 u + x_2 v]} F(u, v) du dv, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

donde hemos llamado  $U$  a la imagen de  $[0, 1]^2$  por esta transformación y

$$F(u, v) = \frac{f(t(u, v))f(s(u, v))}{2|t(u, v) - s(u, v)|}, \quad (u, v) \in U.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Aplicando la desigualdad de Hausdorff-Young ([34, p. 26]), sigue que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{4+2\varepsilon}(\mathbb{R}^2)}^2 &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} (|Tf(x_1, x_2)|^2)^{2+\varepsilon} dx_1 dx_2 \right)^{1/(2+\varepsilon)} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left( \int_U e^{2\pi i[x_1 u + x_2 v]} F(u, v) dudv \right)^{2+\varepsilon} dx_1 dx_2 \right)^{1/(2+\varepsilon)} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\chi_U F}(-x_1, -x_2)|^{2+\varepsilon} dx_1 dx_2 \right)^{1/(2+\varepsilon)} \\ &= \|\widehat{\chi_U F}\|_{L^{2+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)} \leq \|\chi_U F\|_{L^{2-\delta}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

siendo  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  verificando  $1/(2 + \varepsilon) + 1/(2 - \delta) = 1$ . Des haciendo ahora el cambio de variables, haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de Hardy-Littlewood-Sobolev (Proposición 5.3),

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{4+2\varepsilon}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \left( \int_U |F(u, v)|^{2-\delta} dudv \right)^{1/(2-\delta)} \\ &= \left( \int_0^1 |f(t)|^{2-\delta} \left( \int_0^1 \frac{|f(s)|^{2-\delta}}{|t-s|^{1-\delta}} ds \right) dt \right)^{1/(2-\delta)} \\ &\leq \|f\|_{L^{4-2\delta}([0,1])} \|f^{2-\delta} * |\cdot|^{-(1-\delta)}\|_{L^2([0,1])}^{1/(2-\delta)} \\ &\leq C_\delta \|f\|_{L^{4-2\delta}([0,1])} \|f^{2-\delta}\|_{L^p([0,1])}^{1/(2-\delta)} \end{aligned}$$

para  $p = 2/(2\delta + 1)$ . Finalmente, por ser  $[0, 1]$  compacto, la desigualdad de Hölder nos permite escribir

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^{4+2\varepsilon}(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq C_\delta \|f\|_{L^{4-2\delta}([0,1])} \|f^{2-\delta}\|_{L^2([0,1])}^{1/(2-\delta)} \\ &\leq C_\delta \|f\|_{L^{4-2\delta}([0,1])}^2 \leq C_\delta \|f\|_{L^4([0,1])}^2. \end{aligned}$$

□

Observar que este teorema es falso para  $\varepsilon = 0$ . En efecto, tomando  $f \equiv 1$  y usando fase estacionaria no es difícil ver que, para  $(x_1, x_2) \in (-\infty, 0) \times (0, \infty)$  con  $|x_1/x_2| \in [1/2, 1]$  se tiene

$$|Tf(x_1, x_2)| = \left| \int_0^1 e^{2\pi i(x_1 t + x_2 t^2)} dt \right| \geq \frac{C}{|x|^{1/2}},$$

y por tanto  $\|Tf\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} = \infty$ .

Como consecuencia del Teorema 5.5 y aplicando dualidad se obtiene el siguiente resultado de restricción.

**Corolario 5.6.** *Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  el arco de parábola  $\mathcal{P} = \{(t, t^2), t \in [0, 1]\}$ , y  $p_0 = 4/3$ . Entonces  $\mathcal{P}$  satisface la propiedad de restricción (50) para  $q = 4/3$  y  $1 < p < p_0$ .*

Este corolario se mantiene válido para curvas más generales con curvatura no nula (y en particular para la circunferencia  $S^1$ ).

*Demostración.* Procediendo formalmente como en la prueba del Teorema 5.4 podemos ver que el operador  $T$  que se define en (51) es el operador adjunto de

$$Rf(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathcal{P}.$$

En virtud del Teorema 5.5,  $R$  aplica  $L^p(\mathbb{R}^2)$  en  $L^{4/3}(\mathcal{P}, d\sigma)$  de manera acotada, siendo  $p = (4 + 2\varepsilon)/(3 + 2\varepsilon)$ , para cada  $\varepsilon > 0$ . Por tanto,  $1 < p < 4/3$ .  $\square$



## Referencias

- [1] G.I. Arhipov, A.A. Karacuba, V. N. Cubarikov, *Trigonometric integrals*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 5, 971–1003, 1197.
- [2] J.A. Barceló, *Funciones de Banda Limitada*, Tesis doctoral dirigida por A. Córdoba, Universidad Autónoma de Madrid, 1988.
- [3] J.A. Barceló, A. Córdoba, *Band-limited functions:  $L^p$ -convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 2, 655–669.
- [4] J.A. Barceló, A. Ruiz, L. Vega, *Weighted estimates for the Helmholtz equation and some applications*, J. Funct. Anal. **150** (1997), no. 2, 356–382.
- [5] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*, McGraw Hill, 2006.
- [6] A. Carbery, M. Christ, J. Wright, *Multidimensional van der Corput and sublevel set estimates*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 981–1015.
- [7] A. Carbery, E. Romera, F. Soria, *Radial weights and mixed norm inequalities for the disc multiplier*, J. Funct. Anal. **109** (1992), no. 1, 52–75.
- [8] L. Carleson, P. Sjölin, *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc*, Studia Math. **44** (1972), 287–299.
- [9] E.T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 55 Cambridge University Press, New York 1965.
- [10] A. Córdoba, *The disc multiplier*, Duke Math. J. **58** (1989), no. 1, 21–29.
- [11] J.G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. **84** (1921), no. 1-2, 53–79.
- [12] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
- [13] C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9–36.
- [14] G.B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
- [15] G. Gigante, F. Soria, *On a sharp estimate for oscillatory integrals associated with the Schrödinger equation*, Int. Math. Res. Not., **24** (2002), 1275–1293.
- [16] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I.*, Distribution theory and Fourier analysis. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 256. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [17] N.N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover publications, New York, 1972.
- [18] J.E. Marsden, *Elementary classical analysis*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1974.

- [19] D. Müller, A. Seeger, *Regularity properties of wave propagation on conic manifolds and applications to spectral multipliers*, Adv. Math. **161** (2001), no. 1, 41–130.
- [20] J.D. Murray, *Asymptotic analysis*, Second edition. Applied Mathematical Sciences, 48. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [21] K. Rogers, *Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 12, 3543–3550
- [22] E.M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis*, Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984), 307–355, Ann. of Math. Stud., 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.
- [23] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [24] E.M. Stein, R. Shakarchi, *Measure theory, integration, and Hilbert spaces.*, Princeton Lectures in Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.
- [25] E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [26] P. Sjölin, *Fourier multipliers and estimates of the Fourier transform of measures carried by smooth curves in  $\mathbb{R}^2$* , Studia Math. **51** (1974), 169–182.
- [27] K. Stempak, *A weighted uniform  $L^p$ -estimate of Bessel functions: A note on a paper of Guo*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 2943–2945.
- [28] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Fourth edition. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
- [29] T. Tao, *Lecture notes 1 for Math 254B: Hausdorff-Young, statement of restriction conjecture*, 1999 (<http://www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/notes1.dvi>).
- [30] T. Tao, *A sharp bilinear restrictions estimate for paraboloids*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 6, 1359–1384.
- [31] P.A. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 477–478.
- [32] P.A. Tomas, *Restriction theorems for the Fourier transform*, Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1, pp. 111–114, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV, Part, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [33] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England; The Macmillan Company, New York, 1944.
- [34] T.H. Wolff, *Lectures on Harmonic Analysis*, University Lecture Series, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [35] A. Zygmund, *On Fourier coefficients and transforms of functions of two variables*, U Studia Math. **50** (1974), 189–201.