20 años de modelos ARCH: una visión de conjunto de las distintas variantes de la familia

DE ARCE BORDA, R.
Facultad de CC.EE y EE Dpto. Economía Aplicada, Universidad Autónoma de Madrid
Módulo E-XIV Dpcho 304. Universidad Autónoma de Madrid. 28049-Cantoblanco. Madrid.
Tfno. (0034) 91 397 4191. e-mail: rafael.dearce@uam.es

RESUMEN

En los primeros meses de 1982, Robert Engle revolucionaba el estudio de los modelos de volatilidad ampliando al campo de las estructuras cuadráticas las ya muy utilizadas pautas de la metodología Box-Jenkins, creadas en 1976. Desde entonces, se han escrito multitud de aportaciones sobre las distintas potencialidades de estos modelos, que ya se han convertido en herramienta cotidiana entre los interesados en modelizar comportamientos basados en la estructura. Algunos "surveys" sobre el tema refieren cientos de aplicaciones sobre este tipo de modelos incluidos en las más prestigiosas revistas académicas nacionales e internacionales. El presente artículo pretende hacer un breve repaso sobre los principales variantes técnicas formuladas sobre el modelo seminal de Robert Engle, haciéndose un breve recorrido histórico de sus principales especificaciones y principales puntos de preocupación a lo largo del tiempo. En él se refieren algunas conclusiones sobre la metodología ARCH y su empleo en general.

Palabras clave: heterocedasticidad condicional autorregresiva, modelos de volatilidad, modelos ARCH.

20 Years of Arch Modelling: a Survey of Different Models in the Family

ABSTRACT

In the early eighty's, Robert Engle shocked the field of Volatility Studies enlarging the domain of Quadratic Structures to a similar context of the Box Jenkins Methodology (1976). Several articles and working papers have been inspired in different possibilities using these sort of models that, nowadays, can be considered as a familiar analytical tool for financial operators and researchers in the field of Econometrics and quantitative financial analysis in general. Several surveys in this issue documents hundred of applications in economics studies in the most prestigious academic journals. This paper attempts to analyse the different technical performances of this sort of Econometrical Models through its History: more than twenty years; offering a comprehensive evolution and pointing out the differences in their specifications and in technical frames. Finally some personal considerations of ARCH empirical application and methodology in Applied Economics, are exposed.

Keywords: Autoregresive Conditional heroskedasticity, Volatility Models, ARCH Models.

Clasificación JEL: C52 C53 F31

Artículo recibido en septiembre de 2003 y aprobado en febrero de 2004.
La referencia ©lectrónica de este artículo en la página www.revista-eea.net, es ©-22105.

I. INTRODUCCIÓN

En los primeros meses de 1982, Robert Engle revolucionaba el estudio de los modelos de volatilidad ampliando al campo de las estructuras cuadráticas las ya muy utilizadas pautas de la metodología Box – Jenkins, creadas en 1976. Su artículo sobre la inflación en el Reino Unido y el nacimiento de los modelos de *Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva* -ARCH-, serían el brillante inicio de una cadena incesante de investigaciones en torno a la modelización de la varianza de las series temporales, de profundo interés para el mejor conocimiento de los mercados financieros, sector en el que se incluían quienes patrocinaron esta primera investigación. Veinte años después, los modelos ARCH ya forman parte de los la literatura econométrica convencional y están casi perfectamente integrados en los paquetes informático-estadísticos básicos y complejos.

Multitud de documentos se han escrito sobre distintas posibilidades de estos modelos, que ya se han convertido en herramienta cotidiana entre los interesados en modelizar comportamientos basados en la "estructura conocida progresivamente de la volatilidad". Algunos "*surveys*" hablan de cientos de aplicaciones integrados en las más prestigiosas revistas académicas nacionales e internacionales.

La originalidad de este tipo de modelos se encuadra en un antiguo punto de interés en la descripción del comportamiento económico. Es frecuente hablar de sucesos condicionados o de generación de expectativas a partir de los movimientos relativos que se produjeron en el pasado. Por ejemplo, es común relacionar inmediatamente la estabilidad o la inestabilidad en los mercados financieros con su comportamiento inmediatamente anterior; produciéndose fuertes ondas en la evolución de sus variables que, después de un "gran sobresalto" que dura más o menos días, tienden a retomar una senda de evolución tranquila. En este contexto una derivada inmediata en el pensamiento económico es que, en variables como éstas, el comportamiento en el momento actual responde a una expectativa generada sobre el valor de cambio producido en el momento precedente; es decir, a un valor esperado condicionado por la varianza del período anterior.

En la teoría clásica de series temporales (metodología de Box-Jenkins), el desarrollo estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario; es decir (en sentido amplio o débil) de un proceso con media constante, varianza constante y correlación entre dos observaciones distintas igual a la de otras dos cualquiera separadas por la misma distancia (mismo número de períodos).

En torno a la confirmación de la homocedasticidad de las series temporales (determinista o aleatoria), hay un nutrido conjunto de teorías y desarrollos matemáticos centrados en la diferenciabilidad de la serie temporal y en la existencia o no de raíces unitarias a partir de los conocidos contrastes de Dickey y Fuller, de Mackinon o de Phillips y Perron, por citar algunos. Sin embargo, el estudio de la evolución y determinantes de la varianza es un fenómeno menos extendido aunque, no modelizar adecuadamente una posible no constancia de este componente, puede suponer diversos problemas estadísticos cuando se estiman modelos econométricos (problemas ligados con la eficiencia de los parámetros estimados y su fuerte volatilidad originados por el amplio intervalo de confianza en el que se mueven, entre los más graves).

Determinar un patrón de comportamiento estadístico para la varianza es el cometido de los modelos Autorregresivos condicionales heterocedásticos: ARCH. Engle (1982a) es el autor de una primera aproximación a la varianza condicional del tipo que describiremos más adelante. Después de estos hay una amplia familia de sofisticaciones del modelo inicial que darán nombre a los modelos GARCH, IGARCH, E-GARCH, TARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH, LST ARCH,...

En el artículo seminal de los modelos ARCH, Engle cita tres situaciones que motivan y justifican la modelización de la Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (nombre por él mismo dado). Estas serían las siguientes:

1. En primer lugar, la experiencia empírica nos lleva a contrastar períodos de amplia varianza de error seguidos de otros de varianza más pequeña. Es decir, el valor de la dispersión del error respecto a su media cambia en el pasado, por lo que es lógico pensar que un modelo que atienda en la predicción a los valores de dicha varianza en el pasado servirá para realizar estimaciones más precisas.
2. En segundo lugar, Engle expone la validez de estos modelos para determinar los criterios de mantenimiento o venta de activos financieros. Los agentes económicos deciden esta cuestión en función de la información proveniente del pasado respecto al valor medio de su rentabilidad y la volatilidad que ésta ha tenido. Con los modelos ARCH se tendrían en cuenta estos dos condicionantes.
3. Por último, el modelo de regresión ARCH puede ser una aproximación a un sistema más complejo en el que no hubiera factores innovacionales con heterocedasticidad condicional. Los modelos estructurales admiten, en multitud de ocasiones, una especificación tipo ARCH infinita determinada con parámetros cambiantes, lo que hace a este tipo de modelos capaces de contrastar la hipótesis de permanencia estructural, una de las hipótesis de partida y condición necesaria para la validez del modelo econométrico tradicional.

En definitiva, la clave de estos modelos está en considerar la información pasada de la variable y su volatilidad observada como factor altamente explicativo de su comportamiento presente y, por extensión lógica, de su futuro predecible. Estadísticamente, esta conclusión se refleja en tener en cuenta la esperanza condicional (conocida y fija la información hasta el momento inmediatamente anterior) del cuadrado de una variable (la expresión de su varianza si su media es nula).

El presente artículo se estructura del siguiente modo: en primer lugar, se establecen los fundamentos básicos en los que se asientan los modelos ARCH, iniciándose seguidamente un análisis sobre la interpretación económica que se puede hacer de los mismos. Posteriormente se realiza un análisis de las principales variantes técnicas formuladas sobre el modelo seminal de Robert Engle, haciéndose un breve recorrido histórico de sus principales especificaciones y principales puntos de preocupación a lo largo del tiempo. En el punto cinco, se refieren algunas consideraciones sobre la metodología ARCH y su empleo en general y, finalmente, en el punto seis se establecen algunas conclusiones.

II. FUNDAMENTOS BÁSICOS PARA EL DESARROLLO DE LOS MODELOS ARCH

En este apartado, se pretende sintetizar los supuestos teórico-estadísticos básicos que centran la realización de modelos ARCH y sus variantes. Con ello, se quiere no sólo establecer el punto de partida de este tipo de modelos, sino también plantear las ecuaciones sobre las que posteriormente se irán aclarando distintos aspectos de la metodología propuesta por Engle.

Partiendo de los principios del análisis de las series temporales, comenzamos con la definición de un proceso estocástico estacionario como aquella sucesión ordenada de variables aleatorias cuya función de distribución es invariante ante valores igualmente separados:

$$Y_t^{\infty} \mid F(y_{t-\infty}, y_{t-1-\infty}, \ldots, y_t, y_{t+1}, \ldots y_{t+\infty}) =$$
$$F(y_{t+m-\infty}, y_{t+m-1-\infty}, \ldots, y_{t+m}, y_{t+m+1}, \ldots y_{t+m+\infty})$$

Como en la práctica es casi imposible conocer la verdadera función de distribución de muchos procesos aleatorios,. esta definición (que se conoce con el nombre de "estacionariedad en sentido fuerte") se suele confirmar sólo para el primer y los segundos momentos; es decir, para la media y la varianza del proceso. Según esta definición de "estacionariedad en sentido amplio o débil", un proceso estocástico sería estacionario cuando se cumplieran las tres condiciones siguientes:

1. $E(Y_t) = \mu$, ó media constante,
2. $Var(Y_t)=E(Y_t- \mu)^2=\sigma^2$, o varianza constante, y
3. $Cov(Y_t; Y_{t-j}) = Cov(Y_{t+m}; Y_{t+m-j})$, o covarianza igual para pares de observaciones igualmente distanciados.

Como es conocido, el "ruido blanco" es un caso particular de este tipo de proceso en el que las tres condiciones se reescribirían del siguiente modo:

1. $E(\varepsilon_t) = 0$
2. $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t- 0)^2 = \sigma^2_e$
3. $Cov(e_t; e_{t-j}) = 0 \quad \forall j \neq 0$

Sobre esta definición clásica de estacionariedad, conviene hacer algunas puntualizaciones estadísticas relativas a las segundas derivadas del proceso que estamos manejando:

A. El hecho de que no exista autocorrelación entre observaciones del ruido blanco desplazadas en el tiempo, no significa necesariamente que no haya dependencia entre estas de un modo no lineal. Lo único que aseguramos es precisamente eso: no podemos formular ningún tipo de dependencia lineal entre e_t y e_{t-j}; pero nada se dice al respecto de si puede haber una relación de dependencia cuadrática, exponencial o de cualquier otro tipo.

B. La lógica de la dependencia entre el ritmo de evolución en períodos precedentes y el valor de variación del período actual nos lleva necesariamente a hablar de probabilidades condicionadas en términos de estadística teórica o inferencial. Es a partir de los momentos de primer y segundo orden en términos condicionales como se pueden descubrir relaciones de causalidad entre series temporales que responden a un proceso estocástico estacionario para el contraste lineal.

En definitiva, <u>puede existir un proceso definido a partir de un “ruido blanco”, en el que la media y la varianza marginales sean constantes; y, al mismo tiempo, la media condicional puede ser constante y la varianza condicional no fija.</u>

Para confirmar este hecho, se propone el siguiente proceso:

$$y_t = \varepsilon_t(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} \qquad \textbf{Ec. 1}$$

- donde ε_t es un proceso de “ruido blanco” (entre otras, no hay correlación con su pasado, luego tampoco la hay con el pasado de y_t).
- El proceso generado y_t es también estacionario
- En los momentos condicionales, en “t”, el valor de “t-1” es una realización concreta conocida (no aleatoria).

Podemos calcular los valores de su esperanza y su varianza, no olvidando que, en los valores condicionales, los valores de la endógena en t-1 son realizaciones ya conocidas del proceso aleatorio, por lo que su valor esperando es el valor ya observado (no son variable aleatoria):

Cuadro 1: Momentos marginales y condicionales

	Marginal (incondicional)	***Condicional***
Esperanza	$E(y_t) = E(\varepsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2))^{1/2} =$ $= E(\varepsilon_t)E((\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} = 0$	$E_{t-1}(y_t) = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0$
Varianza	$E(y_t^2) = E(\varepsilon_t^2(\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)) =$ $= \sigma_\varepsilon^2(\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}^2));$ $h_t = E(y_t^2) = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1} h_\varepsilon$	$E_{t-1}(y_t^2) = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t^2);$ $\sigma_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2) h_\varepsilon$

Como resumen de lo expuesto en el Cuadro 1, es interesante resaltar que:

- la media (la esperanza) es contante en ambos casos, e igual a cero.
- La varianza marginal es constante; mientras que
- la varianza condicional depende de los valores que haya tomado $y^2_{t-1;}$ luego no es fija.

Se da la circunstancia de que, en este proceso, la función de autocovarianza es nula para todos los retardos que se quieran considerar; mientras que es distinta de cero para los valores al cuadrado del mismo proceso y_t generado.

La autocovarianza de y_t para el retardo t se podría calcular como:

$$\gamma(\tau)=E(y_t y_{t-\tau})=E(\varepsilon_t(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-\tau})=E(\varepsilon_t)E(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-\tau})=0 \quad \textbf{Ec. 2}$$

dado que el proceso lo hemos definido como estacionario y el residuo como "ruido blanco"; es decir, con correlación nula con periodos precedentes, lo que implica también correlación nula con los valores de y_t desplazados en el tiempo.

La función de autocovarianza para la serie al cuadrado presenta valores distintos de cero (por lo menos para el retardo uno) como se puede comprobar con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} cov(y_t^2 y_{t-1}^2) &= E((y_t^2-E(y_t^2))E(y_{t-1}^2-E(y_{t-1}^2))= \\ &= E(\varepsilon_t^2)E\left((\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2)-\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1})(y_{t-1}^2-\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)= \\ &= \left(\alpha_0 E(y_{t-1}^2)+\alpha_1 E(y_{t-1}^4)-\frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2}\right)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad \textbf{Ec. 3}$$

De la expresión de la Ec. 3, el único valor no calculado hasta el momento es el siguiente:

$$E(y_{t-1}^4)=E(\varepsilon_t^4(\alpha_0+\alpha_1 y_{t-1}^2)^2)=\left(\frac{\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2}\frac{3(1-\alpha_1)^2}{1-3\alpha_1^2}\right)(\sigma_\varepsilon^2)^2 \quad \textbf{Ec. 4}$$

Para este último cálculo se suponen dos cuestiones:

1. El ruido blanco se distribuye como una normal, por lo que podemos determinar el cuadrado de la varianza.
2. Además, y_t es un proceso estocástico estacionario; es decir, el parámetro a es menor que la unidad y, con ello, nos aseguramos de que $3\alpha_1^2<1$, y la expresión anterior es siempre calculable.

Sin pérdida de generalidad, todo el proceso se puede realizar con la hipótesis de que la perturbación aleatoria tiene desviación típica igual a uno.

Aplicando este resultado a la ecuación anterior y simplificando, podemos calcular la autocovarianza de orden uno del proceso y_t al cuadrado como:

$$\gamma_2(1) = \frac{2\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2(1-3\alpha_1^2)} \neq 0 \qquad \text{Ec. 5}$$

Con lo cual, el proceso y_t descrito, si bien no tiene autocorrelación en forma lineal, sí la tiene su forma cuadrática (el resultado de este último cálculo es siempre distinto de cero, luego hay correlación).

La clave de los modelos que vamos a estudiar está en la distinción entre los momentos condicionales y marginales ("incondicionales"). Entre ellos existe una relación que se conoce con el nombre de ley de expectativas iteradas que, usando la expresión de Ruíz (1994), podría definirse como: "la esperanza de la observación y_t, o de una función de ella, $g(y_t)$, condicional en información disponible en el momento t-τ puede calcularse tomando primero la esperanza condicional en información disponible en t-1, después calculando la esperanza condicional en t-2 y, así, sucesivamente hasta t-τ", es decir:

$$E_{t-\tau}(g(y_t)) = E_{t-\tau}(E_{t-\tau+1}(.....E_{t-1}(g(y_t))) \qquad \text{Ec. 6}$$

Para calcular la esperanza marginal, se puede dejar que t tienda a infinito.

III. INTERPRETACIÓN BÁSICA DE LOS MODELOS DE HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONAL

En esta sección nos apoyaremos en un proceso conocido con el nombre de GARCH, dado que este es una forma generalizada que recoge, como caso concreto, el ARCH (q). Nos centraremos en intentar definir de una forma más sencilla lo que se pretende realizar con la especificación GARCH (p,q) como primera aproximación de potenciales utilidades y sentido de toda la exposición ulterior.

En un modelo GARCH (1,1) hay dos ecuaciones:

- Una primera, donde se hace depender a la variable y_t del valor de su varianza multiplicada por un cierto término aleatorio que es "ruido blanco"

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t h_t \\ y_t &\rightarrow N(0, h_t) \\ \varepsilon_t &\rightarrow N(0,1) \end{aligned} \qquad \text{Ec. 7}$$

- Una segunda, alrededor de un valor medio, representado por el término constante a_0, donde se hace depender el valor actual de la varianza en el período "t" de los valores que esta haya tenido en el momento anterior (t-1) y de la fluctuación aleatoria que también se daba en el pasado. En definitiva, podríamos definir los tres términos como:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta \ h_{t-1} \qquad \textbf{Ec. 8}$$

- Media α_0: valor de iniciación en torno al cual se producirán ciertas variaciones. También puede entenderse como el valor medio a largo plazo sobre el que se genera la expectativa inmediata a ser modificada por los dos sumandos que después se detallan posteriormente.
- Sumando $\alpha_1 y_{t-1}^2$, innovación sobre la volatilidad que se produjo en el período anterior (término ARCH).
- Sumando βh_{t-1}: realización de la varianza en el último período histórico conocido (término GARCH).

El modelo ARCH (1), como simplificación del aquí presentado, sería un GARCH (0,1), donde no se tendría en cuenta la información sobre la última varianza de la endógena calculable; es decir, la varianza del período anterior.

Atendiendo a una interpretación más matemática o estadística, podríamos rescribir la especificación del modelo GARCH en dos formas distintas que nos permitirían dar un nuevo enfoque al desarrollo que estamos realizando:

1. En primer lugar, si hacemos una serie de sustituciones recursivas en la fórmula del modelo GARCH planteada, podríamos rescribir la varianza condicional como una media ponderada de todos los residuos al cuadrado del modelo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta \ \sigma_{t-1}^2 \\
&h_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta \ h_{t-2} \\
&\ldots\ldots. \\
&h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta \ (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}^2 + \beta \ h_{t-2}) = \ldots = \\
&= \frac{1}{1-\beta} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2
\end{aligned} \qquad \textbf{Ec. 9}$$

Con lo cual, tendríamos que la varianza condicional es el resultado de un valor medio constante sumado a una media ponderada decrecientemente de los valores de la varianza muestral en los períodos precedentes.

2. Si representamos el error en el valor esperado de la variable al cuadrado como $\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, podríamos rescribir nuevamente el modelo GARCH (1,1) del siguiente modo:

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \nu_t - \beta\nu_{t-1} \qquad \textbf{Ec. 10}$$

Según esta nueva formulación propuesta por Pantula (1986), el modelo GARCH (1,1), representa un proceso ARMA(1,1) heterocedástico para la serie de los errores al cuadrado. Algunos autores expresan que el proceso ARCH (q) no sería más que un proceso de medias móviles con parámetros cambiantes o variables (por ejemplo, Tsay (1987) o Bera (1992)).

IV. RECORRIDO HISTÓRICO Y PRINCIPALES VARIANTES DE LOS MODELOS ARCH

En el artículo seminal de Engle de 1982, se planteaba la determinación de un proceso generador de datos que se muestra incompleto cuando la estacionariedad se verifica tan sólo en términos marginales, obviando una estructura significativa de correlaciones en los segundos momentos de la serie (la varianza), que necesariamente deben ser tenidos en cuenta para la determinación final del proceso de formación de una serie temporal. Ante esta situación, se construye un sistema metodológicamente más completo en la especificación de una serie autoalimentada por su pasado. Las aportaciones de los años inmediatamente posteriores irán por el camino de completar y mejorar esta definición estadística (GARCH, ARCH en media, IGARCH, etc.)

A partir de entonces, llama particularmente la atención cómo la realidad y la lógica más básicas de un mercado financiero encuentran su equivalencia estadística con los modelos ARCH casi como si de un ejercicio de traducción se tratara. A partir de un esquema tan específico como el que planteaba Merton (1980) para la previsión del rendimiento de un activo financiero y la valoración de las opciones, la traslación de la incertidumbre (la expectativa) sobre el riesgo no mesurable a la esperanza de la volatilidad medida como varianza es un paso frecuentemente tratado en la literatura; como también lo es que en la formación de expectativas tiene un peso fundamental la información recibida del pasado y el error cometido en dicho pasado al preverla.

El intensivo empleo de los modelos tipo ARCH durante los años siguientes genera un gran número de aportaciones accesorias que, posteriormente, se derivarían estadísticamente (teóricamente) y no al contrario. Desde 1986, la evidencia empírica modelizada como una estructura ARCH, aunque incorporando nuevos términos en la especificación, va dando lugar a una incesante cascada de nuevas incorporaciones metodológicas.

A partir de los años 90, la corriente más *teoricista*, de la que son buenos representantes Engle, Bollerslev, Nelson, Gourrieoux o Hamilton, convive con un importante elenco de *aplicacionistas*, sobre todo a partir de las aportaciones realizadas desde diversas Reservas Federales estadounidenses. Glosten, Jagannatahan, Runkle, Susmel, Schwert, Ding e, incluso, Granger son buenos representantes de esta segunda tendencia que podríamos identificar con un proceso "de lo aplicado a lo teórico". Estaríamos, en este segundo caso, en un desarrollo "inductivo" frente al más común proceso "deductivo" que han experimentado otros planteamientos econométricos.

Las principales preocupaciones históricas en esta materia se han centrado en los siguientes aspectos:

- Dado el carácter positivo de la varianza por construcción estadística, es fundamental que los parámetros estimados sean positivos, por lo que asegurar tanto su posibilidad de cálculo (existencia de los momentos de segundo orden), como su restricción intrínseca (mayores que cero) ha centrado gran parte de los estudios complementarios en la "familia de los ARCH".

- Las particularidades de los mercados financieros y cambiarios han determinado búsquedas de modelos que sean capaces de reproducir no sólo la "volatilidad cambiante", sino también los posibles "efectos contagio" tan comunes en variables financieras. Se ha contrastado empíricamente el "hecho estilizado" de que, en este tipo de mercados, movimientos de fuerte intensidad suelen venir acompañados de otros de igual naturaleza hasta que, en un momento dado, la intensidad se reduce durante períodos consecutivos más o menos largos a su vez. Reproducir estadísticamente este hecho exige funciones no lineales, como ya lo es el modelo ARCH seminal; pero, con frecuencia, también exige funciones más complejas (exponenciales, logarítmicas, etc.). Determinar modelos capaces de recoger estos frecuentes cambios ha centrado varias aportaciones al desarrollo de los modelos ARCH.

- Desde las primeras aplicaciones realizadas por económetras diversos, lo que Engle bautizaba con el nombre de "shocks asimétricos en la varianza" ha preocupado en las investigaciones sobre los modelos ARCH. Es frecuente contrastar en las variables evoluciones de períodos al alza menos aceleradas que en períodos de caída, en cuanto a la evolución de las variables. Los modelos definidos como de "Régimen Cambiante" o de "Umbral" (*Threshold ARCH, Switching ARCH, ...)* plantean la complejidad estadística de este tipo de estructuras y las formas más "exactas" de realizar estimaciones sobre ellos.

- En un orden más academicista o de "purismo estadístico", otra vertiente natural de investigación en el campo de los modelos ARCH concierne a la integrabilidad de los procesos descritos. Con frecuencia, los parámetros que corresonden al proceso de la varianza condicional suman valores muy próximos a uno, haciendo que dejen de existir momentos superiores de este momento (que sean infinitos). En las formulaciones tipo IGARCH y de Memoria Larga se hace un detallado análisis del problema conocido como "persistencia en volatilidad".

En otro orden de cosas, en el terreno de la investigación de los modelos ARCH es fuente de controversia y de desarrollo continuo tanto los sistemas de estimación de este tipo de modelos como los métodos de contraste sobre su estructura y existencia.

El supuesto inicial de normalidad en la distribución de las variables aleatorias se ve quebrantado con frecuencia en las diversas aplicaciones que se realizan empleando el tipo de modelos que nos ocupan. Es fundamental la aportación de Woolridge y Bollerslev (1992) con su estimación de "cuasi-máxima verosimilitud, que permite lograr unos valores de la matriz de varianzas-covarianzas no sólo consistente, sino también eficiente sea cual sea la distribución que rija la perturbación aleatoria del modelo.

Desde la aparición del artículo de Engle (1982) este hecho ha sido motivo de fuerte controversia y la búsqueda de la forma más correcta de estimar los parámetros de un modelo tipo ARCH ha sido objeto de diversas investigaciones, siendo de destacar las siguientes:

- Estimadores por el Método Generalizado de los Momentos, propuesto por Rich y otros (1991). Estos estimadores manifiestan algunas ventajas evidentes (no requieren un conocimiento exacto de la función de distribución de las variables, su sistema resolutivo en más fácilmente tratable que el tedioso recurso iterativo de la máxima verosimilitud, Hansen y Newey proveen de un contraste de especificación intrínseco a la estimación y extremadamente útil, etc.). Desgraciadamente, el sistema cuenta con la desventaja de ser ineficiente frente al de máxima verosimilitud cuando la verdadera función de distribución es efectivamente una normal.

- La estimación de una función GED y las disquisiciones sobre la conveniencia de la t-student propuestas por Nelson (1991) para la determinación de los parámetros son concluisión lógica de la estructura muestral del error. Sin embargo, en trabajos como el de Engle y González-Rivera (1991) se demuestra que la ineficiencia relativa de emplear la función normal cuando la verdadera función de distribución es la t-student es muy pequeña.

- Con frecuencia se han propuesto estimaciones no paramétricas de los modelos tipo ARCH empleando *Kernels* o cadenas de Fourier. De ello se hacen eco Pagan y Schwert (1991). El primero (empleando *kernels*) plantea una media ponderada en la elección del estimador de la varianza condicional donde, la ponderación, se hace depender de la historia existente sobre el fenómeno; es decir, de sus momentos condicionales en el extremo de equiponderación para todas las observaciones pasadas. La propuesta sobre la matriz de ponderaciones se realiza a partir del Kernel Gaussiano de orden uno multiplicado por la matriz de diferencias de orden determinado de las observaciones hasta el período anterior al considerado en cada momento.

- En el caso de las cadenas de Fourier, se define el llamado estimador no paramétrico flexible de Fourier definido por Gallant (1981), donde la varianza condicional se representa por polinomios de bajo orden y términos trigonométricos construidos a partir de la información disponible en el período t sobre el pasado de la serie.

- Los estimadores propuestos hasta el momento basan sus resultados en la consistencia como principal objetivo, aunque sus autores suelen hacer hincapié en la pérdida de eficiencia que en ellos se produce. Centrando la importancia en dicha eficiencia de los estimadores obtenidos, destaca la aportación de Drost y Klaassen (1997). Estos autores basan su propuesta en el teorema LAN para los modelos de series temporales, logrando un método de estimación que no necesita imponer ninguna condición en los momentos de la serie.

- La posibilidad de escribir los modelos como un modelo de parámetros cambiantes es puesta de manifiesto por Juan del Hoyo (1992) como posible estimación del modelo ARCH a partir de la representación del proceso en el espacio de los estados, poniendo como ejemplo una aplicación del filtro de Kalman del modelo de coeficientes variables implícito en el modelo ARCH (1).

- Bollerslev y Wooldridge (1992) proponen una estimación cuasi-máximo verosímil, demostrando que para una determinada clase de modelos dinámicos parametrizados por los primeros y segundos momentos, el estimador cuasimáximo verosímil es asintóticamente normal. Los autores realizan una serie de experimentos de Montecarlo sobre los que concluyen la ventaja de este tipo de estimadores (medida por el sesgo cometido) frente a los estimadores máximo verosímiles. La conclusión fundamental es que los estimadores cuasimáximo verosímiles aplicados a los modelos ARCH son consistentes aun cuando la verdadera función de distribución no sea la normal.

Como resumen de todos los métodos de estimación propuestos (y quizá de ello se derive la utilidad de los modelos ARCH) la capacidad para explicar el componente de incertidumbre (valorada por los agentes financieros cuando determinan la exigencia de rentabilidad de un activo) es una variable que se puede construir de forma claramente significativa a partir de un supuesto de normalidad en la distribución empleada para la estimación de los parámetros, siempre y cuando, se cuente con una muestra suficientemente amplia y se emplee el método de estimadores cuasi-verosímiles.

En el mismo terreno de la distribución que rige las perturbaciones aleatorias que se modelizan, son de especial interés las disquisiciones teóricas hechas por Daniel Nelson en diversos artículos sobre la conveniencia de emplear una distribución tipo t-student. Sobre el mismo tema redundan Hamilton y Robert Engle y Victor Ng en diversos *papers* (todos ellos citados en el cuadro anterior). Engle y González-Rivera (1991) realizan un experimento de Montecarlo para cuantificar la pédida de eficiencia relativa en la estimación máximo verosímil cuando la verdadera distribución de la perturbación es una t-student o una gamma, definiendo una ratio que muestra una fuerte pérdida en el segundo de los casos (distribución gamma) y poco relevante en el primero.

Por supuesto, y como parte fundamental del cuerpo metodológico de una aportación econométrica, las investigaciones sobre los modelos ARCH han desarrollado un esquema propio de contrastación sobre su estructura, tanto respecto a la definición de la heterocedasticidad como a sus mediciones de ajuste en torno a la conocida como Curva de Impacto de las innovaciones previas (News Impact Curve, Engle y Ng (1993)), siendo de destacar a este respecto los contrastes sobre el sesgo de signo conjunto, positivo y negativo. Respecto a la capacidad predictiva del modelo, las aportaciones más empleadas en los modelos ARCH se deben a la propuesta de Hamilton y Susmel (1994). Un análisis con mayor profundidad de las variantes de contrastación ARCH superan con creces el objetivo de este artículo, por lo que se tratarán en ulteriores publicaciones.

Dicho todo esto, cabe ahora realizar un resumen de las distintas especificaciones realizadas sobre la varianza heterocedástica condicional autorregresiva, para lo cual, se plantea un proceso estocástico estacionario, en sentido débil, y condicionado a la información ya existente sobre su pasado del tipo $\varepsilon_t \,|\psi_{t-1} \Rightarrow N(0,h_t)$.

En el siguiente cuadro se muestran, de un modo esquemático, las principales aportaciones que se han venido realizando en la ecuación de formación de la varianza condicional heterocedástica a lo largo de estos diecisiete años de existencia de los modelos ARCH. En posteriores capítulos, se hará un pormenorizado análisis de la mayor parte de estas variantes.

Respecto a la utilidad y empleo de los modelos ARCH, existen, por lo menos, dos recopilaciones muy significativas sobre ello. Son las de Bollerslev y otros de 1992 y 1994. En ellas se citan más de cuatrocientas aplicaciones diferentes que se han producido en los primeros diez-doce años de existencia de este tipo de modelos. Con frecuencia, las aplicaciones se han centrado en el campo de la economía financiera y, más concretamente, en la aplicación de teorías tipo de valoración de riesgos en la construcción de carteras de inversión a partir de una conveniente modelización de la volatilidad o varianza.

Cuadro 2: Principales especificaciones de la “familia arch” a lo largo del tiempo

Año	*Nombre*	*Autor-es*	*Especificación de la varianza*	*Aportación principal*
1982	ARCH	Engle	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$	Primera especificación y desarrollo.
1983	Modelos ARCH Multivar.	Kraft y Engle	$H_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 H_{t-1}$ $\varepsilon_t = y_t - xb$	Incorporación de más variables explicativas y desarrollo de los modelos aplicando la matriz de varianzas-covarianzas (H_t).
1986	ARCH-M	Engle, Lilien y Robins	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$	Modelo ARCH incorporando la desviación típica heterocedástica modelizada como explicativa de la media.
1986	GARCH y GARCH en Media	Bollerslev	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 h_{t-1}$	Método generalizado sin restricciones para la estimación de los parámetros ARCH con infinitos retardos.
1986	LGARCH	Bollerslev y Taylor	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2$	Linealización del modelo GARCH-M
1986	MGARCH	Geweke y Pantula	$ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \, ln(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_2 \, ln(h_{t-1})$	Especificación de la varianza multiplicativa (linealizada con logaritmos).
1986	IGARCH	Engle y Bollerslev	$h_t = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha) h_{t-1}$	Persistencia en varianza condicional heterocedástica. Modelos integrados en varianza.
1989	EGARCH	Nelson	$log(h_t) = \alpha_0 + \beta_1 \, log(h_{t-1}) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha \left[\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{2\pi} \right]$	Modelos ARCH para procesos no normales (funciones de densidad exponenciales). Carácter asimétrico de la respuesta a shocks positivos o negativos.
1989	TS-GARCH	Schwert	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{h_{t-1}} + \alpha_2 \sqrt{h_{t-1}} \, \lvert \varepsilon_{t-1}^2 \rvert$	Corrección de efectos asimétricos en las variaciones al alza y a la baja.
1990	AGARCH NGARCH	Engle y Ng	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1} (\varepsilon_{t-1} - c)^2$	Contraste y solución de autocorrelación entre la perturbación aleatoria y su varianza.
1990	FACTOR ARCH	Engle, Ng y Rothschild	$H_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \beta_k' \lambda_{kt} + \Omega$	Empleo de la covarianza entre varias series temporales como explicativa de la varianza condicional heterocedástica.
1992	T-GARCH	Gourieroux Zakonian (1994)	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{h_{t-1}} + \alpha_2 \sqrt{h_{t-1}} \, \lvert \varepsilon_{t-1}^2 \rvert + \alpha \sqrt{h_{t-1}} \, max(0, \varepsilon_{t-1})^2$	Modelos dinámicos donde media y varianza condicionales son funciones stepwise endógenas.

Cuadro 2: Principales especificaciones de la "familia arch" a lo largo del tiempo (continuación)

Año	*Nombre*	*Autor-es*	*Especificación de la varianza*	*Aportación principal*
1993	GJR-GARCH	Glosten y Otros	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha h_{t-1}\, max(0, \varepsilon_{t-1})^2$	Diferenciación del parámetro en subida y en bajada.
1993	V-GARCH	Engle y Ng	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2(\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}} + c)^2$	Similar al NGARCH, con una variación mayor en los parámetros asimétricos.
1993	A-PARCH	Ding y otros	$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\lvert\varepsilon_{t-i}\rvert - \gamma_i \lvert\varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j}^\delta$	Se propone modelizar un valor potencial de la desviación típica que atienda al máximo de la función de autocorrelación del valor absoluto del proceso.
1994	Modelos ARCH de Régimen Cambiante	Hamilton y Susmel	$\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t / \sqrt{g_{st}}$ $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \tilde{\varepsilon}_{t-i}^2 + \xi d_{t-1} \tilde{\varepsilon}_{t-1}^2$ $si \quad \tilde{\varepsilon}_t \le 0 \quad d_{t-1} = 1$ $resto \quad d_{t-1} = 0$	Introducción de funciones de densidad que cambian de Normal a t-student a partir de cadenas de Markov. Parámetros ARCH cambiantes a partir de una matriz de "estado" o "régimen" de la variable en el período previo.
1995	Modelo GARCH Cuadrático Q-GARCH	Sentana	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \alpha_2(\varepsilon_{t-1} + \gamma\sqrt{h_{t-1}})^2$	Ligera variante sobre el modelo AGARCH y NGARCH de 1990.
1996	Modelo de memoria larga o "ARCH con componentes"	Ding y Granger	$h_t = w h_{1t} + (1-w) h_{2t}$ $h_{1t} = \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1-\alpha_1) h_{1t-1}$ $h_{2t} = h_t(1-\alpha_2-\beta_2) + \alpha_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 h_{1t-1}$	La varianza se especifica en dos partes: una con efectos importantes de muy corta duración en el tiempo y otra con efectos más discretos, pero persistentes en el tiempo.
1997	VAR-GARCH		$h_{(t,i)} = x'b + \alpha_i \varepsilon_{t-1,i}^2 + \beta_i h_{t-1,i}$ $\mathrm{i} = 1,2,...$ (nº variables del VAR)	Empleo de un VAR con residuos con heterocedasticidad condicional.
1997	ACD-GARCH	Ghysels, Eric and Jasiak, Joanna	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 h_{t-1}$ $v_{i+1} = \alpha_0^d + \alpha_1^i (t_{i+1} - t_i) + \beta v_i$	Modelo ARCH para muestras de datos con distintos intervalos de tiempo en cada observación.
1998	Logistic Smooth Transition ARCH (LST-ARCH)	González-Rivera	$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \left[\alpha_{1j} + \alpha_{2j} F(\varepsilon_{t-j})\right] \varepsilon_{t-j}^2$ $F(\varepsilon_{t-j}) = (1 + exp\left[-\theta_{t-j}^2 \varepsilon_{t-j}\right])^{-1} - \frac{1}{2}$	Caso generalizado del modelo GJR. El empleo de una ecuación de estado logística genera diferentes resultados en función del signo de la innovación en el período precedente.

V. CONSIDERACIONES SOBRE LOS MODELOS ARCH

En este artículo, se ha pretendido realizar un recorrido histórico sobre las distintas variantes de los modelos ARCH. En el marco descrito, sería conveniente realizar algunas consideraciones específicas que se agruparían en torno a tres grandes líneas: (a) la adecuación de las distintas especificaciones alternativas a las realidades empíricas observables en los mercados financieros; (b) consideraciones sobre la metodología econométrica y (c) otras posibilidades en el entorno de los modelos de varianza condicional.

A. Adecuación de las distintas especificaciones alternativas a las realidades empíricas observables en los mercados financieros

La ventaja de los modelos tipo ARCH para recoger elementos económicos recurrentes en las series financieras (*stilized facts*) es evidente. Factores hartamente estudiados encuentran claro reflejo en este tipo de modelos:

- En primer lugar, la importancia de la volatilidad en la medición del riesgo y las implicaciones de este a la hora de determinar el diferencial de rentabilidad que se le exige a un activo no seguro sobre el activo público libre de riesgo.
- En segundo lugar, los factores de “contagio financiero” (períodos volátiles vienen precedidos de otros del mismo modo y períodos tranquilos de períodos del mismo tipo) quedan perfectamente descritos con estos modelos no lineales.
- Por último, el carácter asimétrico -*leverage*- de la respuesta ante sobrevaloraciones o infravaloraciones de los rendimientos esperados también queda plenamente modelizado.

A juicio de Rich y otros (1991), los modelos ARCH son tan profusamente utilizados en finanzas fundamentalmente por dos razones:

- En primer lugar, se centran en la estimación de la evolución temporal de la varianza condicional, directamente entroncada con la parte no predecible de las series temporales, claramente mejor medida del riesgo y de la incertidumbre que otras variables “proxi” para la volatilidad.
- En segundo lugar, las propiedades estadísticas de los modelos ARCH parecen ser una descripción exhaustiva y adecuadamente parca (*parsimonious*) del comportamiento de muchas series financieras.

De hecho, la preocupación de la modelización tipo ARCH por contemplar algunas situaciones habituales en el funcionamiento de las variables financieras ha encontrado un nicho metodológico de extraordinario desarrollo. Parcelas empíricas como la necesaria corrección estacional del residuo, ante las evidentes diferencias de los meses y días de la semana por su volatilidad observada, eran un punto que necesariamente debía incluirse y sistematizarse en la generación de la varianza condicional. El agente económico, al formar sus expectativas y observar una determinada volatilidad, tiene en cuenta el pasado ya conocido (principio en el que se fundamenta el desarrollo teórico planteado) y, además, es consciente de diferentes situaciones que pueden afectar al rendimiento en función del mes del año en que nos encontremos.

Otro carácter de crucial importancia en los modelos que se han revisado, y más en los mercados en los que se utilizan, es el efecto asimétrico llevado a la generación de la volatilidad. Es un hecho constatado que ante una infravaloración de un rendimiento, el agente es cauteloso y se va convenciendo despacio y progresivamente de este hecho y su mantenimiento en el tiempo. Sin embargo, ante una sobrevaloración del rendimiento, la reacción correctora es casi inmediata y de forma drástica. Dicho esto, la discriminación en los resultados de conocer una información del pasado sabiendo también su signo es una necesidad clara en la modelización de los rendimientos de los activos financieros a la que los modelos planteados responden de un modo adecuado. El ajuste a la realidad con la inclusión de una variable que discrimina según el signo del error cometido en el período precedente se ve enormemente mejorado.

B. Consideraciones sobre la metodología econométrica

Una vez se ha puesto de manifiesto la adecuación de la modelización tipo ARCH, es interesante reflexionar inicialmente sobre la forma funcional elegida. Con ello, hacemos referencia a un planteamiento tan viejo como los propios modelos ARCH, por cuanto el mismo Engle (1982) ya propone en su artículo pionero modelizaciones del logaritimo del valor absoluto del residuo o del mismo valor absoluto de la serie. Sin embargo, parece que este hecho deja de ser motivo de investigación durante un largo período de tiempo, dedicándose las aplicaciones a estudiar únicamente modelos basados en la forma de la varianza: es decir el cuadrado.

Nelson (1991) despierta de nuevo la discusión y el interés por el tema cuando nos pone en guardia sobre la propagación de un sistema de estimación que, con frecuencia, se utiliza sin las debidas precauciones. La estimación “en serie” de modelos ARCH en los mercados financieros degenera su contrastación hasta el punto en el que, su utilización a cortísimo plazo, no presta especial interés a unos valores de los parámetros que originan valores de la varianza negativos cuando se amplía el horizonte de predicción. La aportación de Nelson es en este sentido fundamental para corregir resultados potencialmente absurdos en la aplicación de esta técnica econométrica.

En los años noventa, Ding y Granger trabajan nuevamente en el campo de la determinación de cuál es la forma funcional sobre la que se debe especificar el modelo. Más concretamente, cuestionan por qué necesariamente se debe especificar la varianza sobre valores al cuadrado en el período de estimación, cuando multitud de experimentos muestran estructuras de correlación del valor absoluto de los residuos con potencias diferentes de dos mayores que los que se obtienen para éstas. La lógica del planteamiento lleva a generar un nuevo tipo de modelos de potencias asimétricas que servirá de base a diversas aportaciones posteriores.

Una vez constatada la existencia de autocorrelación en valores transformados del residuo estacionario de una regresión (valores absolutos, potencias de este, cuadrados, etc.), y desde el punto de vista estadístico, sería muy positivo conocer la forma en la que se distribuye esa serie del residuo transformada. Aunque la forma más fácilmente reproducible es la de la normal, varias situaciones nos llevan a pensar que la función de distribución de la serie de los momentos de órdenes superiores debe ser diferente:

- El primer indicio proviene de la contemplación del histograma de frecuencias, que resulta difícilmente aproximable a una normal. Los coeficientes de curtosis y de asimetría también son indicios razonables de la no normalidad de las series a las que habitualmente se trata con modelos ARCH.
- El segundo elemento que nos hace cuestionarnos la función de densidad proviene de la consideración normal de los residuos originados en la regresión inicial. Una transformación potencial de dichos residuos por definición no puede seguir compartiendo una función de densidad de este tipo por ser una transformación no lineal.

Por supuesto, para la estimación paramétrica el conocimiento exacto de la verdadera función de distribución que se intenta maximizar aumentará la consistencia de los coeficientes calculados, y, tal como se ha comentando en varias ocasiones, la forma funcional de la densidad condicional y marginal de las variables financieras es claramente no normal: es ligeramente asimétrica y mucho más apuntada (leptocúrtica) que lo que correspondería a una distribución gausiana.

Desde la aparición del artículo de Engle (1982) este hecho ha sido motivo de fuerte controversia y la búsqueda de la forma más correcta de estimar los parámetros de un modelo tipo ARCH ha sido objeto de diversas investigaciones, expuestas en la sección IV de este artículo.

Como resumen de todos los métodos de estimación propuestos (y quizá de ello se derive la utilidad de los modelos ARCH) su capacidad para explicar el componente de incertidumbre que valoran los agentes financieros cuando determinan la exigencia de rentabilidad de un activo concreto es una variable que se puede construir de forma claramente significativa a partir de un supuesto de normalidad en la distribución empleada para la estimación de los parámetros y, siempre y cuando, se cuente con una muestra suficientemente amplia y se emplee el método de estimadores cuasi-verosímiles (ver Bollerslev y Wooldridge (1992)).

En otro orden de cosas, como ha quedado de manifiesto en multitud de aplicaciones tipo ARCH realizadas desde 1982[1], la estimación a partir de valores de la t-student o de la de Distribución Generalizada de los Errores propuestos por Nelson (1991) no mejoran significativamente los resultados obtenidos en la modelización de series de tipo financiero, dando lugar a una mayor complejidad en la estimación (cuando menos, exigen la estimación de un coeficiente más: los grados de libertad del modelo).

En casos concretos aplicados a modelos sobre índices bursátiles[2], como mejor estimador de la varianza condicional, o del nivel de la incertidumbre de los mercados financieros que ésta representa, los resultados de emplear una distribución distinta a la normal se han demostrado inútiles en casi todos los casos, sin apreciarse ningún tipo de mejoría a juzgar por los contrastes de bondad practicados. Especial mención exige el hecho de que la modelización en logaritmos propuesta en el modelo E-GARCH tampoco ha supuesto una mejora significativa. Sobre este hecho, quizá la circunstancia de modelizar la diferencia de los logaritmos de la serie original haya dado lugar a una corrección previa que ha invalidado la presunta mejoría que desde el campo teórico se le adjudica a los modelos exponenciales.

Adicionalmente, y desde un punto de vista metodológico, conviene resaltar:

- por una parte, que los sistemas de estimación de los modelos ARCH, a la fuerza iterativos a partir de un algoritmo de *Scoring* (el más habitual) o, de un modo algo más correcto, de un algoritmo tipo Berndt-Hall-Hall-Haussman, son extremadamente sensibles a los valores de inicialización en dichos mecanismos repetitivos.

- Y por otra, y como un defecto adicional de este tipo de modelos, es necesario recalcar como las investigaciones se han centrado en la búsqueda de un estimador asintóticamente consistente, mientras que a la eficiencia del estimador no se le ha prestado especial atención.

C. Otras posibilidades en el entorno de los modelos de varianza condicional

A pesar de que la primera aplicación de los modelos tipo ARCH se hacía sobre la serie de la inflación en el Reino Unido, son los empleos en el campo del seguimiento de las series financieras los que han marcado la pauta en la evolución de este tipo de especificaciones. Sin embargo, no hay que olvidar otras posibilidades que nos brinda el cuerpo metodológico expuesto.

En primer lugar, la estimación consistente de la varianza es un logro en este tipo de modelos y, de cara a investigaciones futuras, conjugar este hallazgo con una con-

1. Ver Bollerslev (1994).
2. De ello se puede encontrar referencias en la tesis doctoral de Rafael de Arce.

secución de métodos tendentes a lograr la eficiencia es un paso adelante en el terreno de la precisión de cuantos modelos se basen en funciones de distribución en las que esté implícita una valoración de la varianza.

En diversos artículos aparecidos recientemente, la técnica estudiada en el presente artículo sirve de apoyo y complemento en otras métodos de estimación, tales como los modelos VAR o los modelos de integración fraccionada tipo FI-GARCH. En el campo de los modelos multivariantes, los modelos ARCH se muestran especialmente útiles para la estimación de la matriz de covarianzas de los estimadores.

En el terreno de la modelización aplicada a las series macroeconómicas, la valoración de la incertidumbre es un factor explicativo de diversas variables, tales como la inversión, la formación de los precios, la determinación de los tipos de cambio, la evolución del empleo, la valoración de los salarios, los indicadores de previsión de cartera, de pedidos, etc. En todas estas variables, un conocimiento mejor del mecanismo de formación de las expectativas seguramente resultará útil para definirlas.

Por supuesto, y como ya ha quedado puesto de manifiesto en varias ocasiones, los modelos ARCH presentan ventajas especialmente significativas en la modelización de series de alta frecuencia, tanto por sus buenas propiedades asintóticas como por su capacidad razonable para predecir el corto plazo. Sin embargo, este tipo de modelos se han demostrado ineficientes para la determinación de fenómenos a largo plazo, por lo que quizá sus empleos alternativos deban ceñirse más al campo de la coyuntura económica que al medio y largo plazo.

Cabe destacar algunas conclusiones derivadas del artículo de Nelson (1993): "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I: Getting the Right Variance with the Wrong Model", centrado en que, efectivamente, un proceso ARCH puede dar lugar a una buena estimación de la varianza condicional en tanto en cuanto se pueda aproximar a un proceso de difusión; es decir, en tanto se pueda equiparar a un sistema continuo acotable en intervalos de longitud "h" de forma que, a medida que el valor de "h" tiende a cero, la diferencia entre un valor estimado con cierta carencia de información (infra-especificado) y el valor real de la varianza condicional es cero. Este hecho es fácilmente alcanzable cuando se trabaja con datos de muy alta frecuencia, tales como los diarios de los índices , y partiendo de ciertos supuestos que hacen que los procesos ARCH funcionen como filtros de los estimadores de procesos de difusión.

La contraparte de este hallazgo es que, tal y como se ha comentado, hacer "lo bueno con lo malo" está condicionado a procesos con multitud de observaciones donde se pueda simular una diferencia infinitesimal entre dos observaciones, es decir una longitud "h" muy pequeña. Los resultados serán entonces buenos para el corto plazo y, paradójicamente malos en el medio y largo plazo.

A la luz del desarrollo de lo descrito por Nelson, los modelos aplicados resultan útiles para obtener una buena aproximación de la volatilidad incluso si la especificación no fuera perfecta, por lo que cobra especial sentido el desarrollo y explotación de los resultados de esta volatilidad estimada fuera incluso del marco de la función causal a partir de la cual se obtuvieron dichos resultados.

La modelización ARCH es susceptible de mejorar la calidad de algunos indicadores cualitativos de uso intensivo en el seguimiento de los mercados financieros, tales como el RSI comentado. Evidentemente, todos los indicadores basados en la determinación de cambios probables en la evolución de la tendencia de una serie financiera admiten una mejora inmediata si los valores marcados como puntos de inflexión se calculan de forma más apropiada; es decir, si la desviación típica efectivamente estimada es una buena aproximación de la realidad[3].

En el caso del ejemplo que desarrollábamos anteriormente, la aplicación de las decilas al recorrido de la serie de la volatilidad nos permite valorar de una forma muy intuitiva el riesgo en el que incurrimos en cada momento en función de los valores registrados por la volatilidad del activo que estemos valorando. En función de la evolución de la volatilidad puntual podemos conocer si ésta representa un valor extremo o no en función de los valores registrados en el pasado.

VI. CONCLUSIONES

De todo lo dicho se desprende un camino abierto en la modelización no solo financiera sino de los diversos acontecimientos económicos en los que la estimación de las expectativas juega un papel preponderante.

Quizá se pueda plantear si el esfuerzo modelizador que representa un modelo ARCH incorpora una ganancia en resultados suficiente como para salvar su complejo mecanismo de aplicación. Sobre este particular, señalaría las siguientes cuestiones:

- Las diversas aplicaciones consultadas nos muestran unos resultados de estimación en el terreno del modelo sobre la media que apenas se ven modificadas por la correcta estimación de la varianza que se sigue del empelo de los modelos tipo ARCH. Los parámetros obtenidos para el modelo de la media apenas cambian si se modeliza la varianza a partir de un ARCH.
- Además, la falta de desarrollos conducentes a la eficiencia de la varianza calculada generan dudas razonables sobre el valor estimado con el procedimiento descrito.
- Sin embargo, la validez de la volatilidad condicional como explicativa de la prima de riesgo se pone claramente de manifiesto con este tipo de modelos y, sólo con ellos, se puede obtener el parámetro que nos indica su importancia exacta en el modelo de regresión planteado.
- Por otro lado, saber que la volatilidad estimada es acertada, incluso con un modelo mal especificado, es una garantía de que su uso aislado -al margen del modelo sobre la media- es una buena aproximación del riesgo (por ejemplo, para realizar un indicador cualitativo como el planteado).

- Por otro lado, el uso frecuente de los modelos ARCH en mercados financieros obliga a realizar un conocimiento apropiado de sus limitaciones y de sus capacidades, de cara a mejorar su aplicación.
- Ha quedado plenamente de manifiesto la bondad de estos modelos para describir el corto plazo, por lo que deben circunscribirse a éste y ser completados con otras especificaciones de tipo estructural que permitan realizar prospectiva a medio y largo plazo.

En definitiva, el análisis de los modelos ARCH es intrínsicamente positivo por cuanto nos da una visión histórica que de otra forma no sería asumible y que es susceptible de mejorar nuestras perspectivas para el futuro a partir del análisis del pasado. Como todas las herramientas en el terreno de la cuantificación de las Ciencias Sociales, parece patente que es mejor disponer de ellas que no, aunque su utilidad está precisamente en valorar sus resultados convenientemente, de forma que sean una guía a completar por la prudencia de quien la utiliza.

BIBLIOGRAFÍA

BABA, Y, ENGLE, R., KRAFT, D y KRONER, K(1987): *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH.* Manuscrito, Universidad de California, San Diego, CA.

BAILLIE, R. y BOLLERSLEV, T (1992a): *Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances.* Journal of Econometrics, 52. Pgs: 91-113.

BAILLIE, R.T. y BOLLERSLEV,T (1992b): *Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances*. Journal of Econometrics, 58, Pgs: 565-585

BAILLIE, R. y BOLLERSLEV, T. (1989): *The message in Daily Exchange Rates: A conditional Variance Tale.* Journal of Business and Economics Statistics 7. Pgs: 297-305.

BELSLEY, D. (1979) "*On the efficient Computation of Non-linear Full-Information Maximum Likelihood Estimator* Paper presentado en en Hallazgos Econométricos de la Sociedad Econométrica, Atenas.

BERA, A.K.; HIGGINS, M.L. y LEE, S. (1992): *Interaction between Autocorrelation and conditional Heterokedasticity: a Random Coefficient Approach* Journal of Business and Economic Statistics, 10, Pgs.:133-142.

BERNDT, E. HALL B., HALL R. y HAUSMAN, JA (1974):*Estimation Inference in nonlinear Structural Models* Annals of the Economic and Social Measurement, 4. Pgs: 653-665.

BOLLERSLEV, T. ENGLE, R. y NELSON, D (1994): *ARCH Models..* Robert Engle y D. McFadden editores. Handbook of Econometrics, Vol IV. Elservier, Amsterdam.

BOLLERSLEV, T, CHOU, R y KRONNER, K (1992): *Arch Modelling in Finance: A review of the Theory and Empirical Evidence.* Journal of Econometrics, 52. Pgs: 5-59.

BOLLERSLEV, T. y WOOLRIDGE, J (1992): *Quasi-maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances.* Econometric Reviews, 11.2. Pgs: 143-172.

BOLLERSLEV, T. (1986): *Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity,* Journal of Econometrics, 51. Pgs: 307-327.

BOX PIERCE (1970): *Distribution of Residual Autocorrelationsin Autorregresive and Moving Averages Time Series Models*. Journal of the American Statistical Association, 65 1509-26.

BREUSCH,T.S.(1978): *Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models.* Australian Economics Papers, 17, pgs. 334-355.

BRUNETI, C. y GILBERT,C. (1999): *Bivariate FIGARCH and Fractional Cointegration.* FEWEC, Vrije Universiteit Amsterdam, GAMW London and CEPR, Documento de trabajo.

CAMPBELL, A. (1993): *Intertemporal Asset Pricing without Consumption Data*. American Economic Review, 83. Pgs: 487-512.

CAMPBELL, J. (1987): *Stock Returns and Term Structure.* Journal of Financial Economics, 18. Pgs:373-399.

CHEN, N. ROSS, R. Y ROSS, S. (1986): *Economic Forces and the Stock Market*. Journal of Business, 59. Pgs: 383-403.

CHINRONG,A y McFADDEN, D. (1997): *Estimation of some partially specified nonlinear models.* Journal of Econometrics, 76. Pgs: 1-37.

DAY, T. y LEWIS,C (1992): *Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options.* Journal of Econometrics, 52. Pgs: 267-287.

DEMOS, A y SENTANA, E (1998): *Testing for GARCH effects: A one-sided Approach.* Journal of Econometrics, 86. Pgs: 97-127.

DICKEY, D y FULLER (1979): *Distribution and Estimators for Autoregressive Time Series with an Unit Root.* Journal of the American Statistical Association, 77. Pgs: 427-431.

DING, Z. y GRANGER, CWJ (1996): *Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Aproach*. Journal of Econometrics, 73. Pgs: 185-215.

DING, Z. GRANGER, W.J. y ENGLE,R (1993): *A long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*. Journal of Empirical Finance, 1. Pgs: 83-106.

DE ARCE, R. (1998): Introducción a los Modelos ARCH. Documento de Trabajo del Instituto de Predicción Económica LR Klein 98/6.

DE ARCE, R. (2000): Modelización ARCH: Estimación de la volatilidad del IBEX-35. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid octubre de 2000.

DOLADO, JENKINSON Y SOSVILLA-RIVERO (1990): *Cointegration and Unit Roots: a survey* Banco de España, Servicio de Estudios. Doc. Trabajo nº 90005.

DROST, F y C. KLAASSEN (1997): *Efficient Estimation in Semiparametric GARCH Models.* Journal of Econometrics, 81. Pgs: 193-221.

ENGLE, R. Y NG,V. (1993): *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility.* Journal of Fiannce, 48. Pgs: 1749-1778.

ENGLE, R. Y GONZALEZ-RIVERA,G. (1991): *Semiparametric ARCH Models.* Journal of Business and Economic Sttistics, 9. Pgs: 345-359.

ENGLE, R y GONZALEZ-RIVERA (1990): *Semiparametric ARCH Models*. Manuscript, USCD Department of Economics.

ENGLE, R. NG, V. Y ROTHSCHILD, M. (1990): *Asset Pricing with a FACTOR-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills.* Journal of Econometrics, 45. Pgs: 213-237.

ENGEL, C. Y HAMILTON, J (1990): *Long Swings in the dollar: Are they in the Data and Do Markets know it?.* The American Economic Review, September 1990.

ENGLE, R. (1987b): *Multivariate ARCH with factor Structures: Cointegration in Variance.* Universidad de California, San Diego, CA.

ENGLE, R.F., LILIEN D.M y ROBINS, (1986): *Estimating the Time Varying Risk Premia in the Term Structure"* Econometrica, 55, Pgs.:391-407.

ENGLE, R y BOLLERSLEV, T. (1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variance* Econometric Reviews 5, 1-50 y 80-87.

ENGLE, R.F. (1982a): *Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation* Econométrica, 50. Pgs: 987-1008

GALLANT, R. y HSIEH, D. TAUCHEN, G.(1997): *Estimation of Stochastic Volatility Models with Diagnostics*. Journal of Econometrics, 81. Pgs: 159-192

GEWEKE, J. Y PANTULA, S.(1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variances: a comment.* Econometric Review, 5. Pgs: 57-61 y 71-74

GHYSELS, E, Y JOANNA JASIAK (1997):*GARCH for Irregularly Spaced Financial Data:*

The ACD-GARCH Model. Cirano, Serie Scientifique, 97s-06

GLOSTEN, L . JAGANNTHAN, R. y RUNKLE, D. (1993): *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks.* Journal of Finance, 48. Num: 5. Pgs: 1779-1801.

GLOSTEN, L. y RUNKLE, D. (1988): *On the Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Returns on Stocks.* Research Dpt. Working Paper, 505. Federal Reserve of Minneapolis.

GODFREY,LG. (1978): *Testing Against General Autoregressive and Moving Average Models when the Regressors include Lagged Dependent Variables*. Econometrica, 46, pgs. 1293-1302.

GONZALEZ-RIVERA, G. (1998), Smooth transition GARCH models, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 3, Pgs: 61-78.

GOURIEROUX, C. y MONTFOR, A. (1992): *Qualitative Threshold ARCH Models.* Journal of Econometrics, 52. Pgs: 159-199.

GRANGER, C. y CHOR YIU SIN (1999): *Modelling the Absolute Returns of Different Stock Indices: Exploring the Forecastability of an Alternative Measure of Risk.* University of California San Diego UCSD 9912. Documento de trabajo, diciembre de 1999.

GRANGER, CWJ (1980): *Long Memory relationships and the Agregation of Dynamic Models.* Journal of Econometrics, 14. Pgs: 227-238.

HAMILTON,J (1994): Contrastes de Especificación en modelos de series temporales markov-cambiantes. Cuadernos Económicos del ICE, 56. Pgs: 42-70.

HAMILTON, J. Y SUSMEL, R. (1994): *Autorregresive Codnitional Heroskedasticity and Changes in Regime.* Journal of Econometrics, 64. Pgs 307-333.

HAMILTON, JD y SUSMEL,R. (1990): *Autoregressive Conditional Heterocedasticity and Changes in Regime* Journal of Econometrics, 64. Pgs: 307-333.

HAMILTON,J (1989): A new Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica, 57.2. Pgs: 357-384.

HAMILTON, J. y SUSMEL,R. (1989): *Autoregressive Conditonal Heteroskedasticity and Changes in Regime.* Journal of Econometrics, 64. Pgs: 307-333.

HAMILTON,J (1988): *Rational Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime.* Journal of Economics Dynamics and Control, 12. Pgs: 385-423.

HARVEY, AC (1981): *The Econometric Analysis of Time Series.* Oxford: Phillip Alan.

HAUSMAN, JA (1978): *Specification Test on Econometrics.* Econometrica, 46. Pgs: 1251-1272.

HE and TERÄSYVIRTA *(2002): An application of the analogy between vector ARCH and vector random coefficient autoregressive modelsChangli* Scandinavian Working Papers in Economics, nº 516.

HOYO, J (1993): *Guía para la estimación de modelos ARCH.* Revista Estadística Aplicada, 32. Comentarios. Pgs: 49-57.

KIM, C. (1994): *Dynamic Linear Models with Markov Switiching* Journal of Econometrics, 60. Pgs: 1-22.

KRAFT, D. Y ENGLE,R. (1982): *Autoregresive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series Models.* USCD, Discussion Paper Núm. 82-23.

LAMOUREUX Y LASTRAPES (1990): *Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model.* Journal of Business and Economic Statistics, 8. Pgs: 225-234.

LINTNER, J (1965): *The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets* Review of Economics and Statistics, 47. Pgs: 13-37.

L-JUNG-BOX (1978): *On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models.* Biometrika, 66 67-72.

MACKINLAY, M. (1987): *On the Multivariate Test of CAPM*. Journal of Financial Economics, 18. Pgs:341-372.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley, New York.

Mc CURDY,T. y STENGOS,T (1992): *A Comparison of Risk-premium Forecasts Implied by Parametric versus Nonparametric Conditional Mean Estimators.* Journal of Econometrics, 52. Pgs: 225-244.

MENELAOS, K. (2000): *The Covariance Structure of the S-GARCH and M-GARCH Models.* University of York. Documento de Trabajo Y010 5DD UK.

MILHOJ, A. (1984): *The Moment Structure of ARCH Processes*, Research report 94. Institute of Statistics of Copenhagen, Copenhagen.

NELSON (1993): Filtering and Forecasting with misspecified ARCH models I: Getting the right variance with the Wrong Model*. Journal of Econometrics, 52. Pgs: 61-90.*

NELSON, D.B. (1991): *Conditional Heterocedasticity in asset returns: a New Approach”* Econometrica, 59, Pgs: 347-370

NEUMANN, J. VON (1941): *Distribution of the Ratio of the Mean Square Sucessive Difference to the variance.* Ann. Math Stat. Vol. 12 pgs: 367-395

NEWEY, W (1985): *Maximum likelihood Specification Test and Conditional Moments Tests.* Econometrica, 53. Pgs: 1047-1069.

PAGAN, A. Y SCHWERT, W. (1990): *Alternative Models for Conditional Stock Volatility.* Journal of Econometrics, 45. Pgs: 267-290.

PANTULA, SG (1986): *Modelling the Persistence of Conditional Variance: A comment.* Econometrica Reviews, 5. Pgs: 71-73.

PANTULA, SG (1984): *Autoregresive Conditionally Heterocedasgtic Models.* Manuscrito no publicado. Universidad de Carolina del Norte, Dpto. de Estadística.

PEREZ AMARAL, T (1993): *Contrastes m y de la matriz de información dinámica con una aplicación a regresión lineal.* Estadística Española.

PÉREZ, J y C. MURILLO (1997): *Contrastes de Especificación para los modelos de varianza heterocedástica condiconada”* Estudios de Economía Aplicada, 7. Pgs: 101-129.

PERRON, P. (1989): *The Great Crash, the Oil Price Shock and the Unit Root Hypothesis.* Econometrica, 57. Pgs: 1361-1401.

POSKITT, D.S y TREMAYNE,A.R. (1987): *Determining a Portfolio of Linear Time Series Models*. Biometrica, 74, pgs. 125-137.

POTERBA, JM y SUMMERS, LH (1986): *The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations* American Economic Review, 76. Pgs: 1142-1151.

RICH, R. J.RAYMON y J. BUTLER (1989): *Generalized Instrumental Variables Estimation of Autoregressive Conditional Heteroskedastic Models*. Economics Letters, 35. Pgs: 179-185.

ROSS, S. (1976): *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.* Journal of Economic Theory, 13. Pgs: 341-360.

RUÍZ, E. (1993): Modelos para series temporales heterocedästicas *Cuadernos Económicos ICE, 56, Pgs: 73-108*

SCHWARZ, G. (1978): *Estimating the dimension of a Model.* Annals of Statistics, 6 464-464.

SCHWERT, GW. (1989): *Why does Stock Market Volatility Change over Time?* Journal of Finance, 44. Pgs: 1115-1153.

SENTANA, E. (1995): "Quadratic ARCH models," Review of Economic Studies, 62, Pgs: 639–661

SHARPE, W. (1964): *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk* Journal of Finance, 19. Pgs: 425-442.

SHIANG, CHIA (1995): *Detecting Parameter Shift in GARCH Models*. Econometric Reviews, 14. Pgs: 241-266.

TSAY, S.J. (1987): *Conditional Heterokesdastic Time Series Models* Journal of the American Statistical Association, 82. Pgs: 590-604

WEIS, A (1982); *Asymptotic Theory for ARCH Models: Stability, Estimation and Testing*. Discussion Paper 82-36 (Universidad de California, San Diego, CA).

WEST, K. EDISON, H. y CHO, D. (1993): *A Utility Based Comparison of Some Models of Foreign Exchange Volatility.* Journal of International Economics, 35. Pgs: 23-46.

WHITE, H (1987): *Specification Testing in Dynamic Models.* En T. Bewley Advances in Econometric. Vth Congress, Vol 1. Nueva York. Cambridge University Press.

WHITE, H y DOMOWITZ (1984): *Nonlinear Regression with Dependent Observations*. Econometrica, 52. Pgs: 143-161.

ZAKONIAN, J.M.(1994): *Threshold Heteroskedastic Models. Journal of Economic*, Dynamics and Control, 18. Pgs: 931-955.